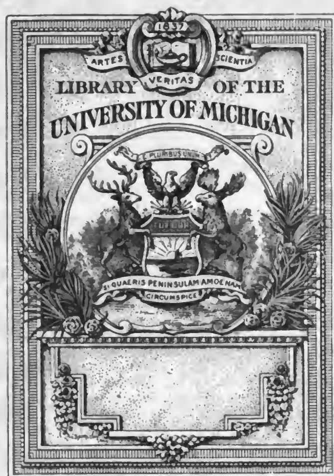
Bibliotheca mathematica


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK

JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON / PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1892.

NEUE FOLGE 6. / NOUVELLE SÉRIE 6.

STOCKHOLM
G. ENESTRÖM.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
MARKGRAFENSTRASSE 51.

PARIS
A. HERMANN.
RUE DE LA SORBONNE 8.

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM 1892.

Inhalt. — Table des matières.

ERRATA.

Page	*ligne*	*au lieu de:*	*lisez:*
85	27	$-A_{\omega-2}\aleph[N_\omega]^{(1)}$	$-A_{\omega-2}\aleph[N_\omega]^{(1)}+A_{\omega-3}$.
87	31	méthode une	méthode est une
89	26	$n+\omega$	n
90	23	MOSER	MASER.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK



JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON / PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1892. STOCKHOLM. N° 1.

NEUE FOLGE. 6. NOUVELLE SÉRIE. 6.

BERLIN. MAYER & MÜLLER. Markgrafenstrasse 51.

Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr.

PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Sur l'oeuvre des Grecs dans le développement des mathématiques.

Par V. V. Bobynin à Moskwa.

Analogue à celui de toutes les sciences, le progrès des mathématiques se fait par les nations qui tiennent le premier rang dans le domaine intellectuel de l'humanité. Or il en est de ces dernières, comme il en est de tous les individus qui les composent. Arrivée au point culminant de sa grandeur, une nation de premier rang subit généralement un état de décrépitude ou de vieillesse, et passe par une décadence complète avant de disparaître tout à fait. Nous trouvons donc le progrès des mathématiques non incessant dans le cours de l'Histoire universelle, mais interrompu à des intervalles plus ou moins longs, pendant lesquels s'effectue pour ainsi dire la transition du savoir. Le rôle historique d'une grande nation une fois accompli, des nationalités plus jeunes s'en approprient le domaine scientifique pour en devenir les successeurs.

L'état actuel de l'Histoire des mathématiques nous permet d'observer le cercle complet de l'activité mathématique chez un seul peuple, chez les Grecs. Le progrès futur y fera joindre peut-être les Egyptiens, les Chaldéens et les Indous. En attendant, voila l'oeuvre des Grecs dans le domaine mathématique. L'époque suivant après le bannissement des Hyksos de l'Egypte et durant jusqu'à Platon et son Académie, cette époque est consacrée tout entière à l'appropriation des connaissances que

l'humanité possédait déjà. Le progrès humain n'a jamais été sujet à de brusques changements dans ses degrés successifs, bien au contraire, la transition s'en est toujours opérée petit à petit, d'une manière à peine remarquable. La science mathématique des Grecs nous donne des preuves d'une création originale, bien avant même que l'époque de l'appropriation ait touché à sa fin, nommément au temps de Pythagoras et de son école. Ces manifestations deviennent de plus en plus fréquentes vers le 5[e] siècle, qui nous montre le génie mathématique des Grecs parfaitement déterminé dans ses tendances et dans son caractère. Il penche ostensiblement pour les investigations géométriques.

Platon et son Académie ouvrent une ère nouvelle et complétement indépendante de la science grecque. Le progrès entier des mathématiques, ou tout au moins celui de la géométrie, s'y trouve concentré. Ce progrès touche à son point culminant dans l'oeuvre d'Archimedes et des grands mathématiciens d'Alexandrie, tels que Euklides, Eratosthenes et Apollonios de Perge.

Ensuite c'est la décadence qui commence. Les travaux des mathématiciens grecs encourent le reproche d'être superficiels. Il n'est plus question de créer des voies nouvelles ou de résoudre les difficultés, présentées par l'époque, mais de combler les lacunes, laissées par le progrès rapide de la science si insignifiantes qu'elles fussent. A ce premier degré de sa décadence le génie mathématique des Grecs a pourtant assez de forces pour tenir tête aux influences étrangères qui viennent l'assaillir. Un siècle avant J. C. il n'en est plus ainsi, et l'activité originale de la science grecque peut être regardée comme terminée.

Une nouvelle phase de décadence se manifeste par le progrès rapide de la direction appliquée, si étrangère au génie grec, et qui apparaît tout d'abord dans les recherches sur la Géodésie par Heron d'Alexandrie. Les travaux des mathématiciens qui suivent, témoignent de la direction arithmético-algébrique, encore plus étrangère à l'esprit grec. Elle vient des écoles néopythagoricienne et néoplatonienne, elle est surtout développée par Diofantos d'Alexandrie dont les oeuvres sont comme une dernière flamme du génie défaillant des Grecs. Elles en rappellent une fois encore le passé glorieux pour conduire à l'époque des commentateurs et des savants bysantins.

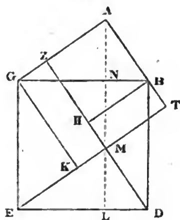
Einiges aus Nassir ed-Dins Euklidausgabe.

Von H. SUTER in Zürich.

Jene* Beweise des pythagoreischen Lehrsatzes, welche die Gleichheit der Quadrate über den Katheten und der Rechtecke, in welche das Hypotenusenquadrat durch die Fortsetzung der Höhe getheilt wird, durch das Mittelglied von Rhomboiden statt von Dreiecken (wie beim Euklidischen Beweis) darlegen, sind in den Werken von I. I. HOFFMANN (*Der pythagoreische Lehrsatz,* Mainz 1819) und JURY WIPPER (*Sechs und vierzig Beweise des pythagoreischen Lehrsatzes, aus dem Russischen übersetzt von* F. GRAAP, Leipzig 1880) theils jüngern Autoren zugeschrieben, theils ohne Angabe des Ursprungs. Wir haben dieselben aber höchst wahrscheinlich, wenn sie nicht noch älter sind, dem in der ersten Hälfte des 13. Jahrhunderts lebenden bekannten persischen Mathematiker und Astronomen NASSIR ED-DIN aus Thus zu verdanken, denn sie befinden sich in einem Scholion zum pythagoreischen Lehrsatz in seiner arabischen Ausgabe der Euklidischen Elemente (gedruckt zu Rom 1594). Der Hauptbeweis ist der bekannte Euklidische; dann beginnt das Scholion mit den Worten: »Dieser Satz hat verschiedene Fälle, denn das Hypotenusenquadrat kann entweder unterhalb des rechtwinkligen Dreiecks fallen oder dieses bedecken (d. h. oberhalb fallen), und in diesen beiden Annahmen können wiederum die beiden Kathetenquadrate ausserhalb des Dreieckes liegen, oder beide dasselbe bedecken, oder das kleinere kann es bedecken, das grössere nicht, oder umgekehrt, und das sind im Ganzen 8 Fälle». Er bespricht und beweist sodann die einzelnen Fälle (aber nicht alle ausführlich); ich gebe im Folgenden die Figuren zu zwei Fällen* wieder.

1. Die beiden Kathetenquadrate bedecken das Dreieck, das Hypotenusenquadrat nicht (Fig. 1). Diese Figur ist im ara-

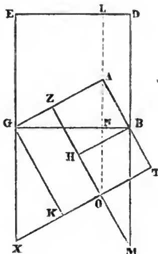
Fig. 1.



bischen Druck unvollständig, es fehlen die Linien *HD* und *KE*; dass sie aber NASSIR ED-DIN in seinem Manuskript ursprünglich gezeichnet hatte, ergibt sich aus dem Text des Beweises, den ich hier seiner Weitschweifigkeit wegen nicht ausführlich gebe. Nachdem er die Geraden *HD* und *KE* gezogen hat, zeigt er die Kongruenz der Dreiecke *GKE*, *BHD* und *ABG*, schliesst hieraus, dass *ZD* und *TE* gerade Linien seien und sich im Punkte *M* der Linie *AL* schneiden; hieraus folgt dann sofort, dass Quadrat *ABHZ* = Rhomboid *ABMD* = Rechteck *BNLD* ist, u. s. w. — (Es ist noch zu bemerken, dass NASSIR ED-DIN hier, wie bei allen andern Fällen, drei Unterfälle, jeden mit besonderer Figur, unterscheidet, nämlich $AB \gtreqless AG$.)

2. Alle drei Quadrate bedecken das Dreieck (Fig. 2).

Fig. 2.

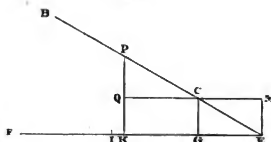


Nachdem *DB* und *ZH* bis zum Durchschnitt in *M* verlängert worden sind und ebenso *LN* bis *O*, zeigt er die Kongruenz der Dreiecke *ABG* und *BHM*, woraus die Gleichheit von *BG* oder *BD* und *BM* folgt; hieraus ergibt sich dann, dass Quadrat *ABHZ* = Rhomboid *ABMO* = Rechteck *LDBN* ist, u. s. w.

Die NASSIR ED-DIN'sche Bearbeitung der Elemente enthält ausserdem noch hie und da einen Zusatz, der von Interesse ist; ich erinnere nur noch an seinen Versuch, das 13. Axiom zu beweisen, den er in einem Scholion zum 28. Satze des ersten Buches darlegt. Von demselben, der sehr weitschweifig ist, gibt KÄSTNER in 1. Bande seiner *Geschichte der Mathematik*, pag. 375—381 eine Darstellung, wird aber in der Kritik desselben NASSIR nicht ganz gerecht, ja bezichtigt ihn sogar einer Erschleichung oder wie er sich nachher milder ausdrückt, eines

Selbstbetruges. Dieser Vorwurf ist ungerechtfertigt. Der Beweis besteht nämlich aus 3 Hülfssätzen und dem Hauptsatze, der wieder in 3 Theile zerfällt, und jeder Satz folgt logisch aus dem vorhergehenden. Nun greift KÄSTNER den Beweis des ersten Theils des Hauptsatzes an, welcher zeigt, dass, wenn (Fig. 3)

Fig. 3.



$PC = CE$ und PK senkrecht auf EF ist, $KG = GE$ sein muss. Er behauptet (pag. 380), dieser Beweis sei nicht erbracht; ich behaupte das Gegentheil; man lese übrigens seine (mit Ausnahme einiger falscher Buchstaben) im Allgemeinen richtige Darstellung des Beweisganges und man wird mir Recht geben, man wird höchstens aussetzen, NASSIR hätte noch den Schlusssatz hinzufügen sollen: also kommt es auf dasselbe hinaus, ob man $PC = CE$ macht und PK senkrecht auf EF fällt, oder ob man $PC = CE$ und $KG = GE$ macht und P mit K verbindet; oder er hätte sagen können, das Perpendikel von P aus treffe in den Punkt I, und dann die Identität von I und K nachweisen können. Diese Lücken des Beweises rechtfertigen aber gewiss nicht die Behauptung KÄSTNER's: »Daran hat NASSIR nicht gedacht, so fängt sich sein Beweis mit einer Erschleichung an«. Die Kritik KÄSTNER's ist nur richtig, soweit sie sich auf den ersten Hülfssatz bezieht; da ist eben NASSIR passiert, was bis jetzt Allen, die dieses Axiom beweisen wollten, dass sie nämlich ein neues Axiom aufgestellt haben, das nur etwas anschaulicher und selbstverständlicher war, als das zu beweisende, aber eben doch wieder ein Axiom war, denn der erste Hülfssatz, für den ich den Leser auf KÄSTNER pag. 375 verweise, ist von NASSIR nicht bewiesen worden; er fügt auch am Ende hinzu: »Diese Schlüsse (Urtheile) sind principielle, sie sind auch als solche von ältern und neuern Geometern angewendet worden«. Es mag hier noch erwähnt werden, dass der von CLAVIUS in seiner Euklidausgabe (Köln 1591) pag. 50—54 versuchte Beweis des 13. Axioms höchst wahrscheinlich dem NASSIR ED-DIN'schen nachgebildet ist, (denn er weicht nur wenig von

diesem ab) obgleich er bemerkt (pag. 50): »Id quod in EUCLIDE quodam arabico factum etiam esse accepi, sed nunquam facta mihi est copia demonstrationem illam legendi, etsi obnixe illud iterum atque iterum ab eo, qui eum EUCLIDEM arabicum possidet, flagitavi. Quare hanc quae sequitur excogitavimus». Ebenso dürfte ein von CLAVIUS in einem Scholion zum pythagoreischen Lehrsatz (pag. 84) gegebener zweiter Beweis dieses Satzes nicht ganz von NASSIR ED-DIN unabhängig sein.

Zum Schlusse sei mir noch eine Ehrenrettung NASSIR ED-DIN's gestattet. Hr. HEIBERG (*Literargeschichtliche Studien über Euklid,* pag. 6) beschuldigt ihn, wie überhaupt die arabischen Autoren (und diess im Allgemeinen nicht ohne Grund), »der Sucht, die grossen und hochgeschätzten Meister der griechischen Literatur mit Arabern oder wenigstens mit dem Orient in Verbindung zu bringen», und führt als schlagenden Beleg hiefür an, dass »NASSIR ED-DIN, der selbst aus Thus gebürtig war, auch den EUKLID *Thusinus* nennt» (er folgt hier der Ausgabe der Euklidischen Elemente durch AUGUST, I, pag. 295). Nun steht aber in meinem Exemplar von NASSIR ED-DIN's EUKLID sowohl als in demjenigen der Stadtbibliothek Zürich (und wahrscheinlich in allen) *as-Suri* d. h. der Tyrier, oder von Tyrus gebürtig, wie auch andere Quellen haben; aus Thus gebürtig heisst *at-Thusi.* Also aus Tyrus soll EUKLID nach NASSIR und anderen Autoren stammen — sollte dieses unmöglich sein? Sind nicht auch APOLLONIOS von Pergae, NIKOMACHOS von Gerasa, THEON von Smyrna etc. aus Asien?

Miscellen zur Geschichte der Mathematik.

Von MORITZ STEINSCHNEIDER in Berlin.

11. Simplicius, der Mathematiker.

Unter dem Namen des SIMPLICIUS ist ein Erklärer des ARISTOTELES bekannt. Das Buch *Fihrist* von NADIM erwähnt diesen als Commentator der Bücher der Categorien und von der Seele (S. 255). Aber auch unter den Mathematikern (S. 268) erscheint »SIMPLICIUS der Grieche» (*Rumi*)[1] mit Angabe von 2 Schriften: 1° Commentar über den Anfang (*Sadr*)[2] des Buches EUKLID »welches ist die Einleitung in die Geometrie»; 2° Commentar über den IV. Tractat(!) der Categorien.

Noch wunderlicher ist es, dass diese beiden Titel bei WENRICH (*De auctorum graecorum versionibus*, p. 200) unter dem Artikel AUTOLYCUS erscheinen. Hat vielleicht in seinem Exemplar des *Fihrist* die Überschrift SIMPLICIUS gefehlt, so dass er diese Schriften dem vorangehenden AUTOLYCUS beigelegt glaubte? Allein er lässt den zweiten Titel in seinem Artikel über SIMPLICIUS p. 297 weg, obschon er sich auch bei HAGI KHALFA VI, 97 findet, weil KIFTI dafür das arabische Wort *wa-geirahu* d. h. »und Anderes» (Buch, oder Bücher) gesetzt hat.[3] Für KIFTI ist aber SIMPLICIUS gar nicht der Philosoph, sondern nur ein griechischer Geometer, von welchem er in allgemeinen Phrasen spricht.[4]

LECLERC (*Histoire de la médecine arabe* I, 219) bemerkt, dass der Commentar der Elemente des EUKLID (die Einschränkung auf die Einleitung lässt er weg) citirt sei in dem Pariser Ms. supplément arabe 955. Diese Anführung könnte allerdings aus dem *Fihrist* oder aus KIFTI geflossen sein. Ich hatte in dem Artikel des *Fihrist* eine Confusion vermutet, und geglaubt, der Commentar zu EUKLID setze SIMPLICIUS an die Stelle von HYPSIKLES, der die Tractate »IV oder V» verbessert oder redigirt haben soll, allerdings nach einer falschen Lesart des *Fihrist*.[5] Diese Zahl 4 wäre dann irrtümlich in den zweiten Titel geraten, wo sie jedenfalls unrichtig ist, da die Categorien nur aus 3 Tractaten bestehen. Ich fand aber weitere Spuren eines Mathematikers SIMPLICIUS, der zu EUKLID citirt wird. Ms. Digby 168[28] (Catalog v. MACRAY p. 175) enthält ein Stück: *De expositione lib. Euclidis de geometria secundum Auarizum* (sic), beginnend: »*Sanbelichus etc.*»; letzterer Namen ist ohne Zweifel eine

aus dem Arabischen stammende Umschreibung von SIMPLICIUS. In dem Namen *Auarizius* steckt höchst wahrscheinlich Anaritius, d. i. der bekannte Commentator NEIRIZI; in der Liste der Übersetzungen GERARD's von Cremona, N. 15, heisst es »*Liber anaritii super Euclidem tr. I*».[6] Eine Handschrift dieser Übersetzung ist allerdings bis jetzt noch nicht nachgewiesen. Sollte Ms. Digby ein Fragment derselben enthalten? Eine weitere Spur des SIMPLICIUS habe ich in einer hebräischen Quelle entdeckt. In einem hebräischen ms. der Bodleiana (hebr. 4), woraus mir D:r NEUBAUER vor zwei Jahren eine Stelle mitteilte, wird סנקלונום als Corrector des Buches von אבלינום (ohne Zweifel APOLLONIUS) genannt. Ich sehe auch hier eine Verstümmelung des Wortes SIMPLICIUS, da im Arabischen die Buchstaben jenes Namens denen des SIMPLICIUS (arab. *Sinblikus*) sehr ähnlich sind.

[1] Zeitschr. für Mathem. **10**, 1865, 462.

[2] Dieses Wort fehlt in einigen Mss. des biographischen Wörterbuches von KIFTI.

[3] In den Varianten p. 24 scheint die Angabe ungenau, das Wort »und» ist zu streichen.

[4] Der unedirte Artikel des KIFTI wird nun hoffentlich bald in der Ausgabe des Werkes durch AUG. MÜLLER zu finden sein; ich kenne ihn nur aus der Berliner Handschrift.

[5] Siehe meine Abhandlung *Euklid bei den Arabern,* S. 83.

[6] S. über ihn *Euklid bei den Arabern,* S. 86; »Anarizeo» bei RICO Y SINOBAS, *Libros del Saber de astronomia,* II, p. VII. [Vgl. P. TANNERY, *La géométrie grecque,* I, p. 167, wo p. 175 auch der Mathematiker SIMPLICIUS erwähnt ist. (G. E.)]

Notice historique sur la théorie des ensembles.

Par G. Vivanti à Mantova.

1. La théorie des ensembles trouve sa raison d'être dans le besoin, depuis longtemps éprouvé dans les mathématiques, d'introduire le concept de mesure dans le champ des grandeurs infinies. La possibilité de mesurer et de comparer entre elles les grandeurs infiniment grandes a été l'objet de nombreuses et intéressantes discussions, auxquelles prirent part les philosophes et les mathématiciens les plus distingués; et sans entrer dans la riche littérature de cette matière, nous citerons seulement l'ouvrage de Guido Grandi: *De infinitis infinitorum et infinite parvorum ordinibus* (Pise 1710), où l'on trouve un résumé des opinions des contemporains sur la question dont il s'agit, — et les *Élémens de la géométrie de l'infini* de Fontenelle (Paris 1727). Mais la théorie des ensembles a mis en lumière ce fait curieux et inattendu, que l'application des procédés ordinaires de mesure et de comparaison aux grandeurs infinies conduit, en général, à des résultats contradictoires, ou tout au moins insignifiants. Ainsi, par exemple, si AB est un segment rectiligne, pris sur une droite indéfinie, on ne peut pas dire que le segment infini qui se trouve à droite du point A soit plus grand que celui qui se trouve à droite du point B, car non seulement on peut faire coïncider les deux segments dans toute leur étendue, mais on peut même les disposer de telle façon que le deuxième contienne dans son intérieur le premier. Pareillement on ne peut pas dire que la série infinie $1, 2, 3, \ldots$ contienne plus d'éléments que la série $2, 4, 6, \ldots$, quoique les termes de cette dernière série ne constituent qu'une partie de la première, car on peut faire correspondre les deux séries terme à terme, de façon qu'on pourrait dire qu'elles ont même nombre d'éléments, et l'on peut tout aussi bien faire correspondre aux termes $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ de la première série les termes $4, 6, 8, \ldots, 2n+2, \ldots$ de la deuxième, de façon qu'il y ait dans cette dernière série un terme correspondant à chaque terme de la première et en outre un terme auquel il ne correspond pas de terme dans celle-ci*.

* Il est juste de rappeler que ce fait avait été déjà remarqué par B. Bolzano (voir: *Paradoxien des Unendlichen,* § 20). Ce savant est peut être le seul, qui ait entrevu quelques-unes des vérités qui ont été ensuite découvertes et établies rigoureusement par M. G. Cantor.

2. La première occasion à l'étude des ensembles de points s'est présentée à M. GEORGES CANTOR lors de ses recherches sur les séries trigonométriques (n° 1)*. En s'efforçant d'étendre la validité d'un théorème relatif à ces séries, il éprouva la nécessité de considérer des groupes infinis de points disposés sur une ligne droite. Ce sont ces groupes qu'il nomma *ensembles linéaires de points* (*lineare Punktmannigfaltigkeiten*). Étant donné un ensemble P de cette nature, il y a dans la droite qui le contient des points, appartenant ou non à P, caractérisés par cette propriété, qu'il n'y a pas d'intervalle, si petit qu'il soit, contenant un de ces points, qui ne contienne une infinité de points de P. On dit que ces points sont des *points limites* (*Grenzpunkte*) de l'ensemble P, et l'on désigne leur ensemble par P' (*premier dérivé* [*Ableitung*] de P). Si l'ensemble P' n'est pas composé d'un nombre fini de points, il aura à son tour un premier dérivé, qu'on pourra désigner par P'' (*second dérivé* de P), et ainsi de suite. Tous les points d'un ensemble dérivé d'ordre quelconque sont contenus aussi dans tous les dérivés d'ordre inférieur. Il peut arriver qu'après un nombre fini n de dérivations on parvienne à un ensemble $P^{(n)}$ composé d'un nombre fini de points, et qui par suite n'a point d'ensemble dérivé; on dit alors que P est un ensemble du premier *genre* (*Gattung*) et de la $n^{\text{ième}}$ *espèce* (*Art*).

3. Après avoir ainsi posé les premiers fondements de la théorie des ensembles, M. CANTOR eut bientôt une nouvelle occasion d'en approfondir l'étude (n° 2). En appelant *nombre algébrique réel* toute racine réelle d'une équation algébrique à coefficients rationnels, il trouva que l'ensemble de tous les nombres algébriques réels peut être disposé en une série simple de la forme $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ En même temps il démontra que, si un ensemble de nombres réels jouit de cette propriété, l'on peut dans tout intervalle donné d'avance trouver une infinité de nombres n'appartenant pas à cet ensemble. L'application de ce théorème aux nombres algébriques réels montre que l'ensemble de ces nombres ne constitue, pour ainsi dire, qu'une partie négligeable de l'ensemble de tous les nombres réels; ce qui doit sembler bien étrange, attendu que l'ensemble des nombres algébriques réels est *condensé* (*überalldicht*) dans tout intervalle, c. a. d. qu'il n'y a pas d'intervalle, si petit qu'il soit, qui ne contienne quelque élément de cet ensemble.

---

* Les numéros entre les parenthèses se rapportent à la liste bibliographique qui se trouve à la fin de cette note.

Il nait d'ici la question d'établir en quoi consiste vraiment la différence de nature entre un ensemble P pouvant être disposé en série simple et un ensemble tel que celui R de tous les nombres réels. On peut caractériser cette différence en disant qu'on peut faire correspondre tout ensemble tel que P, élément à élément, à la série des nombres entiers positifs $1, 2, 3, \ldots,$ tandis que cela n'est pas possible pour un ensemble tel que R.

Si l'on peut établir entre les éléments de deux ensembles une correspondance réciproque et complète, on dit qu'ils ont même *puissance* (*Mächtigkeit*), ou qu'ils appartiennent à la même *classe*[1] (*Klasse*).

C'est ici qu'apparaissent certaines propriétés imprévues et paradoxales des ensembles infinis, qui montrent clairement que le fini et l'infini sont deux choses *spécifiquement* diverses. Le concept de *puissance* coïncide, pour un ensemble fini, avec celui de *nombre d'éléments;* deux ensembles finis ont même puissance toujours et seulement lorsqu'ils contiennent un nombre égal d'éléments. Pour un ensemble infini au contraire, le concept de nombre d'éléments n'a plus un sens bien défini, et il peut arriver qu'un ensemble ait même puissance avec une partie de soi-même; ainsi p. ex. l'ensemble de tous les nombres entiers positifs et celui des nombres pairs, l'ensemble de tous les nombres réels de l'intervalle $0-1$ et celui de tous les nombres irrationnels de ce même intervalle, ont respectivement même puissance. Mais il y a plus. On peut établir une correspondance univoque et complète entre tous les points d'un segment rectiligne fini et tous les points d'un espace fini à un nombre quelconque de dimensions (n° 3). Il faut toutefois remarquer que cette correspondance est nécessairement discontinue (n°s 5, 6, 7, 9).

4. Le théorème dernièrement rappelé réduit, pour ce qui se rapporte à la notion de puissance, l'étude des ensembles de points contenus dans un espace à un nombre quelconque de dimensions à celle des ensembles linéaires. Il se pose maintenant le problème fondamental: quel est le nombre des classes des ensembles linéaires de points? M. Cantor (n°s 3, 18, 23) affirme que ces ensembles se divisent en deux classes seulement, dont la première comprend tous les ensembles dont les éléments peuvent être disposés en série simple (p. ex. l'ensemble $1, 2, 3, \ldots$), la deuxième tous les ensembles ayant même puissance avec l'ensemble de tous les nombres réels de l'intervalle $0-1$. Il n'y a pas de difficulté à établir que ces

deux classes sont effectivement différentes (voir n° 8); quant à la question s'il n'y en a pas d'autres, beaucoup de points de la théorie des ensembles font pressentir qu'il doit en être vraiment ainsi, mais on n'en a pas encore une démonstration rigoureuse, malgré la tentative faite en ce sens par M. P. TANNERY (n° 32).

5. Les résultats obtenus dans la nouvelle théorie encouragèrent M. CANTOR à en essayer une exposition systématique, ce qu'il fit dans une suite de 6 articles sons le titre commun: *Über unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten* (nos 8, 10, 11, 12, 18, 23). Après avoir rappelé les dénominations introduites dans ses travaux précédents, il considère un ensemble quelconque P appartenant au deuxième genre; c. a. d. dont aucun dérivé ne contient un nombre fini de points. Alors, puisque chaque dérivé successif est compris dans tous les précédents, il y aura des points appartenant en même temps à tous les dérivés de P. En appelant $P^{(\omega)}$ l'ensemble de ces points, et en désignant en général par $\mathfrak{D}(P, Q, R, \ldots)$ l'ensemble des éléments communs aux ensembles $P, Q, R, \ldots$, on aura (n° 10):

$$P^{(\omega)} = \mathfrak{D}(P', P'', P''', \ldots).$$

Soient en outre $P^{(\omega+1)}, P^{(\omega+2)}, \ldots, P^{(\omega+n)}, \ldots$ les dérivés successifs de $P^{(\omega)}$, et posons

$$P^{(\omega.2)} = \mathfrak{D}(P^{(\omega+1)}, P^{(\omega+2)}, P^{(\omega+3)}, \ldots),$$

et de même:

$$P^{(\omega^2)} = \mathfrak{D}(P^{(\omega)}, P^{(\omega.2)}, P^{(\omega.3)}, \ldots),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P^{(\omega^\omega)} = \mathfrak{D}(P^{(\omega)}, P^{(\omega^2)}, P^{(\omega^3)}, \ldots),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

nous aurons défini par là une suite d'ensembles, qui s'étend à l'infini, mais dont chaque terme est parfaitement déterminé par les précédents; et il n'y a pas de difficulté à désigner ces ensembles comme les dérivés de P des ordres $\omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega+n, \ldots, \omega.2, \ldots, \omega^2, \ldots, \omega^\omega, \ldots$ Il y a effectivement des ensembles dont on peut pousser la dérivation aussi loin que l'on veut sans parvenir jamais à un ensemble fini; tel est p. ex. l'ensemble de tous les points de l'intervalle 0—1, dont tous les dérivés sont identiques à l'ensemble primitif. Quant au symbole ω, qui s'est glissé ici, pour ainsi dire, par hasard, il acquerra dans la suite une bien autre importance. Mais n'anticipons pas.

6. Les ensembles de la première classe, qu'on appelle aussi *dénombrables* (*abzählbar*) parce qu'on peut faire correspondre leurs éléments d'une façon univoque et complète aux termes de la suite naturelle des nombres, se présentent dans beaucoup de recherches et ont une grande importance. Les deux théorèmes géométriques suivants, qui s'y rapportent, sont particulièrement remarquables (n° 11):

> S'il y a, dans un espace continu à n dimensions, un ensemble d'espaces partiels continus à n dimensions, séparés l'un de l'autre et ne se touchant tout au plus qu'à leurs limites, cet ensemble est dénombrable.

> S'il y a, dans un espace à n dimensions, n étant ≥ 2, un ensemble dénombrable P de points, on peut joindre entre eux deux points quelconque de cet espace par une ligne continue ne passant par aucun point de P. En d'autres termes, on peut enlever tous les points de l'ensemble P, sans que le passage continu d'un point à un autre quelconque de l'espace considéré cesse d'être possible.

Nous citerons aussi le théorème suivant, qui a reçu de nombreuses applications dans l'analyse (n° 12):

> Si le premier dérivé P' d'un ensemble linéaire de points P est dénombrable, on peut renfermer les points de P dans un ensemble fini d'intervalles, la somme de ces intervalles étant plus petite qu'une grandeur donnée d'avance.

7. Pour poursuivre l'étude des ensembles de points, il faut maintenant introduire un concept nouveau, celui des *nombres transfinis* (*überendliche* ou *transfinite Zahlen*) (n°s 18, 49). Soit donné un ensemble *bien ordonné* (*wohlgeordnet*) d'éléments, c. a. d. un ensemble disposé de telle façon, qu'il existe un premier élément et que pour chaque élément ou groupe, fini ou infini, d'éléments on puisse assigner un élément immédiatement successif. En faisant abstraction de la nature particulière des éléments qui composent cet ensemble, on obtient le concept de *nombre ordinal* (*Ordnungszahl*); en d'autres mots, on dit que deux ensembles bien ordonnés ont *un même nombre ordinal,* si l'on peut en faire correspondre les éléments d'une façon univoque et complète, en sorte que les éléments correspondants se trouvent disposés dans le même ordre dans les deux ensembles.

Considérons d'abord un ensemble bien ordonné P contenant un nombre fini d'éléments; si l'on fait correspondre ses éléments aux termes de la série $1, 2, 3, \ldots,$ le terme n de cette série correspondant au dernier élément de P sera le *nombre*

ordinal de P; en outre tous les ensembles bien ordonnés qu'on pourra obtenir en déplaçant d'une façon quelconque les éléments de P auront ce même nombre ordinal n. Au contraire, si l'ensemble bien ordonné P contient une infinité d'éléments, aucun des nombres de la série $1, 2, 3, \ldots$ ne peut être le nombre ordinal de P, et il faut par suite tenter d'étendre plus loin cette série. Pour cela, introduisons d'abord un symbole ω représentant le nombre ordinal de la série $1, 2, 3, \ldots$, prise dans toute son extension et considérée comme un ensemble infini bien ordonné, et par conséquent aussi le nombre ordinal de toute série de la forme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ On peut regarder ω comme le plus petit de tous les nombres ordinaux appartenant à des ensembles infinis bien ordonnés, c. a. d. comme le plus petit des *nombres transfinis*. Si nous considérons maintenant l'ensemble bien ordonné P qu'on obtient en faisant suivre à la série $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, prise dans toute son extension, un autre element β_1, le nombre ordinal de cet ensemble ne sera plus ω, car en faisant correspondre les éléments par ordre à ceux de la série $1, 2, 3, \ldots$, celle-ci sera complétement épuisée lorsqu'il restera encore dans l'ensemble P l'élément β_1; il sera donc bien naturel de désigner le nombre ordinal de P par $\omega + 1$. On peut définir analoguement les symboles $\omega + 2$, $\omega + n$, $\omega . 2$, $\omega . 3$ comme les nombres ordinaux des ensembles bien ordonnés:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_1, \beta_2;$$
$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n;$$
$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_1, \beta_2, \ldots;$$
$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_1, \beta_2, \ldots, \gamma_1, \gamma_2, \ldots;$$

et de même le symbole ω^2 comme le nombre ordinal de l'ensemble bien ordonné constitué par une serie simple d'ensembles $S_1, S_2, \ldots$, dont chacun a la forme $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ On voit aisément qu'en poursuivant ainsi l'on peut définir des nombres transfinis toujours nouveaux, et que la formation de ces nombres n'a pas de limite. En effet, après avoir formé tous les nombres transfinis possibles dont le symbole se compose au moyen de ω et des nombres finis, nous n'aurons qu'à introduire un nombre *entièrement nouveau* Ω, et à le combiner ensuite avec les précédents; et ainsi de suite.

Il y a encore une remarque à faire au sujet des ensembles infinis. Les ensembles bien ordonnés qu'on obtient en déplaçant d'une façon quelconque les éléments d'un ensemble infini

ont en général des nombres ordinaux différents; ainsi par exemple de l'ensemble $a_1, a_2, a_3, \ldots$, dont le nombre ordinal est ω, on obtient les ensembles:

$$a_2, a_3, \ldots, a_1;$$

$$a_3, a_4, \ldots, a_1, a_2;$$

$$a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_1, a_2, \ldots, a_n;$$

$$a_1, a_3, a_5, \ldots, a_2, a_4, a_6, \ldots,$$

dont les nombres ordinaux sont respectivement $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\omega + n$, $\omega . 2$.

8. En examinant de près la façon dont ont été engendrés les nombres transfinis, on voit qu'il y a deux *principes de formation* (*Erzeugungsprincipe*), à savoir, l'addition d'une unité à un nombre connu, et la création d'un nombre qui doit faire suite à tous les nombres déjà définis. On dit qu'un nombre est de la première ou de la deuxième *espèce* (*Art*), suivant qu'il est engendré par le premier ou par le deuxième principe. Mais il faut introduire un troisième principe, qu'on peut nommer *principe d'arrêt* ou *de limitation* (*Hemmungsprincip, Beschränkungsprincip*).

Nous avons déjà rappelé, que deux ensembles infinis, dont l'un contient l'autre, peuvent toutefois avoir même puissance. Si cela n'arrive pas, on dit que le premier ensemble a une puissance plus grande que le deuxième. La plus petite puissance des ensembles infinis est évidemment celle des ensembles dénombrables, et par suite aussi de la série $1, 2, 3, \ldots$ Si l'on ajoute à cette série successivement les termes $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\ldots, \omega . 2, \omega . 3, \ldots, \omega^2, \ldots, \omega^\omega, \ldots, \omega^{\omega^\omega}, \ldots$, on peut démontrer qu'elle ne cesse pas d'avoir la première puissance. Nous dirons que tous les nombres finis constituent la classe I de nombres, et que tous les nombres transfinis, qui, ajoutés à la série $1, 2, 3, \ldots$, n'en changent pas la puissance, constituent la classe II; ou, ce qui est la même chose, les nombres de la classe II sont ceux qui appartiennent comme nombres ordinaux à tous les ensembles possibles ayant la première puissance. Mais la formation des nombres transfinis ne peut pas s'arrêter ici, car nous connaissons des ensembles de puissance supérieure à la première; il nous faut donc étendre encore plus loin la série des nombres, de façon à y trouver des nombres ordinaux pour les ensembles de cette nature. Pour cela nous introduisons (ainsi que nous l'avons déjà dit) un nombre *entièrement nouveau* Ω, en le définissant par cette propriété, que la

série des nombres depuis 1 à un quelconque des nombres inférieurs à Ω constitue un ensemble fini ou de la première puissance, et que la série de tous les nombres inférieurs à Ω constitue un ensemble de la deuxième puissance. Cela est tout à fait analogue à ce qu'on a fait lors de l'introduction de ω, qui jouit de cette propriété, que la série de tous les nombres depuis 1 à un quelconque des nombres inférieurs à ω est finie, et que la série de tous les nombres inférieurs à ω a la première puissance. Le principe de limitation consiste donc en ceci, que l'introduction d'un nombre *entièrement nouveau* (tel que ω ou Ω) doit avoir lieu toujours et seulement lorsque l'ensemble de tous les nombres déjà formés a une puissance supérieure à celle de l'ensemble de tous les nombres inférieurs à un quelconque de ces nombres. Au moyen de ce principe la série indéfiniment étendue des nombres se divise en classes, dont chacune a cette propriété, que les nombres dont elle se compose sont les nombres ordinaux de tous les possibles ensembles bien ordonnés ayant une même puissance, et de ceux-ci seulement. On peut encore ajouter, que les éléments de l'un quelconque de ces ensembles (abstraction faite des ensembles finis) peuvent être disposés en série bien ordonnée de façon à avoir pour nombre ordinal un quelconque des nombres de la classe correspondante.

Les nombres transfinis coïncident avec les symboles de dérivation dont nous avons déjà parlé, en ce sens, que les dérivés d'un ensemble P forment un ensemble bien ordonné de telle nature, que la série de ces dérivés depuis 1 jusqu'à $P^{(\alpha)}$ a le nombre ordinal α.

9. Les nombres transfinis offrent le moyen d'étudier les ensembles de points ayant une puissance quelconque. Nous en trouvons tout de suite une application dans le théorème suivant, qui a été démontré par MM. CANTOR (nos 18, 19, 23) et BENDIXSON (n° 20):

Si le premier dérivé P' d'un ensemble P est dénombrable, il y a un nombre α de la classe I ou II, pour lequel $P^{(\alpha)}$ est nul; si P' n'est pas dénombrable, il y a un nombre α pour lequel $P^{(\alpha)}$ est parfait.

On nomme *parfait* (*perfect*) un ensemble qui est identique avec son premier dérivé, et, par conséquent, avec tous ses dérivés. Tout ensemble parfait a la puissance du continu (nos 18, 19, 20, 23, 25, 30). Le continu lui-même est un ensemble parfait; mais il y a des ensembles parfaits qui ne sont pas continus, et il y en a même qui ne sont condensés dans aucun

intervalle, si petit qu'il soit. En quoi donc le continu diffère-t-il des autres ensembles parfaits? En ceci, qu'il est en même temps un ensemble *bien enchaîné*. On dit qu'un ensemble est *bien enchaîné* (*zusammenhängend*), si, t et t' étant deux points quelconques de cet ensemble, on peut trouver un nombre fini n de points $t_1, t_2, \ldots, t_n$ appartenant à l'ensemble considéré, de façon que les distances $tt_1, t_1t_2, \ldots, t_{n-1}t_n, t_nt'$ soient toutes moindres qu'une longueur donnée d'avance (n° 18).

10. Les ensembles parfaits sont le trait-d'union entre deux familles plus générales d'ensembles, les ensembles *condensés en soi* (*insichdicht*) et les ensembles *fermés* (*geschlossen*). On dit qu'un ensemble est *condensé en soi*, s'il est contenu dans son premier dérivé; on dit au contraire qu'il est *fermé* s'il le contient. Tout ensemble qui est le dérivé d'un autre ensemble est évidemment fermé; mais il est important de remarquer, que tout ensemble fermé peut-être regardé, d'une infinité de façons différentes, comme le premier dérivé d'un autre ensemble (n° 23). De là et de ce que nous avons dit précédemment, il découle une propriété remarquable des ensembles fermés (n°s 23, 38), à savoir, que, si un ensemble fermé P est dénombrable, il y a un nombre α de la classe I ou II, pour lequel $P^{(\alpha)}$ est nul, et que, si P n'est pas dénombrable, il y a un nombre α, pour lequel $P^{(\alpha)}$ est parfait. Dans ce dernier cas on peut décomposer l'ensemble P d'une façon unique en deux ensembles partiels R et S, dont S est parfait et coïncide avec $P^{(\alpha)}$, et R est dénombrable et n'a aucun élément commun avec $R^{(\alpha)}$. Il suit de là immédiatement qu'un ensemble fermé ou est dénombrable, ou a même puissance avec le continu (n°s 23, 25, 30).

11. Ainsi que nous l'avons déjà remarqué, il y a des ensembles pouvant être renfermés dans des intervalles en nombre fini, dont la somme est si petite que l'on veut. C'est là un nouveau point de vue, auquel on peut se placer pour l'étude des ensembles de points. On peut dire sans difficulté que l'ensemble de tous les points d'un espace continu et fini, à n dimensions, ayant le volume v, a lui même le *volume* ou la *grandeur* (*Inhalt*) v; mais on peut aussi étendre ce concept à un ensemble quelconque de la façon suivante (n°s 23, 25). Soit P un ensemble de points contenu dans un espace fini à n dimensions A, et décrivons autour de chaque point de P ou de P' comme centre une hypersphère de rayon ρ. La partie de l'espace A qui est contenue dans l'intérieur de ces sphères est une fonction de ρ, $F(\rho)$ qui [ainsi qu'il a été démontré par M. Stolz (n° 34) et par Harnack (n° 39)] tend à une

limite déterminée, positive ou nulle, lorsque ρ tend à zéro; cette limite est ce qu'on appelle le *volume* ou la *grandeur* de l'ensemble P. Un ensemble a même volume avec un quelconque de ses dérivés; d'où il suit, en vertu d'un théorème énoncé plus haut, qu'étant donné un ensemble quelconque P, dont le volume n'est pas nul, on peut toujours trouver un ensemble parfait ayant même volume avec P.

12. Quoique l'on puisse admettre, en toute probabilité, qu'il n'y a que deux seules classes d'ensembles de points, l'existence d'ensembles appartenant à des classes différentes de celles-ci n'est point du tout inconcevable. Cela justifie les recherches très générales de M. CANTOR, dont nous allons dire quelques mots (n° 38).

Soit P un ensemble quelconque; on peut le décomposer en deux ensembles partiels:

$$P = Pa + Pc,$$

dont le premier Pa (*adhérence* de P) contient tous les points de P qui n'appartiennent pas à P', le second Pc (*cohérence* de P) tous les points communs à P et à P'. On peut tout aussi bien décomposer Pc en deux ensembles partiels:

$$Pc = Pca + Pc^2,$$

et ainsi de suite; on obtient de cette façon:

$$P = Pa + Pca + Pc^2 a + \ldots + Pc^{\nu-1} a + Pc^\nu,$$

où Pc^ν est la *cohérence* ν*-ième* de P. Si α est un nombre transfini, on définit la cohérence α-ième de P comme la cohérence de la cohérence $(\alpha - 1)$-ième, ou comme l'ensemble des points communs à toutes les cohérences d'ordre inférieur à α, suivant que α est de la première ou de la deuxième espèce; on a en tout cas:

$$P = \sum_{\alpha'=0,1,\ldots<\alpha} Pc^{\alpha'} a + Pc^\alpha.$$

Or il est toujours possible de trouver un nombre α de la classe I ou II, pour lequel Pc^α soit un ensemble condensé en soi; si l'on décompose cet ensemble en deux ensembles partiels U, V, dont le second contient les points de Pc^α dans le voisinage desquels il y a un ensemble non dénombrable de points de P, et si l'on désigne par R l'ensemble dénombrable $\sum\limits_{\alpha'=0,1,\ldots<\alpha} Pc^{\alpha'} a$, on aura:

$$P = R + U + V.$$

L'ensemble R n'a de points communs ni avec U' ni avec V'; en outre U et V' n'ont aucun point commun. Il va sans dire que, si P est dénombrable, l'ensemble partiel V est nul. L'ensemble R, ou Pr, est le *résidu* de P; $U + V$, ou Pi, est l'*inhérence totale* de P, U ou Pi_1, l'*inhérence de premier ordre*. Quant à V, en supposant possible l'existence d'ensembles ayant une puissance quelconque, on peut le décomposer en une multiplicité finie ou infinie d'ensembles partiels *homogènes*, c. a. d. de telle nature, que l'ensemble des points de P qui se trouvent dans le voisinage d'un point quelconque de l'ensemble considéré ait une même puissance.

13. La théorie des ensembles est entrée depuis quelques années dans le domaine commun, et l'on trouve l'exposition, plus ou moins étendue, de ses éléments dans plusieurs traités, tels que ceux de MM. Meyer (n° 41), Biermann (n° 47) et Dickstein (n° 56), ainsi que dans les travaux de MM. Gutberlet, Kerry et Tannery dont nous parlerons plus bas. M. Loria a dédié un article (n° 48) à ces théorèmes de la théorie des ensembles qui ont trait à la question de la continuité de l'espace.

Quant aux applications et aux généralisations auxquelles a donné lieu cette théorie, nous nous bornons à en indiquer les plus importantes. M. Dini (n° 4) est peut-être le premier, après M. Cantor lui-même (n° 1), qui ait introduit dans la théorie des fonctions d'une variable réelle la considération des ensembles de points. Ensuite M. Veltmann (n° 16) et Scheeffer (n°s 28, 29) ont appliqué à quelques points de cette même théorie les concepts de M. Cantor; MM. Mittag-Leffler (n°s 13, 24) et Guichard (n° 22) ont pris ces concepts pour base de l'étude des singularités des fonctions analytiques. MM. Ascoli (n° 33) et Arzelà (n° 54) ont tenté d'étendre la théorie des ensembles de points aux ensembles de courbes planes; M. de Paolis (n° 55) en la combinant avec l'*analysis situs*, en a fait le fondement d'une théorie générale des correspondances.

14. L'étude de certaines questions relatives à l'intégrabilité des fonctions a amené du Bois-Reymond à des conceptions très semblables à celles de M. Cantor. Les principes de ses recherches à ce sujet se trouvent exposés dans son ouvrage: *Die allgemeine Functionentheorie* (n° 14); mais comme il n'y a là guère que de simples définitions, et comme en outre la nomenclature y est tout à fait différente de celle de M. Cantor, nous nous abstenons d'en parler davantage.

15. Le concept de nombre transfini possède un si haut

degré de généralité, qu'il semble peut-être étrange qu'on puisse le comprendre sous un concept mathématique encore plus général. Et toutefois il en est vraiment ainsi; le nombre transfini n'est qu'un cas particulier du *type ordonné* (*Ordnungstypus*).

Soit donné (n° 49) un ensemble d'éléments ordonnés en n sens, de façon qu'on sache toujours si l'un de deux éléments quelconques de l'ensemble a rang égal, supérieur ou inférieur, par rapport à l'autre dans chacun de n sens. Si l'on fait abstraction de la nature des éléments de l'ensemble, on obtient le concept de *type ordonné à n dimensions*. On peut donc dire que deux ensembles ordonnés en n sens ont *même type*, lorsqu'on peut faire correspondre leurs éléments, en sorte que les éléments correspondants des deux ensembles soient ordonnés de la même façon dans chacun des n sens.

Les nombres transfinis sont les types des ensembles linéaires bien ordonnés; ils sont donc des types spéciaux à une dimension.

Etant donné un ensemble quelconque E ordonné en n sens, on peut construire dans l'espace à n dimensions un ensemble de points E_1 ayant même type avec E. Il suffit pour cela de faire correspondre à chaque élément A de E un point A_1, de façon que, A, A_1 et B, B_1 étant deux couples quelconques d'éléments correspondants, la ν-ième coordonnée de A_1 soit $\gtreqless$ celle de B_1 suivant que le rang de A dans le ν-ième sens est supérieur, égal ou inférieur à celui de B.

M. Cantor a défini l'addition et la multiplication des types, et a montré que ces opérations ne sont pas commutatives. Il a étudié avec détail les types finis, c. a. d. les types auxquels appartiennent les ensembles finis, et il a résolu par rapport à ces types le problème fondamental de déterminer le nombre de tous les types possibles à n dimensions contenant un même nombre donné m d'éléments.

M. H. Schwarz (n° 51) a traité dans sa dissertation inaugurale diverses questions au sujet des types finis; et l'auteur de cet article (n° 53) a exposé systématiquement les principes de la théorie des types ordonnés en y ajoutant quelques résultats nouveaux.

A la théorie des types ordonnés se rattachent dans le concept — tout en étant antérieures au mémoire de M. Cantor sur cet argument — deux notes de Harnack (n° 35) et de M. Bettazzi (n° 52), ayant pour objet la détermination des ensembles dont aucune partie n'est continue et qui ont même type avec l'ensemble de tous les points de l'intervalle $0 - 1$.

16. Il est bien naturel qu'une théorie, qui se fonde essentiellement sur le concept d'infini, ait ranimé les anciennes discussions philosophiques sur la possibilité et sur la nature des grandeurs infiniment grandes et infiniment petites. M. CANTOR lui-même, dans ses *Grundlagen* (n° 18), a réfuté quelques-unes des objections qui ont été soulevées contre l'infini, en montrant que toutes ces objections contiennent une *petitio principii*, consistant en ceci, qu'on attribue implicitement à l'infini toutes les propriétés du fini. On croit par exemple d'établir que le nombre infini n'est pas possible, en démontrant que, s'il existait, il devrait être au même temps pair et impair, — sans réfléchir qu'on ne peut pas transporter *a priori* ces propriétés des nombres finis au nombre infini, ou tout au moins qu'on ne peut pas affirmer qu'elles soient nécessairement disjonctives pour ce dernier nombre pour cela seulement qu'elles le sont pour le nombre fini.

Parmi les écrits qui s'occupent de la théorie des ensembles au point de vue philosophique nous citerons ceux de MM. GUTBERLET (n° 40), KERRY (n° 42) et TANNERY (n° 43). M. CANTOR est revenu à plusieurs reprises dans de courtes notes (voir n° 45) sur les fondements philosophiques de sa théorie; plus récemment, il a publié dans un travail plus étendu (n° 49) quelques-unes des lettres qu'il a eu occasion d'écrire à divers savants à ce sujet.

17. Nous rappellerons enfin, que M. CANTOR, qui dit d'avoir été animé dans ses recherches sur les ensembles par l'espoir de pouvoir en faire l'application à la physique mathématique et à d'autres sciences, émet l'hypothèse (n° 38) que les monades (atomes) de la matière constituent un ensemble P de la première puissance, et que celles de l'éther constituent un ensemble Q de la deuxième puissance. D'après ce qu'on a dit plus haut, ces deux ensembles se décomposeraient de la façon suivante:

$$P = Pr + Pi_1, \qquad Q = Qr + Qi_1 + Qi_2;$$

et les actions réciproques des 5 ensembles partiels Pr, Pi_1, Qr, Qi_1, Qi_2 donneraient naissance aux différents phénomènes physiques et chimiques.

Liste bibliographique des écrits sur la théorie des ensembles.

1. G. Cantor. Über die Ausdehnung eines Satzes aus des Theorie der trigonometrischen Reihen. Mathem. Ann. **5**, 1872, 123—132. — Traduction française dans les Acta mathem. **2**, 1883, 336—348.

2. G. Cantor. Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen. Journ. für Mathem. **77**, 1874, 258—262. — Traduction française dans les Acta mathem. **2**, 1883, 305—310.

3. G. Cantor. Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. Journ. für Mathem. **84**, 1877, 242—258. — Traduction française dans les Acta mathem. **2**, 1883, 311—328.

4. U. Dini. Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali. Pisa 1878.

5. J. Thomae. Sätze aus der Functionentheorie. Nachr. von der Gesellsch. der Wissensch. zu Göttingen 1878, 466—468.

6. J. Lüroth. Über gegenseitig eindeutige und stetige Abbildung von Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimensionen auf einander. Sitzungsber. d. phys.-med. Societät zu Erlangen **10**, 1878, 190—195.

7. G. Cantor. Über einen Satz aus der Theorie der stetigen Mannigfaltigkeiten. Nachrich. von der Gesellsch. der Wissensch. zu Göttingen 1879, 127—135.

8. G. Cantor. Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. I. Mathem. Ann. **15**, 1879, 1—7. — Traduction française dans les Acta mathem. **2**, 1883, 349—356.

9. E. Netto, Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. Journ. für Mathem. **86**, 1879, 263—268.

10. G. Cantor. Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. II. Mathem. Ann. **17**, 1880, 355—358. — Traduction française dans les Acta mathem. **2**, 1883, 357—360.

11. G. Cantor. Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. III. Mathem. Ann. **20**, 1882, 113—121. — Traduction française dans les Acta mathem. **2**, 1883, 361—371.

12. G. Cantor. Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. IV. Mathem. Ann. **21**, 1882, 51—58. — Traduction française dans les Acta mathem. **2**, 1883, 372—380.

13. G. Mittag-Leffler. Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable. Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **94**, 1882, *passim*.

14. P. du Bois Reymond. Die allgemeine Functionentheorie. I. Tübingen 1882. — Traduction française par G. Milhaud et A. Girot. Paris 1887.

15. W. Veltmann. Über die Anordnung unendlich vieler Singularitäten einer Function. Zeitschr. für Mathem. **27**, 1882, 176—179.

16. W. Veltmann. Die Fourier'sche Reihe. Zeitschr. für Mathem. **27**, 1882, 193—235.

17. W. Veltmann. Zur Theorie der Punktmengen. Zeitschr. für Mathem. **27**, 1882, 313—314.

18. G. Cantor. Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. V. Mathem. Ann. **21**, 1883, 545—591. — Ce mémoire a aussi été publié à part sous le titre: »Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre» (Leipzig 1883). — Un extrait en français en a été inséré dans les Acta mathem. **2**, 1883, 381—408.

19. G. Cantor. Sur divers théorèmes de la théorie des ensembles de points situés dans un espace continu à *n* dimensions. Première communication. Acta mathem. **2**, 1883, 409—414.

20. I. Bendixson. Quelques théorèmes de la théorie des ensembles de points. Acta mathem. **2**, 1883, 415—429.

21. I. Bendixson. Några studier öfver oändliga punktmängder. Öfvers. af vet. akad. förhandlingar (Stockholm) **40**, 1883, n° 2: 31—35.

22. M. Guichard. Théorie des points singuliers essentiels. Annales de l'école normale [de Paris] **12**, 1883, 301—394.

23. G. Cantor. Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. VI. Mathem. Ann. **23**, 1884, 453—488.

24. G. Mittag-Leffler. Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable indépendante. Acta mathem. **4**, 1884, 1—79.

25. G. Cantor. De la puissance des ensembles parfaits de points. Acta mathem. **4**, 1884, 381—392.

26. E. Phragmén. Beweis eines Satzes aus der Mannigfaltigkeitslehre. Acta mathem. **5**, 1884, 47—48.

27. E. Phragmén. En ny sats inom teorien för punktmängder. Öfvers. af vet. akad. förhandlingar **41**, 1884, n°. 1: 121—124.

28. L. Scheeffer. Allgemeine Untersuchungen über Rectification der Curven. Acta mathem. **5**, 1884, 49—82.

29. L. Scheeffer. Zur Theorie der stetigen Functionen einer reellen Veränderlichen. Acta mathem. **5**, 1884, 183—194, 279—296.

30. I. Bendixson. Sur la puissance des ensembles parfaits de points. Bihang till vet. akad. handlingar (Stockholm) **9**, 1884, n° 6.

31. I. Bendixson. Un théorème auxiliaire de la théorie des ensembles. Bihang till vet. akad. handlingar **9**, 1884, n° 7.

32. P. Tannery. Note sur la théorie des ensembles. Bullet. de la soc. mathém. de France **12**, 1884, 90—96.

33. G. Ascoli. Le curve limite di una varietà data di curve. Mem. dell' accad. dei Lincei (Roma) $\mathbf{18}_3$, 1884, 521—586.

34. O. Stolz. Über einen zu einer unendlichen Punktmenge gehörigen Grenzwerth. Mathem. Ann. **23**, 1884, 152—156.

35. A Harnack. Notiz über die Abbildung einer stetigen linearen Mannigfaltigkeit auf eine unstetige. Mathem. Ann. **23**, 1884, 285—288.

36. M. Lerch. Prispevek k nauce o mnozinach bodu v rovine. Sitzungsber. der böhmischen Gesellsch. der Wissensch. (Prag) 1884, 176—178. — Contribution à la théorie des ensembles.

37. E. Phragmén. Über die Begrenzungen von Continua. Acta mathem. **7**, 1885, 43—48.

38. G. Cantor. Über verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punktmengen in einem n-fach ausgedehnten stetigen Raume G_n. Zweite Mittheilung. Acta mathem. **7**, 1885, 105—124.

39. A. Harnack. Über den Inhalt von Punktmengen. Mathem. Ann. **25**, 1885, 241—250.

40. C. Gutberlet. Das Problem des Unendlichen. Zeitschr. für Philosophie und philosophische Kritik (Halle) **88**, 1885, 179—223.

41. F. Meyer. Elemente der Arithmetik und Algebra. Halle 1885.

42. B. Kerry. Über G. Cantor's Mannigfaltigkeitsuntersuchungen. Vierteljahrsschr. für wissensch. Philosophie **9**, 1885, 191—232.

43. P. Tannery. Le concept scientifique du continu: Zénon d'Elée et Georg Cantor. Revue philosophique (Paris) Octobre 1885.

44. G. ENESTRÖM. Om G. Cantors uppsats: Über die verschiedenen Ansichten in Bezug auf die actualunendlichen Zahlen. Öfvers. af vet. akad. förhandlingar **42**, 1885, n° 10: 69—70.

45. G. CANTOR. Über die verschiedenen Ansichten in Bezug auf die actual unendlichen Zahlen. Bihang till vet. akad. handlingar **11**, 1886, n° 19. — Le commencement de cet écrit a été reproduit dans la »Zeitschr. für Philosophie und philosoph. Kritik» **88**, 1886, 224—233, et dans le journal »Natur und Offenbarung» (Münster) **32**, 1886, 46—49. — Un tirage à part de la fin porte le titre: »Zur Frage des actualen Unendlichen».

46. M. LERCH. O soustavách bodu a jich vyznamu v analysi. [Sur les ensembles de points et leurs signification pour l'analyse.] Casopis pro pestov. mathem. (Prag) **15**, 1886, 211.

47. O. BIERMANN. Theorie der analytischen Functionen. Leipzig 1887.

48. G. LORIA. La definizione dello spazio a *n* dimensioni e l'ipotesi di continuità del nostro spazio secondo le ricerche di Giorgio Cantor. Giorn. di matem. **25**, 1887, 97—108.

49. G. CANTOR. Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten. Zeitschr. für Philosophie und philos. Kritik **91**, 1887, 81—125, 252—270; **92**, 1887.

50. K. BECKMAN. Om dimensionsbegreppet och dess betydelse för matematiken. Upsala 1888.

51. H. SCHWARZ. Ein Beitrag zur Theorie der Ordnungstypen. Halle 1888.

52. R. BETTAZZI. Su una corrispondenza fra un gruppo di punti ed un continuo ambedue lineari. Annali di matem. **16**$_2$, 1888, 49—60.

53. G. VIVANTI. Fondamenti della teoria dei tipi ordinati. Annali di matem. **17**$_2$, 1889, 1—35.

54. C. ARZELÀ. Funzioni di linee. Rend. dell' accad. dei Lincei (Roma) **5**$_4$, 1889, 1: 342—348.

55. R. DE PAOLIS. Teoria dei gruppi geometrici e delle corrispondenze che si possono stabilire tra i loro elementi. Mem. della soc. ital. delle scienze (detta dei XL) **3**$_3$, 1890.

56. S. DICKSTEIN. Poiecia i metody matematyki. I. Warszawa 1891.

RECENSIONEN. — ANALYSES.

Le opere di **Galileo Galilei.** Edizione nazionale sotto gli auspicii di sua maestà il re d'Italia. Volumi I, II. Firenze 1890, 1891. 4°, 423 + (2) + 611 + (1) p.

Il y a quatre ans, nous avons rendu compte dans ce journal (voir Biblioth. Mathem. 1888, p. 90) du plan adopté pour la nouvelle édition des oeuvres de Galileo Galilei que le gouvernement italien a chargé M. A. Favaro de rédiger. D'après ce plan, l'édition comprendra 20 volumes dont les neuf premiers seront consacrés aux écrits scientifiques rangés en ordre chronologique. Dans les volumes I et II, parus respectivement en 1890 et en 1891, nous avons donc à chercher les premiers résultats de l'action scientifique de Galilei.

Le volume I contient six écrits, savoir: *Iuvenilia; Theoremata circa centrum gravitatis solidorum; La bilancetta; Tavola delle proporzioni delle gravità in specie de i metalli e delle gioie pesate in aria ed in aqqua; Postille ai libri de sphaera et cylindro di Archimede; De motu.* Le premier écrit, qui se compose de deux commentaires sur la philosophie naturelle d'Aristoteles, est publié ici pour la première fois d'après un autographe (1584) de Galilei, mais comme le fait observer M. Favaro, il n'est pas mis hors de doute que le grand savant florentin en soit l'auteur; en effet, il est très probable qui le manuscrit ne soit qu'une copie faite par Galilei d'après les leçons de quelqu'un de ses professeurs, p. ex. Buonamici. Parmi les autres écrits, le plus grand est celui intitulé *De motu,* qui se compose de plusieurs notes sur la théorie du mouvement; elles ont été rédigées par Galilei vers 1590 et comprendent les germes de plusieurs des découvertes importantes faites plus tard par lui.

Si le volume I renferme principalement des documents servant à faire ressortir la marche des premières recherches scientifiques de Galilei, le volume II offre un intérêt plus direct au point de vue scientifique. Ce volume contient les écrits suivants: 1° *Breve istruzione all' architettura militare;* 2° *Trattato di fortificazione;* 3° *Le mecaniche;* 4° *Lettera a Iacopo Mazzoni;* 5° *Trattato della sfera ovvero cosmografia;* 6° *De motu accelerato;* 7° *Frammenti di lezioni e di studi sulla nuova stella dell' ottobre 1604;* 8° *Consideratione astronomica circa la stella nova dell' anno 1604, di Baldesar Capra, con postille di Galileo;* 9° *Dialogo de Cecco di Ronchitti da Bruzene in perpuosito de la stella nuova;* 10° *Del compasso geometrico e militare;* 11° *Le operazioni del compasso geometrico e militare;* 12° *Usus et fabrica*

circini cuiusdam proportionis, opera et studio Balthesaris Caprae, con postille di Galileo; 13° *Difesa contro alle calunnie ed imposture di Baldessar Capra;* 14° *Le matematiche nell' arte militare.* Parmi ces écrits, les n°s 11 et 13 ont été publiés par GALILEI lui-même en 1606 et 1607; le n° 9 est une brochure parue en 1605 et rédigée probablement par G. SPINELLI sous la direction de GALILEI; les n°s 8 et 12 sont deux ouvrages de CAPRA, qui sont nécessaires pour l'intelligence des n°s 8 et 13. Tous les autres écrits ont été publiés pour la première fois après la mort de GALILEI (n° 3 en 1649, n° 5 en 1656, les autres seulement au 19e siècle) ou sont restés inédits.

Chacun des écrits contenus dans ces deux volumes est précédé par une savante introduction bibliographique et historique. Il faut ajouter aussi que la collation des manuscrits ou des éditions originales a été faite avec la plus grande précision, que les figures sont reproduites avec beaucoup de soin, que la disposition du texte est très heureuse et que l'exécution typographique en général mérite tous les éloges. Par consequent, la nouvelle édition des oeuvres de GALILEI, une fois achevée d'après le plan adopté, sera un monument digne de l'éminent savant et pourra être mise à côté des meilleures éditions des ouvrages de grands mathématiciens parues jusqu'à présent.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von || journal d'histoire des mathématiques publié par G. ENESTRÖM. Stockholm. 8°.

1891: 4. — [Analyse de l'année 1890 (fin):] Fiziko-matem. naouki **10**, 1891, 38—43. (V. V. BOBYNIN.)

Физико-математическія науки въ ихъ настоящемъ и прошедшемъ. Журналъ издаваемый В. В. Бобынинымъ. Москва. 8°.

10 (1891): 2. — Les sciences mathématiques dans leur état actuel et passé. Journal publié par V. V. BOBYNIN.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von M. CANTOR. Leipzig. 8°.

36 (1891): 6.

°**Adam, W.,** Geschichte des Rechnens und des Rechenunterrichts. Quedlinburg 1891.

8°. — [2.40 M.]

Ball, W. W. R., Mathematical recreations and problems of past and present times. London, Macmillan 1892.
8°, XII + 240 p. — [7 sh.]

Ball, W. W. R., Mersennes numbers.
Messenger of mathem. **21**, 1891, 34—40, 121.

Bierens de Haan, D., Bouwstoffen voor de geschiedenis der wis- en natuurkundige wetenschappen in de Nederlanden. XXXII. Proeve eener bibliographie van de geschiedenis der wis- en natuurkundige wetenschappen in de Nederlanden.
Amsterdam, Akademie van wetensch., Verslagen en Mededeel. (Afd. Natuurkunde) $\mathbf{9}_3$, 1891, 4—47.

Birkenmajer, L., Krakowskie tablice syzygijów na r. 1379 i 1380. Przyczynek do dziejów astronomii w polsce XIV wieku.
Krakow, Akad. umiej., Rozprawy **21**, 1891, 259—285. — Tables des syzygies, calculées à Krakow pour les années 1379 et 1380. Contribution à l'histoire de l'astronomie en Pologne au XIV[e] siècle.

Börjesson, G. O., Ur talbeteckningens historia.
Redogörelse för Göteborgs arbetareinstituts verksamhet 1890—91 (Göteborg 1891), 20—26.

°**Breusing, A.**, Die nautischen Instrumente bis zur Erfindung des Spiegelsextanten. Bremen, Silomon 1890.
8°, 46 p. — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **36**, 1891; Hist. Abth. 175. (CANTOR.)

Cajori, F., The study of Diophantine analysis in the United States.
Colorado, College, Studies **2**, 1891, 39—47.

Cajori, F., Historical note on the differentiation of a logarithm.
Colorado, College, Studies **2**, 1891, 96.

Cajori, F., A mathematical error in the Century dictionary.
Colorado, College, Studies **2**, 1891, 97. — Remarque relative aux logarithmes de NEPER.

Del Gaizo, M., Contributo allo studio della vita e delle opere di Giovanni Alfonso Borelli.
Napoli, Accad. Pontaniana, Memorie **20**, 1890, 1—48.

Eisenlohr, A., Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter (Papyrus Rhind des British Museum) übersetzt und erklärt. Zweite Ausgabe. Leipzig 1891.
4°, 2 + 278 p. — [12 M.]

Favaro, A., Nuovi studi Galileiani. Venezia 1891.
4°, 430 p.

Favaro, A., Capitolo inedito e sconosciuto di Galileo Galilei contro gli aristotelici.
Venezia, Istituto Veneto, Atti $\mathbf{3}_7$, 1892, 1—12.

Favaro, A., Di alcuni recenti lavori su Leonardo da Vinci.
Venezia, Istituto Veneto, Atti $\mathbf{3}_7$, 1892, 13—47.

Favaro, A., Cronologia Galileiana raccolta ed ordinata.
Padova, Accad. d. sc., Atti e memorie **8**, 1892. 41 p.

Favaro, A., Serie settima di scampoli Galileiani.
| *Padova,* Accad. d. sc., Atti e memorie **8**, 1892. 41 p.

Galdeano, Z. G. de, Edouard Lucas.
El progreso matem. **1**, 1891, 291. — Nécrologie.

Glaisher, J. W. L., The method of quarter-squares.
Nature (London) **40**, 1889, 573—576. — Notice historique.

Hathaway, A. S., Early history of the potential.
New York, Mathem. soc., Bulletin **1**, 1891, 66—74.

Hentschel, H., Kurzer Abriss einer Geschichte der Physik. Löbau 1891.
8°, 24 p. + 2 pl.

Holst, E., Sophus Lie.
Skilling-Magazin (Kristiania) **57**, 1891, 781—783. — Notice biographique, avec portrait.

Huygens, Chr., Oeuvres complètes publiées par la société hollandaise des sciences. Tome quatrième. Correspondance 1662—1663. La Haye, Nijhoff 1891.
4°, (6) + 587 + (1) p. + 3 pl. — [Analyse des tomes I—III:] Bullet. des sc. mathém. **16**$_{2}$, 1892, 5—30. (P. H. Schoute.)

К., В., Краткій очеркъ исторіи задачи о квадратурѣ круга.
Vjestnik elem. matem. **11**, 1891, 113—125. — Aperçu de l'histoire du problème de la quadrature du cercle.

Kullrich, E., Zur Geschichte des mathematischen Dreikörperproblems. Halle 1891.
8°, 68 p. — [1.80 M.]

Lampe, E., Leopold Kronecker †. Nachruf.
Naturwissenschaftliche Rundschau (Braunschweig) **7**, 1892, 128—129.

Leffler, A. Ch., Sonja Kovalevsky.
Annali di matem. **19**$_{2}$, 1891, 201—211.

Loria, G., Esame di alcune ricerche concernenti l'esistenza di radici nelle equazioni algebriche.
Biblioth. Mathem. 1891, 99—112.

Loria, G., Aggiunte all' articolo »il teorema fondamentale delle equazioni algebriche«.
Rivista di matem. **2**, 1892, 37—38.

Lucas, E., Récréations mathématiques. Tome premier. Deuxième édition. Paris, Gauthier-Villars 1891.
8°, XXIV + 254 p. — [7.50 fr.] — [Analyse:] Mathesis **2**$_{2}$, 1892, 45—46.

Mansion, P. et Neuberg, J., Edouard Lucas. Nécrologie.
Mathesis **1**$_{2}$, 1891, 217.

M[ansion], P. et N[euberg], J., Léopold Kronecker. Nécrologie.
Mathesis **2**$_{2}$, 1892, 18.

M[ansion], P. et N[euberg], J., Louis-Philippe Gilbert. Nécrologie.
Mathesis **2**$_{2}$, 1892, 57.

°**Monchamps, G.,** Galilée et la Belgique. Essai historique sur

les vicissitudes du système de Copernic en Belgique (17e et 18e siècles). Saint-Trond, Moreau 1892.

12°, 346 + 76 p. — [Analyse:] Mathesis 2_2, 1892, 21. (P. M.)

Necrologia. L. Kronecker.

El progreso matem. **2**, 1892, 60.

Ninni, A. P., Sui segni prealfabetici usati anche ora nella numerazione scritta dei pescatori Clodiensi.

Venezia, Istituto, Atti 7_6, 1889, 679—686.

P[eano], G., Sommario del libro X d'Euclide.

Rivista di matem. **2**, 1892, 7—11.

Peano, G., Angelo Genocchi.

Torino, Università, Annuario 1889—1890, 195—202.

Peano, G., Enrico Novarese.

Rivista di matem. **2**, 1892, 35.

Rebière, A., Aperçu de l'histoire des mathématiques.

Bulletin scientifique (Paris) **4**. 1889—90, 276—278.

Reyes y Prósper, V., Christina Ladd Franklin, matemática americana y su influencia en la lógica sinbólica.

El progreso matem. **1**, 1891, 297—300.

Reyes y Prosper, V., Ernesto Schroeder, sus merecimientos ante la Lógica, su propaganda lógico-matemática, sus obras.

El progreso matem. **2**, 1892, 33—36.

Rudio, F., Über die Convergenz einer von Vieta herrührenden eigenthümlichen Productentwickelung.

Zeitschr. für Mathem. **36**, 1891; Hist. Abth. 139—140.

Rudio, F., Über den Antheil der mathematischen Wissenschaften an der Kultur der Renaissance. Hamburg 1892.

8°, 33 p. — [0.50 M.] — Sammlung gemeinverständlicher wissenschaftlicher Vorträge. Neue Folge. Sechste Serie. Heft 142.

°**Schnaase, L.,** Die Optik Alhazens. Stargard 1890.

4°, 20 p.

Siacci, F., Cenni necrologici di Angelo Genocchi.

Torino, Accad. d. sc., Memorie 39_2, 1889, 463—495.

СТАРКОВЪ, А. П., **Къ исторіи алгебраическаго обозначенія въ связи съ развитіемъ азбучной и музыкальной письменности.**

Odessa, Matem. otd. obchtch. estestv., Zapiski **7**, 1886. Appendice. — Starkoff, A. P., Sur l'histoire de la notation algébrique considérée en rapport avec le développement de l'écriture alphabétique et musicale. — L'introduction (p. 1—102) contient des notices sur des ouvrages relatifs à l'histoire des mathématiques. — [Analyse:] Fiziko-matem. naouki **3**. 1887, 19—31, 38—46. (V. Bobynin.)

Steinschneider, M., Miscellen zur Geschichte der Mathematik.

Biblioth. Mathem. 1891, 113—116.

°**Sterner, M.,** Principielle Darstellung des Rechenunterrichtes auf historischer Grundlage. I. Geschichte der Rechenkunst. München 1891.

8°, 12 + 533 p. — [6 M.]

Tannery, P., Les autographes de Descartes. (Continuation.)
Bullet. d. sc. mathém. 15_2, 1891, 228—236, 260—274, 281—296, 301—308; 16_2, 1892, 32—40.

Villicus, F., Die Geschichte der Rechenkunst vom Alterthume bis zum 18. Jahrhundert mit besonderer Rücksicht auf Deutschland und Oesterreich. Zweite vermehrte und verbesserte Auflage. Wien 1891.
8°, 112 p. — [2.80 M.]

Vivanti, G., Sur une classe de grandeurs infiniment petites considérée par Newton.
Biblioth. Mathem. 1891, 97—98.

Question 36 [sur un écrit de HORKY publié en 1610].
Biblioth. Mathem. 1891, 119. (A. FAVARO.)

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Herausgegeben von E. LAMPE. Band 21 (1889). Berlin, Reimer 1892.
8°. — Les pages 1—48 contiennent un compte rendu des ouvrages d'histoire des mathématiques parus en 1889.

APOLLONII PERGAEI quæ græce exstant cum commentariis antiquis. Edidit et latine interpretatus est J. L. HEIBERG. I. Lipsiæ, Teubner 1891. 8°
Bullet. d. sc. mathém. 15_2, 1891, 221—226. (P. TANNERY.)

BRAUNMÜHL, A. v., Christoph Scheiner als Mathematiker, Physiker und Astronom. Bamberg, Buchner 1891. 8°.
Zeitschr. für Mathem. **36**, 1891; Hist. Abth. 175—176. (CANTOR.)

CANTOR, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Zweiter Band. Von 1200—1668. Erster Theil. Leipzig, Teubner 1892. 8°.
Biblioth. Mathem. 1891, 117—118. (G. ENESTRÖM.) — Mathesis 2_2, 1892, 19—20. (P. M.)

GALDEANO, Z. G. DE, Estudios criticos sobre la generación de los conceptos matemáticos. Madrid 1890. 8°.
Mathesis 1_2, 1891, 272—273.

KERBEDZ, E. DE, Sophie de Kowalevski. (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo 1891.)
Jorn. de sc. mathem. **10**, 1891, 78—79. (G. T.)

LORIA, G., Cenni intorno a la vita e le opere di Felice Casorati (Biblioth. Mathem. 1891.)
Jorn. de sc. mathem. **10**, 1891, 76. (G. T.)

Mathematisches Abhandlungsregister. 1890. Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. December.
Zeitschr. für Mathem. **36**, 1891; Hist. Abth. 227—240.

[Listes d'ouvrages récemment publiés.]
Biblioth. Mathem. 1891, 118—119. — Fiziko-matem. naouki **10**, 1891, 49—64. — Zeitschr. für Mathem. **36**, 1891; Hist. Abth. 224—226.

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

37. Dans un très grand nombre de traités d'arithmétique publiés aux 16e et 17e siècles, on trouve une espèce de problèmes d'analyse indéterminée, qui porte le titre *regula coeci* (parfois *ceci* ou *cecis*). D'après M. CANTOR (*Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* II, p. 393), le traité d'arithmétique de RUDOLFF (1526) est le premier livre imprimé, où de tels problèmes ont été proposés; M. CANTOR dérive *coeci* du mot allemand *Zeche* (société de buveurs), parce qu'il s'agit souvent de personnes qui se sont assemblées pour boire. D'autre part, TERQUEM (*Problème des jeunes filles, de l'aveugle etc.;* Bulletin de bibliographie, d'histoire et de biographie mathématiques 1859, p. 1—2) a traduit *regula coeci* par »la règle de l'aveugle», parce qu'il y a un épigramme arithmétique grec qui contient un problème de la même nature et où la résolution du problème est attribuée à l'aveugle HOMEROS. Quelques auteurs croient que *ceci* est le mot italien *zecca* (monnaie) et que, par conséquent, *regula ceci* signifie »la règle des monnaies»; en effet, il s'agit ordinairement de calculer combien d'argent différentes personnes doivent payer.

Quelle est la vraie signification de l'expression *regula coeci*, et quel est le premier auteur qui se soit servi de ce terme?

(G. Eneström.)

Inhalt. — Table des matières.

STOCKHOLM, TRYCKT I CENTRAL-TRYCKERIET, 1892.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK



JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON — PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1892. STOCKHOLM. N° 2.

NEUE FOLGE. 6. — NOUVELLE SÉRIE. 6.

BERLIN. MAYER & MÜLLER. Markgrafenstrasse 51.

Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr.

PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Intorno alla storia del principio di corrispondenza e dei sistemi di curve.

Appunti di CORRADO SEGRE a Torino.[1]

I.

Nella seduta del 27 Giugno 1864 lo CHASLES, esponendo all' Accademia scientifica francese i procedimenti generali con cui egli otteneva le proprietà dei sistemi (semplicemente infiniti) di coniche di date caratteristiche,[2] dimostrava »*una volta per tutte*» — come *lemma* da cui derivano quei procedimenti generali — quello che poi fu chiamato *principio di corrispondenza* (fra i punti di una retta): cioè che in una corrispondenza (α, β) tra i punti di una retta vi sono $\alpha + \beta$ punti uniti. È in base a ciò che si suole attribuire *esclusivamente* allo CHASLES la scoperta di questo principio — fondamentale nella geometria moderna degli enti algebrici (in quanto che costituisce in gran parte dei casi la forma più opportuna sotto cui si può far comparire in questa geometria la nozione di *algebricità,* cioè il teorema fondamentale dell' algebra). Ma così facendo mi pare si commetta sempre un' inesattezza storica: poichè già tre anni prima dello CHASLES il sig. DE JONQUIÈRES, e seguendo il suo esempio il sig. CREMONA, avevano publicate parecchie applicazioni di quel principio.

Alcuni, — tra cui lo stesso CHASLES in qualche punto della polemica che ebbe col JONQUIÈRES negli anni 1866—1867 (polemica che avremo da citare ripetutamente),[3] — vogliono

considerare quel principio come una semplice estensione del »*Principe de correspondance entre deux objets variables, qui peut être d'un grand usage en Géométrie*» enunciato in generale dallo CHASLES il 24 Dicembre 1855.[4] Ma in realtà questo consisteva, com' è noto, nel fatto che una corrispondenza algebrica (1, 1), od (1, 2), tra due forme semplici non è altro che un' omografia tra le forme stesse, ovvero tra l'una forma ed un' involuzione ordinaria dell' altra. Si trattava dunque della *struttura* della corrispondenza; e non del *numero degli elementi uniti,* come nel principio di corrispondenza del 1864. Inoltre nè la detta comunicazione del 1855 nè i successivi lavori publicati dallo CHASLES fino al 1864 lascian capire che questi avesse già vista l'utilità di considerare corrispondenze d'indici superiori a 2, e specialmente di ridurre i problemi geometrici alla ricerca degli elementi uniti di tali corrispondenze: nè vi si trova fatto il passaggio dall' equazione bilineare che rappresenta la corrispondenza (1, 1) alle equazioni di corrispondenze superiori. — D'altronde lo stesso CHASLES, quando nel 1866 alle sue prime osservazioni polemiche volle aggiungere (Comptes rendus etc. **63**, nota alla pag. 821) un reclamo contro l'uso che il JONQUIÈRES poco prima (nelle Note di Saïgon che citeremo più avanti) aveva fatto del metodo delle corrispondenze, senza citarlo, avvertiva: »... j'ai formulé et démontré ce mode de procéder, une fois pour toutes, sous le titre de *Lemme,* dans nos »*Comptes rendus* t. 58 p. 1175, ainsi que je l'avais fait dans »les leçons de la Sorbonne de 1863—1864»; e non aggiunse, come certo avrebbe fatto, ragioni di priorità anteriori a queste.

È stato citato in proposito anche il manoscritto del *Traité des sections coniques* che lo CHASLES comunicò al JONQUIÈRES nei primi mesi del 1859.[5] Ma in quel manoscritto, come nell'opera stampata (1865), i passi a cui quella citazione poteva alludere si riferivano sempre a corrispondenze d'indici 1 o 2.[6]

Del resto il JONQUIÈRES anche prima del 1859 aveva mostrato di essere pienamente nell' ordine d'idee che doveva condurre al principio generale di corrispondenza: nei *Mélanges de géométrie pure* (1856), in cui il Cap. 4° è appunto dedicato a quello che egli chiama *principe de correspondance anharmonique* dato poco prima dallo CHASLES; ed in qualche lavoro successivo.[7] Ma (se non erro) fu solo nel 1861, e precisamente nella Nota intitolata *Théorèmes généraux concernant les courbes géométriques planes d'un ordre quelconque* (Journal de mathém. $\mathbf{6}_2$, 1861, pag. 113), che il JONQUIÈRES introdusse nella scienza l'uso di corrispondenze *d'indici qualunque* fra i punti di una

retta. In quella Nota sono per la prima volta studiate delle proprietà generali delle *serie* (∞^1) di curve piane di dato ordine; ed introdotta la nozione dell' *indice* di una serie (numero delle curve passanti per un punto dato), ne vien dimostrata la grande importanza. Ciò è ben noto, ed è stato più volte ricordato: mentre non si suol rilevare l'altro fatto suddetto. Esso si presenta: nella determinazione dell' ordine, $N(m+n)$, della curva generata da due serie d'indice N e di ordini m, n, in corrispondenza univoca (teor. V della Nota); in quella dell' ordine, $N(m+2n-3)$, del luogo dei punti aventi lo stesso asse armonico rispetto ad una curva fissa d'ordine m e ad una curva di una data serie d'indice N e d'ordine n (teor. VII); infine in quella del numero delle tangenti doppie di una curva piana (teor. XI). Ognuna di queste determinazioni è ridotta a quella del numero dei punti uniti di un' opportuna corrispondenza (α, β) su di una retta, per la quale si assegnano i valori di α, β. Poi, in ciascun caso, si osserva che in conseguenza della corrispondenza le ascisse x, x' dei punti omologhi saran legate da un' equazione della forma $Ax^{\alpha} x'^{\beta} + \ldots = 0$; ed allora ponendo $x = x'$ si trae che vi sono $\alpha + \beta$ punti uniti. Insomma si fa *ogni volta* quello stesso breve ragionamento che tre anni dopo faceva, »*una volta per tutte*», lo CHASLES.

Subito dopo la publicazione della Nota del JONQUIÈRES, il CREMONA nell' *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* (Memorie dell' acc. delle scienze di Bologna **12**$_1$, 1861, p. 305) adottava quel metodo per determinare l'ordine dei luoghi geometrici, cioè di ridursi alla ricerca dei punti uniti di una corrispondenza; e lo applicava, oltre che ai citati teor^i V e VII di JONQUIÈRES (*Introduzione*, n^i 83^8 e 87), alla dimostrazione di altre proposizioni importanti (n^i 98, 106, 116, 117). — Si noti che per trovare il numero dei punti uniti delle corrispondenze che incontra il CREMONA fa una prima volta (n. 83) il ragionamento su riferito; ma poi in seguito, determinati in ciascun caso i valori di α, β, conchiude *senz' altro* il numero $(\alpha + \beta)$ dei punti uniti (limitandosi appena a citare, per le prime volte, il n. 83).

[1] Questo scritto è lo sviluppo di una nota che si trova nella Relazione sulla Memoria del Prof. R. DE PAOLIS: *Le corrispondenze projettive* ecc.; Atti dell' acc. d. sc. di Torino **27**, 1892, pag. 366. — Si confrontino le utili *Notizie storiche sulla Geometria numerativa*, di GINO LORIA; Biblioth. Mathem. 1888, 39—48, 67—80; 1889, 23—27.

[2] Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **58**, 1864, pag. 1167; v. pag. 1175.

[3] In conseguenza indichiamo subito gli scritti in cui essa principalmente si svolse: CHASLES. *Observations relatives à la théorie des systèmes de courbes* (Comptes rendus etc. **63**, 1866 [12 nov^e^], p. 816—821). — JONQUIÈRES. *Observations relatives à la théorie des séries ou systèmes de courbes* (ibid. [19 nov^e^], p. 870—874). — CHASLES. *Observations au sujet de cette communication* (ibid. [19 nov^e^], p. 874—878). — *Addition aux observations présentées dans la dernière séance* etc. (ibid. [26 nov^e^], p. 907—909). — JONQUIÈRES. *Recherches sur les séries ou systèmes de courbes et de surfaces algébriques d'ordre quelconque, suivies d'une réponse à quelques critiques de M. Chasles* (Paris, Gauthier-Villars, 8 Déc. 1866). — CHASLES. *Réponse à une revendication de priorité* (Paris, G.-V. 1867). — JONQUIÈRES. *Documents relatifs à une revendication de priorité* (litograf., Paris, 4 Févr. 1867). — CHASLES. *Réponse aux documents relatifs à une revendication de priorité* (Paris, G.-V. 1867). — JONQUIÈRES. *Lettre à M. Chasles sur une question en litige* (Paris, G.-V., 31 Mai 1867). — V. anche l'accenno che poi ne fece lo CHASLES nella nota a pag. 330—331 del *Rapport sur les progrès de la géométrie* (Paris 1870).

[4] Comptes rendus etc. **41**, 1855, p. 1097. Diciamo »enunciato *in generale*» perchè delle allusioni *particolari* se ne trovano già in lavori precedenti dello CHASLES. Non se ne fa cenno nel *Traité de géométrie supérieure* (1852). Ma ad es° nella Nota *Sur les courbes du 4e et 3e ordre* del 16 ag° 1853 (Comptes rendus etc. **37**, p. 272) si trova (pag. 274) il concetto che l'*univocità* è la proprietà caratteristica dell' omografia tra due fasci di rette; pei parametri λ, λ' di due fasci omografici di coniche avendosi una relazione analitica univoca si osserva che questa non potrà essere che della forma $a\lambda\lambda' + \beta\lambda + \gamma\lambda' + \delta = 0$; ed in nota si aggiunge: »Ce mode de démonstration, qui comporte la rigueur dési- »rable, et qui dispense de tout calcul, pourra être employé »dans beaucoup de questions: il forme, à cet égard, une »des applications les plus utiles de la théorie du rapport »anharmonique».

[5] V. l'allusione dello CHASLES, Comptes rendus etc. **63**, 1866, p. 908, e le parole esplicite nel *Rapport* p. 331. Anche il JONQUIÈRES riconosce l'influenza che sul modo di procedere (mediante corrispondenze) da lui adottato nel 1861

aveva esercitato lo CHASLES sia col *Principe* del 1855 sia col manoscritto del 1859: v. specialmente la *Lettre à M. Chasles* pag. 10.

[6] E neppure — a quanto si può giudicare dall' opera stampata — alla determinazione degli elementi uniti (così a pag. 345 troviamo, è vero, una corrispondenza (2, 2); ma non se ne considerano i punti uniti).

[7] Ad es° in una *Note sur la géométrie organique de* MACLAURIN, Journal de mathém. $\mathbf{2}_2$, 1857, p. 153, nella quale in particolare (a pag. 158) si determina l'ordine di una curva considerando i punti uniti di una speciale corrispondenza (2, 2).

[8] Ove però le due serie sono d'indici *qualunque* M, N.

II.

Alcuni dei risultati contenuti nei *Théorèmes généraux* etc. furono giudicati difettosi dallo CHASLES. I suoi dubbi, a quanto pare, si riferivano principalmente (e per se e per le conseguenze) al teor. II che dà $2(n-1)N$ come numero delle curve di una serie d'ordine n e d'indice N tangenti ad una retta assegnata, ed al teor. V sul citato numero $N(m+n)$: e dipendevano da ciò che le dimostrazioni di JONQUIÈRES eran basate sul grado di un' equazione, e lo CHASLES osservava che questo poteva abbassarsi. Avendo egli comunicato al JONQUIÈRES i suoi dubbi,[9] questi — senza forse riflettervi abbastanza — si affrettò a publicare (febbrajo 1863) delle rettifiche[10] dirette a riguardare i vari numeri assegnati nel suo lavoro come *limiti superiori* (cioè come validi *in generale e al più*) anzi che come valori esatti dei numeri che si volevan determinare. Il CREMONA accolse *provvisoriamente* queste modificazioni[11] e le mise nella traduzione tedesca della sua *Introduzione*[12] là dove riproduce i teoremi di JONQUIÈRES (n^i 83, 85, 87).[13] Ma presto egli si convinse che i dubbi dello CHASLES, almeno in quanto si riferivano al breve ragionamento algebrico con cui il JONQUIÈRES determinava il numero dei punti uniti di una corrispondenza, non sussistevano; ed in una lettera inviata al JONQUIÈRES da Bologna 29 Genn° 1864[14] completava quel ragionamento algebrico notando che dalla considerazione dei valori di x' corrispondenti ad $x=\infty$ segue che nell' equazione $Ax^{\alpha}x'^{\beta}+\ldots=0$ della corrispondenza si può sempre supporre (in generale) che non manchi il termine di grado più alto, sicchè $\alpha+\beta$ sia bene il preciso numero dei punti uniti e non soltanto un limite superiore di esso. Il JONQUIÈRES comunicò subito la lettera del CREMONA allo CHASLES, il quale sul momento non si mostrò

persuaso.[15] Ma poco dopo esponeva il principio di corrispondenza con quella stessa dimostrazione nel suo corso della Sorbonne[16] e nella citata comunicazione del 27 giugno 1864.[17] — Il JONQUIÈRES poi, ritornando (1865) in alcune Note datate da Saïgon[18] sui teoremi dati nel 1861, ed in particolare sui citati teorⁱ II e V, ritirò le rettifiche publicate nel 1863, esponendo di nuovo le dimostrazioni, basate (anche nel teor. II) sul metodo delle corrispondenze, ma completandole con l'osservazione di CREMONA.[19]

[9] Dubbi analoghi sembrano quelli espressi dallo CHASLES il 29 dic^e 1862 (Comptes rendus etc. **55**, pag. 934) nella Relazione sul »grand prix de mathématiques» del 1862 (teoria delle quartiche piane), relativamente alla Memoria n° 1, che poi risultò essere del JONQUIÈRES. Ed ancora otto anni dopo (nella nota a pag. 329 del *Rapport*) egli insisteva sull' inesattezza del numero $2(n-1)N$ di JONQUIÈRES risultante dalla possibilità che alcuni coefficienti dell' equazione relativa si annullino.

[10] JONQUIÈRES, *Note au sujet d'un article publié dans le Journal t. VI* (Journal de mathém. **8**$_2$, 1863, pag. 71). — Lettera al CREMONA, publicata nel Giornale di matem. **1**, 1863, p. 128, e riprodotta nei Nouvelles annales de mathém. **2**$_2$, 1863, p. 204—206.

[11] V. le poche parole che fa seguire alla lettera del JONQUIÈRES nel Giornale di matem. l. c.

[12] CREMONA, *Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven* (Greifswald 1865): v. anche la prefazione del traduttore datata »settembre 1864», dalla quale appare pure che, sebbene il vol. porti la data del 1865, le cose in questione erano già stampate molto tempo prima.

[13] Non però — si noti — nelle sue proprie ulteriori applicazioni del metodo delle corrispondenze.

[14] Questa lettera, invocata ripetutamente dal JONQUIÈRES nella sua polemica (anzitutto in nota a pag. 872 del t. **63** dei Comptes rendus etc., ove a proposito della priorità reclamata dallo CHASLES dice »s'il fallait citer quelqu'un à ce sujet se serait M. CREMONA») fu poi resa pubblica da lui nei *Documents* pag. 14—16.

[15] JONQUIÈRES, *Documents* pag. 16; *Lettre à M. Chasles* p. 11.

[16] CHASLES, *Réponse aux documents* p. 15.

[17] Anche, per esempio, nel passo già citato del *Traité des sections coniques* p. 345 si trova l'osservazione relativa all' esi-

stenza del termine di grado più alto nell' equazione della corrispondenza. Essa però non era nel manoscritto dato nel 1859 al Jonquières, come questi rileva (*Documents* p. 10; *Lettre* p. 12).

[18] Jonquières, *Note sur les systèmes de courbes et de surfaces, et sur certaines formules qui s'y rattachent* (14 nov^e 1865; Journal de mathém. $\mathbf{10}_2$, 1865, p. 412). — *Deuxième Note sur les séries ou systèmes de courbes et de surfaces* (8 déc. 1865). — *Théorèmes fondamentaux sur les séries de courbes et de surfaces d'ordre quelconque* (15 déc. 1865; Giornale di matem. **4**, 1866, p. 45).

[19] Però il nome di Cremona su quest' argomento non compare publicamente che più tardi: v. la nota [14].

III.

Gli appunti che lo Chasles faceva al lavoro di Jonquières del 1861 gli servirono poi di base nelle pagine polemiche del 1866—1867 per rigettare il rimprovero di nòn averlo citato nel 1864 nelle sue celebri Note intorno ai sistemi di coniche. Ora si può ben dire che in ciò l'illustre scrittore dell' *Aperçu historique* aveva torto.[20] Poichè, ad onta delle inesattezze od imperfezioni che vi si trovano,[21] quel lavoro ebbe indubbiamente una notevole influenza sulla scienza, alla quale dava non solo dei teoremi, ma dei concetti e dei metodi nuovi; e varie proposizioni importanti *sui sistemi di coniche* esposte dallo Chasles nel 1864[22] non sono che un *perfezionamento* — grazie all' introduzione fatta da Chasles del *secondo* indice o caratteristica — di cose già date dal Jonquières *per sistemi d'ordine qualunque* nel 1861.[23] Chè se poi si riguarda alle critiche speciali fatte dallo Chasles, di esse (dopo qualche esitazione) potè giustamente scagionarsi il Jonquières (prima ancora che nascesse il litigio, e cioè nelle note di Saïgon) osservando che i numeri incriminati, come il già citato $2(n-1)N$, sono da modificare solo quando si vogliano sottrarre da essi le *soluzioni singolari* che possono comparire e che effettivamente nel determinarli non furono escluse.[24] Ed il Jonquières diede alcune condizioni sotto cui, almeno per certi sistemi, tali soluzioni singolari non si presentano generalmente.[25]

Queste ultime considerazioni valgono anche per il teorema dato dal Bischoff nel 1858,[26] secondo cui il numero delle curve d'ordine n determinate dal passare per dati punti e dal toccare curve date di ordini $m_1, m_2, \ldots$ sarebbe il prodotto $\prod m(m+2n-3)$:[27] teorema che è ridimostrato (come teor. IX)

fra i *Théorèmes généraux* del 1861 di JONQUIÈRES.[28] Quella formola può venir ad esigere riduzioni per l'esistenza di *curve singolari* che soddisfano al problema. Ciò appunto accade, almeno in gran parte dei casi, quando $n=2$ cioè le curve cercate sono coniche: il che spiega[29] come il numero $6^5=7776$ che il BISCHOFF trae dalla sua formola per le coniche tangenti a 5 coniche date sia errato.

Riguardo però a questo numero 6^5 per le coniche tangenti a 5 date è bene ricordare che esso era già stato dato fin dal 1847 dallo STEINER,[30] il quale accennava che il suo procedimento era graduale e consisteva nel determinare anzitutto le coniche (6) passanti per 4 punti e tangenti ad una conica, poi quelle (6^2) per 3 punti e tangenti a 2 coniche, e così via, fino al numero cercato (6^5). Da queste indicazioni appare l'analogia col metodo, pure graduale, usato poi nel 1861 dal JONQUIÈRES per ottenere la formola di BISCHOFF.[31] E può darsi che l'analogia vi fosse pure in ciò: che anche lo STEINER si valesse del principio di corrispondenza [applicandolo probabilmente a corrispondenze $(3, 3), (3 \cdot 6, 3 \cdot 6), \ldots, (3 \cdot 6^4, 3 \cdot 6^4)$ che successivamente si vengono ad avere sulla 1ª, 2ª, .., 5ª conica introdotta fra i dati], e che appunto nell' uso di questo consistesse quell' »*eine gewisse geometrische Betrachtung*« con cui credeva di aver risolto il problema. — Che lo STEINER in quegli anni fosse già in possesso del metodo di ricerca che deriva dal principio di corrispondenza è reso probabile da parecchie delle cose da lui publicate senza dimostrazioni: e varrebbe la pena di fare un' analisi critica minuta di tutti gli enunciati di lui per approfondire tale questione.[32]

[30] Ed ancora ingiusto fu nel giudicare i *Théorèmes généraux* a pag. 328—331 del *Rapport*, ove il suo scopo sembra rivolto ad annullarne completamente il valore.

[31] Si noti che, mentre lo CHASLES insiste a ritener errate delle cose che in sostanza non son tali, egli non rileva ad es° che nelle dimostrazioni dei teor^i^ V e X si trattano come riduttibili delle corrispondenze le quali invece *non* si spezzano in generale; e, quel che è più, considera quasi come privo d'importanza *perchè evidente* (nel 1866! v. Comptes rendus etc. **63**, p. 818; ecc.) il Lemma di cui qualche volta si valse il JONQUIÈRES secondo cui le curve di una serie d'ordine n e d'indice N possono essere rappresentate da un' equazione ordinaria di grado n i cui coefficienti son funzioni intere e di grado N di un parametro λ! Questa proposi-

zione è evidentemente errata quando la serie non è *razionale.* Come la si possa modificare in tal caso (cioè rappresentando con un' equazione non una curva sola ma un *gruppo* di curve della serie) fu notato nel 1863 dal Battaglini (*Sulle serie di curve d'indice qualunque;* Rendic[i] dell' acc. delle scienze di Napoli, **2**, 1863, p. 149; tradotto in tedesco nell' Archiv der Mathem. und Phys. **41**, 1863, p. 26): ma ancora nelle Note di Saïgon del 1865 il Jonquières credette di poterla dimostrare; e fu solo nel 1866 che ne riconobbe l'inesattezza. Cfr. nei Nouv. annales de mathém. t. 7_2, 1868, p. 111 la *Réponse à une observation présentée dans le Giornale di matematiche* t. V. (1867) p. 377. L'osservazione che qui è fatta dall' Ascoli, »*Sopra un teorema di* Jonquières» mostra l'inesattezza del Lemma suddetto applicandolo alle rette di un inviluppo di classe N (ma esigerebbe a sua volta una lievissima correzione). V. anche intorno alla stessa questione: Cayley, *On the curves wich satisfy given conditions,* Philosophical transactions **158**, 1867, p. 75 (ivi e a pag. 124).

[22] Così, nella dichiarazione relativa al Jonquières della quale faremo cenno tra poco [nota [30]], lo Chasles intorno all' applicazione del proprio metodo ai problemi di contatto dice: »cette application repose sur une propriété des courbes »d'ordre quelconque (théor. XI) qui n'était point connue». Invece questo teor. XI di Chasles (Comptes rendus etc. **58**, 1864, p. 300) non era altro che il già citato teor. VII di Jonquières applicato ad una serie di coniche e reso più preciso col farvi comparire *entrambe* le caratteristiche di questa.

[23] Questo modo di giudicare il lavoro del Jonquières, specialmente in confronto a quelli posteriori dello Chasles, si trova già ad es° nella Memoria di Cayley testè citata e sul principio di quella di Halphen: *Sur les caractéristiques des systèmes de coniques et de surfaces du second ordre* (Journ. de l'éc. polyt. **28** (cahier 45), 1878, p. 27).

[24] Il merito di aver messo in piena luce l'influenza delle *soluzioni singolari* spetta, come osservava il Jonquières, ai lavori di Chasles del 1864. Però si cfr. anche la nota [29].

[25] Queste condizioni consistono nell' esservi un numero sufficiente (superiore cioè ad un limite assegnato) di punti fissi pei quali debban passare le curve del sistema. V.: la 3ª Nota di Saïgon (*Théorèmes fondamentaux* etc.); quella *Sur la détermination des valeurs des caractéristiques dans les séries ou systèmes élémentaires de courbes et de surfaces,* Comptes

Rendus etc. **63**, 1866, p. 793 (contenente un richiamo sulla priorità del lavoro del 1861 nell' introduzione della 1ª caratteristica, richiamo a cui fecero seguito le già citate *Observations* dello CHASLES a pag. 816 che segnano il principio della polemica); il *Mémoire sur les contacts multiples d'ordre quelconque des courbes de degré r, qui satisfont à des conditions données, avec une courbe fixe du degré m,* etc.; Journal für Mathem. **66**, 1866, p. 289; le *Recherches sur les séries* etc. già citate.

[26] BISCHOFF, *Einige Sätze über die Tangenten algebraischer Curven;* Journal für Mathem. **56**, 1859, p. 166: v. pag. 172.

[27] Per giungere a ciò il BISCHOFF osserva che in un fascio di curve d'ordine n sono $m(m+2n-3)$ quelle tangenti ad una data curva d'ordine m: sicchè quello sarà pure il grado della condizione di contatto fra due curve di ordini n, m nei coefficienti della prima. Da ciò poi scaturisce quella formola in modo evidente. Ora non è forse senza interesse notare che la detta osservazione relativa al fascio di curve si trovava già fra le *Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Curven* dello STEINER (Monatsber. der Akad. der Wissensch. zu Berlin 1848; Journal für Mathem. **47**, 1854, p. 1).

[28] A questo fine il JONQUIÈRES dal teor. VII già citato deduce (teor. VIII) che le curve di una serie d'ordine n e d'indice N tangenti ad una data curva d'ordine m sono $Nm(m+2n-3)$. E poi, gradatamente, con l'applicazione successiva di questa formola a serie definite da punti fissi e da 0, 1, 2, ... curve tangenti date, ottiene quella di BISCHOFF.

[29] Questa spiegazione fu data e sviluppata dal CREMONA in due articoli *Sulla teoria delle coniche,* il primo dei quali, publicato nel 1863 (Annali di matem. **5**, p. 330; Giornale di matem. **1**, p. 225), riguarda le coniche determinate da punti e tangenti; il secondo, in data del 21 febbr° 1864, (Giornale di matem. **2**, p. 17) dimostra i teoremi enunciati pochi giorni prima dallo CHASLES (Comptes rendus etc., 1° febbr° 1864) sulle coniche determinate dal toccare curve date; entrambi mostrano nelle riduzioni prodotte dalle coniche singolari »l'origine dell' apparente contraddizione che s'incontra nell' applicare la teoria generale delle curve piane (e particolarmente i teoremi di JONQUIÈRES) alle coniche e il disaccordo fra quei teoremi di CHASLES e la formola di BISCHOFF«. (V. anche la traduzione nella *Einleitung* n. 111 bis.)

Il JONQUIÈRES nel § XI della Nota del 1861 aveva ben rilevato che quella formola, quando si applica alle coniche determinate da punti e tangenti (in numero > 2), dà un risultato superiore al vero; ma spiegava male il fatto ammettendo che in quei casi delle soluzioni venissero a *coincidere fra loro* (questo apprezzamento ritirò poi nel 1863 nella lettera al CREMONA citata [10]).

[30] STEINER, *Elementare Lösung einer geometrischen Aufgabe, und über einige damit in Beziehung stehende Eigenschaften der Kegelschnitte,* Journal für Mathem. **37**, 1848, p. 161: v. pag. 189.

[31] Cfr. la nota [28]. I procedimenti graduali di questa natura s'incontrano ripetutamente in Geometria: un esempio antico è dato dal teorema di MAC LAURIN sui poligoni circoscritti ad un dato e coi vertici su curve date d'ordini qualunque (le quali curve nella dimostrazione s'introducono successivamente al posto di rette che prima si hanno); un esempio recente si ha nel metodo con cui lo CHASLES (1864) determina le coniche soddisfacienti a cinque condizioni qualunque.

[32] Da una tale analisi risulterebbe probabilmente che nelle sue ricerche di geometria enumerativa lo STEINER si valeva anche di qualche altro strumento che ora si suol adoperare: ad es° del metodo della *conservazione del numero* (secondo la denominazione del sig. SCHUBERT). Così nel citato lavoro del Journ. für Mathem. **37**, a pag. 188 e nella nota a pag. 189 vi è qualche indizio che il grande geometra s'avvicinasse a concepire quel procedimento semplicissimo che consiste nel sostituire alle cinque coniche date altrettante coppie di rette o di punti: procedimento che poi fu adoperato dal suo discepolo TH. BERNER a pag. 13—14 della dissertazione: *De transformatione secundi ordinis ad figuras geometricas adhibita* (Berolini 1865).

IV.

I numeri esatti relativi alle coniche tangenti a curve date d'ordini qualunque — ed in particolare il vero numero (3264) di coniche tangenti a cinque coniche date — furono, com' è noto, *publicati* per la prima volta dallo CHASLES il 1° Febbr° 1864.[33] Questi cominciava la sua comunicazione coll'osservare che quei numeri non erano ancora stati assegnati esattamente, neppure nei casi più semplici in cui alcune delle curve date sono coniche e le altre rette. Orbene già vari anni prima il JONQUIÈRES aveva trovato quegli stessi numeri publicati dallo CHASLES e li aveva comunicati a questo con una lettera

datata dal 17 Febbr° 1859. Il metodo che gli aveva servito consisteva nel sostituire, con opportune precauzioni, alle curve date delle curve d'ordine m con $\frac{m(m-1)}{2}$ punti doppi, cioè dei gruppi di rette.[34] Anche allora lo CHASLES gli aveva risposto respingendo ripetutamente questo modo di procedere: in conseguenza di ciò,[35] ed anche[36] in causa del disaccordo in cui le sue formole si trovavano con quelle di STEINER e di BISCHOFF, il JONQUIÈRES le abbandonò, mentre esse sarebbero state degnissime di publicazione.[37] Ma quando poi nel 1864 egli lesse la detta comunicazione dello CHASLES e l'asserzione con cui comincia e che abbiamo accennata intorno alla quasi completa novità dei suoi risultati, il JONQUIÈRES scrisse immediatamente allo CHASLES per ricordargli la lettera di cinque anni avanti: e da ciò ebbe origine[38] una nota inserita dallo CHASLES alla fine della comunicazione del 15 Febbr° 1864,[39] nota in cui si fa cenno della citata lettera di JONQUIÈRES.

[33] CHASLES, *Détermination du nombre des sections coniques qui doivent toucher cinq courbes données d'ordre quelconque, ou satisfaire à diverses autres conditions* (Comptes rendus etc. **58**, 1864, p. 222).

[34] JONQUIÈRES, *Lettre à M. Chasles* p. 8. — Si trattava dunque del già nominato metodo della *conservazione del numero*, del quale lo stesso JONQUIÈRES fece pure applicazione in altri importanti e ben noti lavori. Per questo lato sembra che nella storia della geometria enumerativa il JONQUIÈRES si possa riguardare come il più prossimo continuatore dell' opera di PONCELET in Francia.

[35] Loc. cit.

[36] Cfr. la nota a p. 315 del *Mémoire* già citato del Journal für Mathem. **66**.

[37] Ciò spiega come basandosi su altri metodi — che potevano allora sembrare più rigorosi, ma che lasciavano entrare le soluzioni singolari — egli desse poi, qualche anno dopo, dei numeri non più esatti (od almeno includenti le soluzioni singolari), come il numero 7776 per le coniche tangenti a cinque date. V. i *Théorèmes généraux* etc.; ed anche i *Théorèmes concernant les courbes géométriques planes* (Nouv. ann. de mathém. **20**, p. 83), pure del 1861; e la nota del 1863 del Journal de mathém. **8** [v. [10]] nella quale pur rettificando in generale la formola di BISCHOFF si conferma però il risultato particolare 7776.

[38] JONQUIÈRES, *Lettre à M. Chasles* p. 7—8. — Pare anche (ivi p. 9) che da questo momento dati la freddezza dello CHASLES verso il JONQUIÈRES, la quale due anni dopo doveva mutarsi in aperto litigio.

[39] CHASLES, *Construction des coniques qui satisfont à cinq conditions* etc., Comptes rendus etc. **58**, 1864, p. 297. La nota si trova a pag. 308 e si esprime così: »M. DE JONQUIÈRES était parvenu, il y a longtemps, à ces formules de »contact, qu'il m'a communiquées le 17 février 1859. Je »ne m'étais point occupé alors de ces questions, et ma réponse, sans infirmer ni justifier les formules, fut simplement qu'elles n'étaient pas démontrées. C'était en effet »par des inductions, soit théoriques, soit pratiques et numériques, que le savant géomètre y était conduit. Plus »tard, à défaut de démonstration, il douta de leur exactitude, ...».

V.

Nel 1866 (Comptes rendus etc. **62** e **63**) i due illustri geometri francesi s'incontrarono di nuovo nelle loro ricerche. Lo CHASLES publicò due note sulle curve unicursali[40] nelle quali, oltre a costruire delle curve siffatte di ogni ordine ed a risolvere mediante il principio di corrispondenza fra i punti di una curva unicursale vari problemi relativi alle coniche aventi diversi contatti con questa curva, accennava alla possibilità di dedurre le proprietà connesse con le curve generali da quelle relative alle curve unicursali, e prometteva dei risultati molto più generali.[41] Ora quel concetto, di sostituire cioè ad una curva qualunque d'ordine m una dotata di $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ punti doppi, era simile a quello ricordato dianzi di cui si serviva nel 1859 il JONQUIÈRES[42] (cioè un' analoga applicazione del principio della conservazione del numero): sicchè questi, soddisfatto, secondo scrive,[43] di vedere lo CHASLES convertito alle sue antiche idee, si affrettò a riprendere quella via che egli stesso aveva aperta e poi abbandonata, senz' aspettare i risultati ignoti promessi dallo CHASLES. E tosto presentava all' Accademia tre note[44] in cui enunciava il numero delle curve di un sistema qualunque aventi rispettivamente uno, due, od un numero qualunque di contatti di dati ordini con una curva data qualsiasi; e nel *Mémoire sur les contacts multiples* etc. già citato [nota [25]] del Journal für Mathematik **66** (1866) dimostrava completamente ed in generale quella sua importante formola

con due metodi consistenti risp. nel sostituire alla curva data una curva unicursale oppure un gruppo di rette. —

Alla fine della sua 3ª Nota (Comptes rendus t. **63**, p. 525) il JONQUIÈRES, rilevando l'utilità delle curve unicursali, e pur accennando alla costruzione di tali curve data poco prima dallo CHASLES [nota [40]], citava un suo lavoro del 1864[45] in cui si considerano delle curve d'ordine m con un punto $(m-1)$-plo e delle divisioni omografiche su di esse. Come contrapposto a ciò lo CHASLES rilevò[46] che fin dal 1861[47] egli aveva considerato certe curve unicursali e su esse delle involuzioni di grado qualunque. E quando poco dopo il dissidio tra i due geometri si palesò nelle note polemiche, la questione della priorità nell' uso delle curve unicursali comparve a più riprese; ma anche su ciò, se pur vi fosse luogo a parlare di priorità, le date parlerebbero in favore del JONQUIÈRES, poichè il nominato lavoro del 1864 non era che un estratto di quella Memoria del 1859 (su certe curve sghembe, e sulle trasformazioni geometriche delle figure piane — ora note appunto sotto il nome di JONQUIÈRES) di cui si trova già un cenno a p. 542 del t. **49** (1859) dei Comptes rendus etc., e per la quale lo CHASLES era commissario. — Però, a questo riguardo, come riguardo agli altri argomenti discorsi nella presente noterella, anzi che trarre delle conclusioni di priorità il cui interesse per la scienza è sempre scarso, o dar troppo peso a qualche debolezza ed agli errori di grandi scienziati, è meglio rilevare le nuove conferme di quel fatto che continuamente si presenta nella storia della matematica: che alla conoscenza completa, generale, dell' ente o del risultato esatto si è giunti non in un sol tratto e per opera di un solo, ma per opera alternata o simultanea di vari, passando per più gradi sì di generalità che di rigore!

[40] CHASLES, *Sur les courbes dont les points se peuvent déterminer individuellement* etc. (Comptes rendus etc. **62**, 1866 [12 mars], p. 579). — *Sur les courbes à points multiples, dont tous les points se peuvent déterminer individuellement* etc. (ibid. [25 juin], p. 1354).

[41] Ivi, pag. 581: »... Des propriétés qu'on démontre ainsi »(cioè col principio di corrispondenza) pour les courbes »douées du nombre maximum de points doubles, se peuvent »conclure celles des courbes dépourvues de points doubles. »La question est de reconnaître dans chaque cas la modi»fication causée par les points doubles: on remonte ainsi

»de la propriété trouvée pour une courbe à points doubles, »à l'expression de cette propriété dans une courbe pure. — »Cette théorie paraît donc offrir un élément de démonstration »qui pourra être très-utile». — E a pag. 1364: »... Nous »appliquerons la méthode à d'autres exemples de contacts »multiples, et de contacts d'ordre supérieur, et à diverses »questions d'un genre différent. ... — Nous aurons à dire »aussi comment les théorèmes démontrés par cette méthode »se généralisent et s'appliquent aux courbes de classe et »d'ordre quelconque.»

[42] E col quale era pure giunto, ad esempio, per le coniche passanti per 2, 1, 0 punti e tangenti ad una data curva in 3, 4, 5 punti, ai numeri enunciati nella Nota *Du contact des courbes planes, et en particulier des contacts multiples des sections coniques avec une même courbe d'ordre quelconque* (Nouv. ann. des mathém. **3**$_2$, 1864, p. 218).

[43] *Lettre à M. Chasles* p. 8—9.

[44] Jonquières, *Détermination du nombre des courbes d'ordre r qui ont un contact d'ordre n avec une courbe donnée d'ordre m, et qui satisfont en outre* etc. (Comptes rendus etc. **63**, 1866 [3 sept^e], p. 423). — Idem, *deux contacts, l'un d'ordre n, l'autre d'ordre n'* (ibid. [17 sept^e], p. 485). — Idem, *autant de contacts d'ordre quelconque qu'on le voudra* (ibid. [24 sept^e], p. 522).

[45] Jonquières, *De la transformation géométrique des figures planes* etc. Nouv. ann. de mathém. **3**$_2$, 1864, p. 97.

[46] Chasles, *Remarques sur les questions de contact de courbes d'ordre quelconque avec une courbe donnée dont les points se déterminent individuellement* (Comptes rendus etc. **63**, 1866 [22 octobre], p. 670); le quali fanno seguito ad una Nota del Cayley (ibid. p. 666) destinata a dimostrare le due prime formole di Jonquières.

[47] Chasles, *Description des courbes à double courbure de tous les ordres sur les surfaces réglées du 3e et du 4e ordre* (Comptes rendus etc. **53**, 1861, p. 884).

Sur les découvertes mathématiques de Wronski.

Par S. Dickstein à Warszawa.

Je n'ai point l'intention d'écrire une biographie scientifique, ni une analyse des travaux de Hoëné-Wronski.[1] En effet, mon but est plus modeste: je ne veux que rappeler l'attention sur quelques-unes de ses idées et de ses méthodes souvent ignorées, en jetant un coup d'oeil rapide sur leurs rapports avec celles indiquées par d'autres mathématiciens.

Wronski a exposé ses idées dans des nombreux ouvrages, fruit de son esprit puissant et de son activité scientifique extraordinaire dans presque tous les domaines du savoir humain. Les ouvrages imprimés sont devenus très rares, ses manuscrits sont restés inexplorés jusqu'à ce jour.[2] Pour cette raison, l'éminent penseur et savant est resté longtemps ignoré, bien que les travaux de Montferrier,[3] de Hanegraeff, de Villarceau, de Ch. Lagrange et de West[4] contiennent l'exposition de plusieurs méthodes proposées par lui.

Voici les ouvrages où Wronski a présenté ses vues philosophiques et ses principales méthodes en mathématiques.

1. Introduction à la philosophie des mathématiques (1811).
2. Résolution générale des équations, dédiée à la Pologne (1812).
3. Réfutation de la Théorie des fonctions analytiques de Lagrange (1812).
4. Philosophie de l'infini (1814).
5. Philosophie de la Technie algorithmique. 1re Section, contenant la loi suprême des mathématiques (1815).
6. Philosophie de la Technie algorithmique. 2e Section, contenant les lois des séries comme préparation à la Réforme des mathématiques (1816, 1817).
7. Critique de la Théorie des fonctions génératrices de Laplace contenant, pour le cas fondamental, l'intégration générale des équations aux différences et aux différentielles totales et partielles de tous les ordres (1819).
8. Introduction to a course of mathematics (1821).[5]
9. Canons de logarithmes avec un supplément donnant la résolution générale de l'équation du cinquième degré (1827).[6]
10. Loi téléologique du hasard comme base de la réforme du calcul des probabilités.[7]

11. Réforme des mathématiques, formant le Tome I de la »Réforme du savoir humain» (1847).
12. Résolution générale et définitive des équations algébriques de tous les degrés, formant le Tome III de la »Réforme du savoir humain» (1848).

1. Sommes combinatoires. Fonctions "schins".

Aux sommes combinatoires ou aux fonctions »schins» appartient une place dans l'histoire des déterminants.[8] WRONSKI les a employées déjà avant CAUCHY[9] dans le mémoire: *Premier principe des méthodes algorithmiques comme base de la Technie algorithmique* présenté en 1810 à l'Institut de France. Ce mémoire ne fut pas publié, mais dans la *Réfutation de la Théorie des fonctions analytiques* publiée deux ans après, WRONSKI a consacré quelques pages à la définition des sommes combinatoires. Soient $X_1, X_2, X_3, \ldots$, dit il, plusieurs fonctions d'une quantité variable. Nommons somme combinatoire et désignons par la lettre hébraique *sin* de la manière que voici

$$\text{ש}[\Delta^a X_1 \,.\, \Delta^b X_2 \,.\, \Delta^c X_3 \ldots \Delta^p X_\omega]$$

la somme des produits des différences de ces fonctions composées de la maniere suivante: Formez avec les exposants $a, b, c, \ldots, p$ des différences dont il est question toutes les permutations possibles, attribuez ces exposants dans chaque ordre de leurs permutations aux différences consécutives qui composent le produit $\Delta X_1 \,.\, \Delta X_2 \ldots \Delta X_\omega$, donnez de plus aux produits séparés, formés de cette manière, le signe positif lorsque le nombre des variations des exposants a, b, c, etc. considerés dans leur ordre alphabétique est nul ou pair, et le signe négatif lorsque ce nombre de variations est impair; enfin prenez la somme de tous ces produits séparés. Vous aurez ainsi par exemple

$$\begin{aligned}
\text{ש}[\Delta^a X_1] &= \Delta^a X_1 \\
\text{ש}[\Delta^a X_1\, \Delta^b X_2] &= \Delta^a X_1\, \Delta^b X_2 - \Delta^b X_1\, \Delta^a X_2 \\
\text{ש}[\Delta^a X_1\, \Delta^b X_2\, \Delta^c X_3] &= \Delta^a X_1\, \Delta^b X_2\, \Delta^c X_3 - \Delta^a X_1\, \Delta^c X_2\, \Delta^b X_3 \\
&\quad + \Delta^b X_1\, \Delta^c X_2\, \Delta^a X_3 - \Delta^b X_1\, \Delta^a X_2\, \Delta^c X_3 \\
&\quad + \Delta^c X_1\, \Delta^a X_2\, \Delta^b X_3 - \Delta^c X_1\, \Delta^b X_2\, \Delta^a X_3 .
\end{aligned}$$

WRONSKI ajoute lui-même que la formation de ces sommes combinatoires est analogue à celle de valeurs inconnues données

par les équations linéaires du premier ordre et qu'elles peuvent être exprimées de différentes manières, entre autres, suivant les procédés indiqués par LAPLACE dans son *Mémoire sur le calcul intégral et sur le système de monde* (Mémoires de l'académie des sciences de Paris 1772).

Dans la *Technie algorithmique* (I, p. 167 et suiv.) WRONSKI donne des formules récurrentes pour la formation des fonctions »schins».

Le concept des sommes combinatoires de WRONSKI n'était pas donc tout à fait nouveau, mais l'idée d'y introduire les différences ou les différentielles des fonctions et d'appliquer cet algorithme à la théorie du développement des fonctions lui appartient sans doute. Dans nos temps CHRISTOFFEL, FROBENIUS et PASCH ont introduit dans l'analyse le même algorithme.[10]

MUIR a proposé pour les fonctions »schins» la dénomination »wronskiens», qui semble être acceptée par les mathématiciens.[11]

En prenant pour la forme générale des séries

$$Fx = A_0 + A_1 \varphi x + A_2 \varphi x^{2/\xi} + A_3 \varphi x^{3/\xi} + \ldots$$

où ξ est un accroissement arbitraire et φx, $\varphi x^{2/\xi}$, $\varphi x^{3/\xi}$, ... sont les facultés successives, WRONSKI (*Réfutation* etc. p. 157) exprime le coefficient A_μ du développement par la formule

$$A_\mu = \frac{\text{ש}[\Delta^a \varphi x \, \Delta^b \varphi x^{2/\xi} \, \Delta^c \varphi x^{3/\xi} \ldots \Delta^l \varphi x^{\mu-1/\xi} \, \Delta^m Fx]}{\text{ש}[\Delta^a \varphi x \, \Delta^b \varphi x^{2/\xi} \, \Delta^c \varphi x^{3/\xi} \ldots \Delta^l \varphi x^{\mu-1/\xi} \, \Delta^m \varphi x^{\mu/\xi}]}$$

en ayant soin d'égaler à ξ l'accroissement dont dépendent les différences Δ et en donnant aux exposants $a, b, c, \ldots$ de ces différences les valeurs $a=1$, $b=2$, $c=3$, ..., $l=\mu-1$, $m=\mu$ et à la variable x une valeur telle que $\varphi x = 0$. Les différences peuvent être remplacées par des différentielles.

Ce développement général est cependant un cas particulier d'un développement que WRONSKI nomme »loi algorithmique absolue» ou »loi suprême». Les coefficients du développement donnés par la loi suprême, s'expriment aussi par les fonctions »schins». Nous parlerons plus tard de cette loi et des méthodes basées sur elle.

Voici les formules données par WRONSKI pour la résolution d'un système infini d'équations linéaires (*Critique de la théorie des fonctions génératrices,* p. 128, 129, *Réforme du savoir* I, p. 317 et suiv.).

Soit donné le système suivant d'équations linéaires

$$M_0 = X_0 + X_1 A(1)_1 + X_2 A(2)_2 + X_3 A(3)_3 + \dots$$
$$M_1 = X_1 + X_2 A(2)_1 + X_3 A(3)_2 + X_4 A(4)_3 + \dots$$
$$M_2 = X_2 + X_3 A(3)_1 + X_4 A(4)_2 + X_5 A(5)_3 + \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

où $X_0, X_1, X_2, \dots$ constituent un nombre infini d'inconnues et les quantités dénotées par M et A sont des quantités connues ou données. Formant avec les dernières de ces quantités le nouveau système de quantités:

$$B(\mu)_1 = -A(\mu+1)_1$$
$$B(\mu)_2 = -A(\mu+2)_2 - A(\mu+2)_1 B(\mu)_1$$
$$B(\mu)_3 = -A(\mu+3)_3 - A(\mu+3)_2 B(\mu)_1 - A(\mu+3)_1 B(\mu)_2$$

et généralement

$$B(\mu)_\rho = -A(\mu+\rho)_\rho - A(\mu+\rho)_{\rho-1} B(\mu)_1 - \dots - A(\mu+\rho)_1 B(\mu)_{\rho-1},$$

nous aurons pour la résolution du système les expressions:

$$X_0 = M_0 + M_1 B(0)_1 + M_2 B(0)_2 + M_3 B(0)_3 + \dots$$
$$X_1 = M_1 + M_2 B(1)_1 + M_3 B(1)_2 + M_4 B(1)_3 + \dots$$
$$X_2 = M_2 + M_3 B(2)_1 + M_4 B(2)_2 + M_5 B(2)_3 + \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Autant que nous sachions, c'est seulement en 1869 que Koetteritsch[12] a traité le même problème, en étudiant aussi les conditions de sa possibilité.

[1] Wronski, né le 24 août 1778, est mort le 9 août 1853. On trouve son autobiographie dans la *Réforme du savoir humain*, III (reproduite dans la nouvelle réimpression de la *Loi téléologique du hasard* par Charles Henry, Paris 1890).

[2] Les manuscrits de Wronski sont déposés à la Bibliothèque de Kórnik (près de Posen) et sont la propriété du comte W. Zamoyski, l'heritier du comte Dzialynski. Une bibliographie complète des ouvrages publiés et des manuscrits de Wronski est en préparation par l'auteur de cette notice. Elle sera publiée par l'Académie des sciences de Cracovie et devra servir de base pour l'édition critique des écrits mathématiques de Hoëné-Wronski, proposée par cette académie.

[3] A. S. de Montferrier, *Dictionnaire des sciences mathématiques* (Paris 1834—1840). — *Dizionario delle scienze mate-*

matiche. Prima versione italiana di D. G. GASBARDI *e* G. FRANÇOIS, I—VIII. (Firenze 1838—1847). — *Encyclopédie mathématique,* I—IV. (Paris 1856—1859).

[4] E. WEST, *Exposé des méthodes générales en mathématiques d'après* HOËNÉ-WRONSKI (Paris 1886).

[5] Ce petit ouvrage a été traduit en polonais par M. L. NIEDZWIECKI (Paris 1881).

[6] Il y en a une édition russe par ANNENKOW (S:t Pétersbourg 1845) et une édition polonaise par l'auteur de cette notice (Varsovie 1890).

[7] Réimprimé par CHARLES HENRY (Paris 1890).

[8] Voir MUIR, *The theory of determinants in the historical order of its development.* I. (London 1890), p. 78, 175.

[9] CAUCHY, *Sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales etc.* Journ. de l'éc. polytechn., cah. **17**, 1815, 29—112.

[10] CHRISTOFFEL, *Über die lineare Abhängigkeit von Functionen einer einzigen Veränderlichen.* Journal für Mathem. **55**, 1858, 281—299. — FROBENIUS, *Über die Determinante mehrerer Functionen einer Variabeln.* Journal für Mathem. **77**, 1874, 245—257. — PASCH, *Note über die Determinanten, welche aus Functionen und deren Differentialen gebildet werden.* Journal für Mathem. **80**, 1875, 177—182.

[11] MUIR, *A treatise on the theory of determinants* (London 1882) p. 224—227, 280—284. — Voir aussi MANSION, *Résumé du cours d'analyse infinitésimale* (Gand 1887).

[12] KÖTTERITSCH, *Über die Auflösung eines Systemes von unendlich vielen linearen Gleichungen.* Zeitschr. für Mathem. **15**, 1870, 1—15, 229—268. — Voir aussi POINCARÉ, *Sur les déterminants d'ordre infini.* Bullet. de la société mathém. de France **14**, 1886, 77—90.

Die arabischen Bearbeiter des Almagest.

Von MORITZ STEINSCHNEIDER in Berlin.

Die nachfolgende Zusammenstellung bildet einen Nachtrag zu meiner Preisschrift über die arabischen Übersetzungen aus dem Griechischen. Das dort gegebene Thema gestattete mir nicht, auf die kurz erwähnten Commentatoren näher einzugehen. Ich habe mich aber auch hier auf den besonderen Gegenstand beschränkt und für die Autoren nur kurze Quellennachweisungen gegeben, und habe die alphabetische Reihenfolge gewählt, weil eine chronologische nur dann einen wissenschaftlichen Wert hätte, wenn sie zugleich mit einer Entwicklung des Stoffes selbst verbunden wäre, die nur ein Fachmann bieten kann. Das Wort *Almagest,* bekanntlich ein arabisches für die »megiste Syntaxis», ist in Europa als Bezeichnung für dieses Werk des PTOLEMAEUS üblich geworden; die Araber bezeichnen damit manches Lehrbuch der Astronomie, weil die Anordnung des Stoffes nach dem Muster des PTOLEMAEUS typisch geworden war. Man darf sich nicht wundern, dass von den arabischen Commentaren so wenig in unseren Bibliotheken zu finden ist; einerseits wurden solche Schriften durch selbständige Arbeiten antiquirt, andererseits hatten europäische Orientalisten für diese Gattung von Literatur weniger Interesse. — Den neuen grossen Catalog des Khedive habe ich noch nicht durchsehen können.

1. AHMED BEN MUHAMMED, »der Astronom», zur Zeit des Khalifen MAAMUN, verfasste eine Einleitung in die Wissenschaft der Astronomie (*'Hi'a*) in 30 Kapiteln, welche das Werk [den *Almagest*] des PTOLOMAEUS in klarer Darstellung umfasst, also eine Art Paraphrase. Offenbar ist identisch AHMED BEN MUHAMMED »der Rechner» (*al-'Hasib*), Verfasser einer Einleitung in die Wissenschaft der Gestirne (*Nudjum*) bei NADIM, *Fihrist,* editio FLÜGEL, S. 282; s. Zeitschrift für Mathematik **10**, 1866, 481, wo ich dieses Werk zu jenem heranzog, aber ohne Grund; das dort besprochene, hebräisch übersetzte Werk hat sich als GEMINUS erwiesen.

2. AHMED B. MUHAMMED AL-ṢAVRI (oder *Surri?*)[1] NADJM AL-DIN ABU'L-FUTÛ'H, genannt IBN AL-'SALÂ'H, Philosoph, Mathematiker und Arzt, aus Hamadan, gestorben in Damascus »nach 540 H.» (nach 1145) ist erst aus disjectis membris zu würdigen; die einzelnen Angaben über ihn sind mangelhaft oder incorrect.

Eine kurze Notiz aus KIFTI's biographischem Lexikon (Ms.; Auszüge bei CASIRI, *Bibliotheca arabico-hispanica*), giebt VON HAMMER, *Literaturgeschichte der Araber* VII, 507 mit Entstellung des Namen Surri. Ein längerer Artikel bei IBN ABI OSEIBIA, *Geschichte der Ärzte*, ed. A. MÜLLER, II, 164 ist im Catal. des Brit. Mus. p. 594[b] ohne den Namen Surri angegeben und daher im Index getrennt von IBN AL-'SALÂ'H; LECLERC, *Histoire de la médecine arabe* (II, 47) hat 3 Zeilen daraus excerpirt. Im Catalog der Leydener arab. Handschr. ist die Identität von AHMED in 2 mss. erst in tom. V, 235 zu n. 1005 erkannt, und in einer Note (III, 59) wird er durch eine falsche Conjectur in ein früheres Jahrhundert hinaufgerückt; er fehlt gänzlich unter den Erklärern des *Almagest* bei WENRICH (*de auctor. graec. vers.* p. 235). Vergl. auch den Index in NICOLL und PUSEY's Catal. p. 668. Er copirte das Leydener ms. 1040 (s. meine Abhandlung: *Euklid bei den Arabern*, S. 99). In der von IBN ABI OSEIBIA mitgeteilten langen Ka'sida (Tendenzgedicht) bemerkt OSEIBIA die Anwendung vieler technischen Ausdrücke; auch EUKLID ist da (S. 166, Zeile 5) neben anderen Gelehrten erwähnt.

Von seiner Schriften gehören hierher: »Über die Irrtümer in den Tabellen des VII. und VIII. Buches des *Almagest*»; ms. Bodleiana bei URI p. 204, n. 940.

3. AVERROËS, der bekannte Philosoph verfasste ein astronomisches Compendium, welches sein Sohn, in einem Verzeichniss der Schriften des Vaters,[2] als »Compendium des *Almagest*» bezeichnet. Das arabische Original ist verloren, scheint auch niemals lateinisch übersetzt zu sein, so dass WENRICH l. c. p. 235 es nicht erwähnt. Dieses Werk wurde von JAKOB ANATOLI (1213) ins Hebräische übersetzt. Ich zähle in meinem, unter der Presse befindlichen Werke (S. 347) ungefähr ein Duzend Handschriften dieser Übersetzung auf, darunter eine in der hiesigen K. Bibliothek (1879 auf meine Empfehlung gekauft). Eine kurze Analyse habe ich l. c. gegeben; am Schlusse findet sich eine Hinweisung auf PTOLEMAEUS als denjenigen, welcher die Themata behandelt hat. Jüdische Astronomen des Mittelalters kennten dieses Werk, dessen wissenschaftlichen Wert nur ein Fachman beurteilen könnte. — Ein Fragment des Originals enthält vielleicht ms. Paris 2458[6].

4. AVICENNA (IBN SINA), der berühmte Arzt, Verfasser des Kanon, erzählt uns selbst,[3] dass sein Lehrer AL-NATILI (so muss es heissen) ihn bei den geometrischen Figuren des *Almagest* in Stich gelassen und auf Autodidaxis hingewiesen habe. AVICENNA

unterrichtete seinen Biographen DJUZDJANI 8 Jahre in der Sternbeobachtung mit besonderer Rücksicht auf die Angaben des PTOLEMAEUS (IBN ABI OSEIBIA, l. c. II, 8 Mitte). Er hat ein Compendium des *Almagest* verfasst, welches er in seiner grossen Encyclopädie aufnahm. Darin fügte er 10 Figuren über Optik hinzu,[4] und am Ende Einiges über Sternkunde, was sein Biograph für unübertrefflich hält. Von jener grossen Encyclopädia sind Teile erhalten, welche die Auszüge aus PTOLEMAEUS enthalten;[5] ein Arabist in Oxford könnte ermitteln, was AVICENNA darin geleistet habe.

5. BIRUNI, ABU'L REI'HAN (RI'HAN), Arzt und Astronom, wahrscheinlich erst um 1050 gestorben, ist in neuester Zeit durch seine Chronologie und sein Werk über Indien, beide in Original herausgegeben, ersteres auch deutsch, letzteres englisch übersetzt von ED. SACHAU, weiteren Kreisen zugänglich. Die Namensform ALBERUNI ist durch die heutige Aussprache nicht wissenschaftlich gerechtfertigt. SACHAU führt in der Einleitung zum Texte der Chronologie (Leipzig 1878, p. XLIX) verschiedene Schriften BIRUNI's auf, welche nur bei HAGI KHALFA, Lexikon, ed. FLÜGEL erwähnt seien (s. den Index VII, 1198 n. 7420), darunter (V, 386) einen Auszug aus dem *Almagest,* ohne auf die Quelle zurückzugehen, was auch WENRICH l. c. p. 235 nicht gethan; in WÜSTENFELD's *Gesch. der arab. Aerzte,* S. 76 n. 19 ist die Quelle nicht IBN ABI OSEIBIA [II, 21 der Ausgabe], da dieser das Compendium nicht erwähnt. In der That hat KIFTI, l. c. im Artikel PTOLEMAEUS eine Notiz, welche bei CASIRI (*Bibliotheca arabico-hisp.* I, 348) gekürzt ist; es fehlen nach dem Worte »Sebecteghin» die Worte »und er machte es darin in der Weise des PTOLEMAEUS», die sich wohl auf den »Kanon Mas'udi» beziehen. Es frägt sich nun, ob nicht dieses Werk den Auszug des *Almagest* repräsentiren, resp. einen solchen enthalten soll; vergl. unten n. 7 und 13.

6. AL-FARABI (vulgo ALPHARABIUS, gestorben 950), einer der berühmtesten Philosophen unter den Arabern, dessen Erläuterungen zu allgemeineren Teilen des EUKLID sich noch erhalten haben, verfasste einen Commentar über den *Almagest,* wie KIFTI, l. c., und IBN ABI OSEIBIA, l. c. II, 138, berichten; mehr habe ich in meiner Abhandlung über ihn (Petersb. 1869; Mém. de l'Acad. Imp. t. XIII n. 4 p. 78 n. 14) nicht zu berichten gewusst, und weiss es auch heute nicht.

7. AL-FERGANI (vulgo ALFRAGAN, gestorben 833 oder 844) verfasste ein Compendium der Astronomie, vielleicht ohne eigentlichen Titel, daher verschiedentlich überschrieben. Das Buch

gehört zu den ersten, häufig auch ohne Angabe benutzten, Quellen des Mittelalters. Wir besitzen das Original, 3 lateinische Übersetzungen und eine unedirte hebräische, in welcher es heisst, das Buch, gewöhnlich nach dem Verfasser benannt, sei eine Art von Compendium des *Almagest*. NADIM, *Fihrist* p. 279 nennt es: »Buch der Kapitel, eine Auswahl aus dem *Almagest*»; daraus hat man 2 Titel gemacht, so dass WENRICH l. c. p. 235 die 2. Hälfte allein angiebt. S. auch unten n. 13.

8. AL-HAZIMI, ABU ABD ALLAH MUHAMMED BEN AHMED AL-SAÎDI, über welchen uns die bekannten Quellen im Stich lassen, verfasste ein Compendium (*Mukhta'sar*) des *Almagest*, welches die Bodleiana besitzt und 20 Blätter umfasst. URI p. 200 n. 920 sagt nicht Näheres darüber; WENRICH giebt nicht einmal den vollständigen Namen. Im *Catalogus Mss. Angliae* ist »Hasenii» angegeben und daher bei WOLF, *Bibl. Hebr.* I, p. 969.

9. IBN HEITHAM, AL-HASAN (gestorben 1038), bekannt als Astronom und Optiker unter dem Namen ALHAZEN, ist in neuester Zeit vielfach besprochen.[6] Er soll zu seinem Unterhalt alle Jahr die Elemente des EUKLID, die sogenannten mittleren Bücher (meist identisch mit denen des sogenannten »kleinen Astronomen») und den *Almagest* abgeschrieben und verkauft haben.[7] Ich zähle hier seine auf den *Almagest* bezüglichen Schriften auf, wie sie in der grossen Liste des IBN ABI OSEIBIA, l. c., vorkommen.[8]

Pag. 93 (WÖPCKE, p. 93 n. 3; LECLERC, l. c. I, 514): Commentar und Auszug des *Almagest* (ein Werk) in demonstrativer Methode, worin jedoch nur Unbedeutendes ausgerechnet ist; der Verfasser nahm sich eine ausführliche Bearbeitung vor, worin die kürzere erweitert, nach Zahlen und Rechnungen ausgeführt werden sollte.

Pag. 97 (fehlt bei WÖPCKE, p. 74; LECLERC, l. c. p. 518: »Extrait»): *Istikhradj* aus dem practischen Teil des *Almagest*. Der Ausdruck für einen einfachen Auszug ist gewöhnlich, wie im obigen Werke: Ikhti'sar; ob hier etwas Anderes anzunehmen sei, lasse ich dahingestellt.

Pag. 98 (WÖPCKE, p. 75 n. 64, LECLERC, l. c. p. 520 l. 1: »Solution des difficultés»): über die Zweifel, PTOLEMAEUS betreffend. KIFTI, l. c. hat 2 Titel: »Zweifel PTOLEMAEUS betreffend», und »Lösung der Zweifel» etc., daher WENRICH l. c. p. 236 (nach CASIRI) 2 Werke annimmt, was höchst unwahrscheinlich; es ist vielmehr an eine Variante zu denken.

Ausserdem führt WENRICH l. c. p. 230 eine Schrift: *de motu sphaerae secundum* PTOLEMAEUM an, nach dem alten Ley-

dener Catalog n. 1096; der neue (III, 94 n. 1064, fehlt im Index VI, 100) giebt dafür: *de circulis in circino astronomico construendis* und identificirt damit n. 23 p. 74 bei Wöpcke »sur le compas des cercles« (nach Oseibia p. 97 l. z. zu berichtigen). Wöpcke selbst p. 76 n. 77 identificirt das Leydener ms. 1096 mit einem andern, unrichtig emendirten Titel, auf welchen hier nicht weiter einzugehen ist, da bereits Wiedemann den Originaltitel gerechtfertigt hat.

10. Ibrahim, abu Is'hak ben Sinân ben Thabit, Enkel des Thabit (unten n. 21), war Arzt in Bagdad, wo er an »tumor« in der Leber, an einem Sonntag, Mitte des Muharram 335 H. (Mitte August 946) starb; er war geboren im J. 296 H. (908/9). Diese genauen Daten verdanken wir einer jüngeren Redaction von Oseibia (II, 236); sie sind in den bekannten Quellen nicht zu finden;[9] doch wusste man, dass er jung gestorben, und schon zu 16/17 Jahren als Schriftsteller aufgetreten sei. Er verfasste eine Schrift über die Ziele, oder Zwecke (*Igradh*) des Ptolemaeus, das heisst wohl über die Grundideen.[10] Diesen Titel giebt Nadim im *Fihrist*. Einen andern bietet Kifti's Biographisches Lexikon: »Über das, was Ptolemaeus angewendet, um auf leichtem Wege die Abweichungen von Saturn, Mars und Jupiter herauszubringen«, eine Monographie, welche er im 24. Lebensjahre verfasste. Er bemerkte: wenn er eine andere Methode eingeschlagen hätte, so hätte er die angewendete Erleichterung entbehren können; er befolgte darin nicht den Weg des Syllogismus (der Analogie?; das arabische Wort bedeutet beides).[11]

11. Kadizadeh (d. h. Sohn des Kadi) Rumi, Hasan Tschelebi 'Sala'h al-(Milla wa'l-) Din Musa ben Muhammed b. Mahmud — danach zu unterscheiden von mehreren anderen Gelehrten des Namens Kadizadeh, verfasste 2 Schriften im J. 1412, welches irrtümlich als Todesjahr angegeben worden;[12] sein Sohn Mirem Tschelebi starb 1524. Hasan verfasste Glossen zu dem Werke des Nitsam al-Din etc. (unten n. 17), woraus Hagi Khalfa, l. c. V, 386 n. 11413 eine Notiz über die Übersetzungen des *Almagest* mitteilt. Wenrich hat den ganzen Passus übersehen oder im ms. nicht vorgefunden.

12. Al-Kindi (vulgo: Alchindus, gestorben 873), der bekannte Polyhistor, dessen Bibliographie G. Flügel in einer kleinen Monographie herausgegeben hat (Leipzig 1857), verfasste 2 Schriften, welche bei Nadim, l. c. S. 256 u. 258, bei Oseibia, l. c. S. 210, 211, bei Flügel arabisch S. 38, 43 n. 29 u. 123 (deutsch S. 22, 37) wörtlich etwa so lauten:

1. Abhandlung zur Erläuterung der Rede des PTOLEMAEUS am Anfang seines *Almagest* aus der Rede des ARISTOTELES in den *Analytica* (FLÜGEL lässt PTOLEMAEUS einen Ausspruch über ARISTOTELES machen). WENRICH übergeht diese Schrift.

2. Abhandlung über die Sphärenconstruction des PTOLEMAEUS — ohne Zweifel ist der *Almagest* gemeint. — Das arabische ms. Paris 1157 (2544, 9 f. 45—56, bei SLANE p. 455) enthält eine Erklärung der Stelle zu Anf. von *Almagest* VI, welche die *arabischen Übersetzer* schlecht wiedergegeben, zugleich eine genaue Beschreibung der dort behandelten *Armillarsphaere*.

13. [KUSCHJAR BEN LABBAN etc., der 968 astronomische Tabellen verfasste, wird von FLÜGEL in seiner Dissert. über die Interpreten und von WENRICH, l. c. p. 235 als Commentator des *Almagest* bezeichnet, weil sie nur die ungenaue Übersetzung CASIRI's (I, 348) zu Rathe zogen, nicht den beigedruckten Text KIFTI's, wonach KUSCHJAR *in* jenen Tafeln Auszuge machte, vergl. oben n. 5 und 7. — Er ist wohl der »Djili» in ms. Paris 2595].

14. AL-MASI'HI (der Christ), ABU SAHL ISA BEN JA'HJA AL DJORDJANI, Arzt, und in Gunst der Herrscher in Khorasan (starb 40 Jahre alt im J. 1000), — s. über ihn meine Schrift über ALFARABI p. 64, SACHAU zu ALBERUNI, Chronologie (arab.) p. XXXII — verfasste ein Compendium des *Almagest;* OSEIBIA, l. c. II, 328, WÜSTENFELD, l. c. § 118 S. 60; LECLERC, l. c. I, 357; WENRICH, l. c. p. 303. — Ist er etwa der bisher nicht dechiffrirte IBN SAHL, Verfasser von 4 Kapiteln zur Einleitung in den *Almagest,* hebräisch übersetzt in ms. Paris 1018?

15. AL-NATILI, Lehrer des AVICENNA, s. unter diesem, n. 4.

16. AL-NEIRIZI, FADHL BEN HATHIM (um 900; s. Biblioth. Mathem. 1892, 8) verfasste einen Commentar über den *Almagest,* nach KIFTI, bei CASIRI, l. c. I, 348 und wohl daher HAGI KHALFA, l. c. V, 386; WENRICH, l. c. p. 234; er nennt auch p. 227 NEIRIZI als Übersetzer aus dem Arabischen aus Missverständnis. Die falsche Lesart »Tebrizi» hat noch der neueste Catalog der Pariser Handschr. n. 2464, 7.

17. NITSAM (oder NIZAM) AL-DIN HASAN B. MUHAMMED NISCHABURI AL-KUMMI,. auch der »Hinkende» (*al-A'aradj*) genannt, beendete am 6. Scha'aban 704 (4 Marz 1305) einen Commentar zu TUSI's (n. 22) Redaction des PTOLEMAEUS; ms. des Brit. Mus. 392 (p. 187). Dazu schrieb KADIZADEH (n. 11) Glossen. Im J. 1311 verfasste »AL-HASAN IBN MUHAMMED, genannt NITSAM» einen Commentar über ein astronomisches Werk desselben TUSI; die Identität dieses Commentators mit

dem unseren liegt auf der Hand. Vergl. über ihn Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft **25**, 1871, 396. — Fehlt bei WENRICH.

18. IBN RIDHWAN, ALI (gestorben 1068), ein bekannter Arzt in Aegypten, dessen Commentar zum *Quadripartitum* unter dem Namen *Rodoam* (sonst auch *Aben Rudian* etc. geschrieben) lateinisch gedruckt ist (Biblioth. Mathem. 1891, 41), zählt selbst unter den Schriften, die er in Auszug brachte, den *Almagest* und das *Quadripartitum;* ersteren wollte er auch commentiren. (IBN ABI OSEIBIA, l. c. II, 100, 101, ungenau WÜSTENFELD, l. c. S. 42 unten; fehlt bei WENRICH, l. c. p. 235.)

19. SAMARKANDI, SCHAMS AL-DIN MUHAMMED etc. (gestorben um 1203/4) commentirte den *Almagest* wahrscheinlich in der Redaction des TUSI (n. 22, HAGI KHALFA, l. c. V, 386). Über ihn s. meine *Lettere a Don B. Boncompagni* p. 86, 92; *Euklid bei den Arabern* S. 95, und über ms. Leyd. 1169[4] H. USENER, *Ad historiam astronomiae symbolae* (Bonnae 1876, Progr.) p. 15, 19, 21. — Fehlt bei WENRICH, l. c. p. 235.

20. IBN ABI SCHUKR MU'HJI AL-DIN (oder AL-MILLA, oder AL-DUNJA) JA'HJA B. MUHAMMED etc. AL-MAGRABI AL-ANDALUSI (um 1265), ein fruchtbarer Schriftsteller, der unter Anderem die Schriften griechischer Autoren, wie EUKLID, APOLLONIUS, MENELAUS, THEODOSIUS bearbeitete,[13] verfasste einen Auszug aus dem *Almagest,* welchen er *al-Khala'sa* (Auszug) nannte, wie er selbst berichtet, nämlich in einem Werke, welches er, in derselben Methode, über die Bewegung der Wandelsterne verfasste, und dem Wezir ABU HASAN ALI B. MUHAMMED BEN AL-HASAN AL TUSI widmete (ms. Leyden 901, Catal. III, p. 111, cf. V, 243). HAGI KHALFA, l. c. V, 387, 389 giebt an, dass die Bearbeitung des *Almagest* 10 Tractate zählte, Zusätze enthaltend und für den bekannten Christen ABU L-FARADJ GREGORIUS (*Barhebraeus*) verfasst sei. Die Worte: »Epitomen potiora continentem» in FLÜGEL's Übersetzung (p. 389 lin. 2) entsprechen dem einen arabischen Worte: *Mulakhkha's* (Extract). WENRICH, l. c. p. 34, nennt den Verf. ungenau *Muhjieddin ben Ja'hja,* nach dem alten Pariser Catalog n. 1108, wo aber die Redaction des TUSI nach dem neuen Catalog n. 2485, mit einer falschen Inschrift, welche MUSA B. SCHAKIR zum Verf. macht.

SURRI, s. oben AHMED BEN MUHAMMED.

21. THÂBIT BEN KURRA (oder KORRA, vulgo THEBIT, gestorben 901), von welchem verschiedene kleine Schriften in lateinischer Übersetzung erhalten sind (s. Biblioth. Mathem. 1891, 68), verfasste verschiedene, den *Almagest* betreffende

Schriften, deren Titel hier zum erstenmale vollständig nach OSEIBIA gegeben wird.

Pag. 18: *Tashil* (Erleichterung) des *Almagest; Mudkhil* (Einleitung) in den *Almagest;* ein grosses Werk zur Erleichterung des *Almagest,* welches er unvollendet lies; es ist die vorzüglichste seiner Schriften darüber. Diese 3 Werke fasst KIFTI zusammen, aber CASIRI l. c. p. 387 übersetzt zweideutig: »Expositio libris III comprehensa«, daher auch CHWOLSOHN (*Ssabier* I, 561): »in 8 Büchern, wovon das letztere« (vielmehr: eines) »unvollendet blieb«. WENRICH, l. c. p. 235 begnügt sich mit einem blossen Citat. Ein Excerpt wahrscheinlich aus n. 1 in hebräischen Lettern ist kürzlich vom Brit. Mus. erworben (s. NEUBAUER's Notiz im Jewish quarterly review **3**, 1890, p. 621). Sonst ist mir keine Spur bekannt.

P. 219: über die Figuren (Propositionen) des *Almagest.*

P. 220: Antwort [auf eine Anfrage?] über die Ursache der Differenzen zwischen den Tafeln des PTOLEMAEUS und den »erprobten« (*almumta'han*); über letzteres s. meine Notiz in Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft **24**, 1870, 375 A 52 (**25**, 1871, 419); cf. *Fihrist,* 275 (II, 130), 149. THABIT hat übrigens auch die arabische Übersetzung revidirt oder corrigirt.

22. TUSI, NA'SIR AL-DIN ABU DJA'AFAR MUHAMMED BEN MUHAMMED BEN AL-HASAN (gest. 1273) gehört zu den fruchtbarsten arabischen Mathematikern, wie man schon aus dem Index zu HAGI KHALFA, l. c. VII, 1186 n. 6800 ersehen kann; eine kritische Bibliographie seiner Schriften ist mir nicht bekannt, und es kann hier kein Anlauf dazu gemacht werden. TUSI redigirte unter Anderem auch die griechischen Mathematiker, welche in früheren Jahrhunderten ins Arabische übersetzt worden waren (WENRICH, l. c. XXXV); seine Redaction (*Ta'hrir*) des EUKLID ist gedruckt und früher mitunter für eine einfache Übersetzung gehalten worden (s. meine Abhandlung: *Euklid bei den Arabern,* S. 84 und SUTER, *Einiges aus Nassir ed-Dins Euklidausgabe,* Biblioth. Mathem. 1892, 5; ms. Paris 2464 hat eine andere Vorrede als die edirte). Seine Redaction des *Almagest* ist unedirt und meines Wissens noch nicht näher untersucht. WENRICH, l. c. p. 228, 234 u. Berichtigung p. 303, erwähnt 3 Handschriften, Paris 1108 (im neuen Catalog 2485) und Medic. 284, 292. Diese Redaction wurde commentirt von SAMARKANDI (n. 19) und einem Anonymus (HAGI KHALFA, l. c. V, 387).

23. WAFÂ (ABU'L) AL-BUZDJANI MUHAMMED (gest. 997) ist

vielleicht der bedeutendste Bearbeiter des *Almagest,* wenn sein Werk (ms. in Paris, früher 1138, im neuen Catalog 2494) wirklich die Variation des Mondes kennt, was E. A. SEDILLOT (*Matériaux* etc. p. 42 etc.) sein lebelang mit grossem Eifer in verschiedenen Schriften verteidigt hat. —

Ich schliesse diese kleine Studie mit einigen gelegentlichen Bemerkungen im edirten OSEIBIA. — Der, sonst bekannte, MADJRITI (s. Biblioth. Mathem. 1891, 48) studierte auch den *Almagest* (IBN ABI OSEIBIA, l. c. II, 39).

In einem Gedichte auf den vielseitig gelehrten Arzt FAKHR AL-DIN AL-RAZI (gest. 28. April 1210) ist auch vom *Almagest* die Rede. (IBN ABI OSEIBIA, l. c. II: 25).

Der christliche Arzt in Bagdad IBN BOTLAN, dessen *Tabulae sanitatis* in lateinischer Übersetzung unter dem verstümmelten Namen »Eluchasem Elimithar» gedruckt sind, citirt Aussprüche des PTOLEMAEUS (IBN ABI OSEIBIA, l. c. II, 24), die allerdings den astologischen Schriften entnommen scheinen.

[1] ABU'L HASAN AL-SURRI bei NADIM, l. c. p. 183; ABU'L HASAN SERI (sic) BEN AHMED »er Reffa al-Kindi al-Mausali» bei HAGI KHALFA, l. c. VII, 1089 n. 3363, s. auch Index zum Catalog der arab. mss. des Brit. Mus. p. 836.

[2] Edirt von RENAN in der 2. u. 3. Ed. seines *Averroes,* ohne den Verf. zu kennen, den ich in meiner Schrift über AL-FARABI nachgewiesen habe.

[3] Sein Bericht findet sich bei KIFTI und Anderen; s. meinen Artikel in *Hebr. Bibliogr.* X, 16. AL-NATILI hiess ABU ABD ALLAH — s. OSEIBIA l. c. II, 2 und 3 (so lies im Index S. 28 Zeile 3); cf. I, 240 Zeile 9 von unten. In einer Redaction des DIOSKORIDES vom Jahre 990, geschrieben 475 H. (1082), ms. Leyden 1301 (Catalog III, 228; s. Arch. für pathol. Anatomie **52**, S. 354, **124**, S. 483) wird neben ABU ABD ALLAH auch HUSEIN BEN IBRAHIM AL-NATALI genannt; es ist mir zweifelhaft geworden, ob nicht beide Namen dieselbe Person bedeuten.

[4] »IKHTLLÂF AL-MANATSIR», so lies bei KIFTI und OSEIBIA II, 7, Zeile 2; siehe meine Abhandlung *Euklid bei den Arabern,* S. 100, zum Teil berichtigt in meinem Werke über die hebräischen Übersetzungen Anm. S. 371; ungenau: »Comment.» bei CASIRI, l. c. I, 269, 271 und HAMMER, l. c. V, 397 n. 75. WENRICH bringt die Notiz erst in den Addenda p. 303; s. auch meine *Hebr. Bibliogr.* X, 18.

[5] PUSEY, Catal. II, 381; ob der *Abrégé* in ms. Paris 2484? der Catalog giebt nichts Näheres an.

[6] Quellen in meinen Noten zu BALDI, p. 34.

[7] Noten zu BALDI, p. 23; OSEIBIA, l. c., Lesarten S. 47.

[8] Ich citire nach den Seiten von OSEIBIA, füge mit »WÖPCKE» die Stelle bei WÖPCKE (*Omar al-Khayami* p. 73 ff.). KIFTI bei CASIRI I, 416 hat nur: *Tahdsib* (concinne Darstellung, Abriss).

[9] NADIM, l. c. S. 272, II, 129, wo der längere Artikel von KIFTI abgedruckt ist; HAGI KHALFA, l. c. VII, 1104 n. 3968; CHWOLSOHN, *Ssabier* I, 577; *Cat. Lugd.* III, 48; Noten zu BALDI p. 48, wo die Conjectur u. Berichtigung *Hilal* zu p. 25 falsch ist; LECLERC, l. c. I, 515 falsch »Temnan».

[10] »Scopo» bei WENRICH und CHWOLSOHN ungenau.

[11] Bei CHWOLSOHN S. 577 nur ganz kurz; »25» ist wohl Druckfehler, da die Zahl im Arabischen in Worten gegeben ist.

[12] Das angebliche Todesjahr 1412 bei CASIRI, l. c. I, 380, HAGI KHALFA, l. c. I, 322, SEDILLOT, *Tables d'Olough* p. 225, ist in der That das Abfassungsjahr von *Aschkal al-Taasis,* s. meine *Lettere a Don B. Boncompagni* p. 85; ein anderes im J. 1412 verf. Werk (s. bei HAGI KHALFA, l. c. VI, 113 n. 12886, wo eine Lücke für das Todesjahr) ist Lacknau (in Hindustan) lithographirt a. 1290 H. (1873/4). Cf. SEDILLOT, *Matériaux* etc. I, 245, *Prolég. arab.* p. 5 note, sind die Stellen aus CASIRI unvollständig angegeben, weil bei letzterem im Index unter verschiedenen Namen: *Cadi, Saad* und *Musa;* sie sind nämlich I, 50, 380, 382, 479, 503, 521, 534 n. 1373; cf. SEDILLOT, *Introduction aux Tables* p. CXXXII, CXXXVII n. 113; HAGI KHALFA, l. c. VII, 1118 n. 4446, p. 1207 n. 7787 (s. meine *Lettere* etc. l. c. n. 18); s. auch d'HERBELOT, *Bibl. Orient.* deutsch II, 32, III, 501; NICOLL *Cat.* p. 247 (704).

[13] S. vorläufig meine Abhandlung: *Euklid bei den Arabern,* S. 109. WENRICH kennt nur THEODOSIUS. Des letzteren Schrift über Klepsidra in der Bearbeitung des IBN ABI SCHUKR erschien im Journal asiatique (Paris) 17, 1891, p. 287.

RECENSIONEN. — ANALYSES.

H. Weissenborn. Zur Geschichte der Einführung der jetzigen Ziffern in Europa durch Gerbert. Eine Studie. Berlin, Mayer & Müller 1892. 8°, (5) + 123 p.

Cet ouvrage traite la question: d'où Gerbert a-t-il tiré ses connaissances arithmétiques? M. Weissenborn, qui croit avoir constaté une mention relative à l'*abacus* dans le titre d'un ouvrage d'Alkindi, pense que Gerbert avait appris l'arithmétique essentiellement en Espagne par un certain Joseph *Hispanus* ou *sapiens,* dont un écrit: *Libellus de multiplicatione et divisione numerorum* est cité deux fois dans les lettres de Gerbert. La plus grande partie de l'ouvrage de M. Weissenborn est consacrée à la question si ce Joseph est identique avec quelque autre savant connu. M. Weissenborn n'est arrivé à aucun résultat définitif, mais il semble porté à croire que Joseph n'était pas un savant, mais un marchand juif dans le service du comte de Barcelona.

Stockholm. G. Eneström.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von || journal d'histoire des mathématiques publié par G. Eneström. Stockholm. 8°.

1892: 1. — [Analyse de l'année 1891:] *Venezia,* Istituto Veneto, Atti **3**$_7$, 1892, 637—644. (A. Favaro.)

Физико-математическія науки въ ихъ настоящемъ и прошедшемъ. Журналъ издаваемый В. В. Бобынинымъ. Москва. 8°.

9 (1890): 3—4. — Les sciences mathématiques dans leur état actuel et passé. Journal publié par V. V. Bobynin.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von M. Cantor. Leipzig. 8°.

37 (1892): 1. — [Analyse de l'année 1889:] Fiziko-matem. naouki **9** (1890), 1892, 133—142.

Bobynin, V. V., Sur l'oeuvre des Grecs dans le développement des mathématiques.

Biblioth. Mathem. 1892, 1—2.

Burkhardt, H., Die Anfänge der Gruppentheorie und Paolo Ruffini.

Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik **6**, 1892, 119—159.

Favaro, A., Della vita e delle opere del senatore Domenico

Turazza. Commemorazione letta nell' aula magna della r. università di Padova addi 27 marzo 1892. Padova 1892.
8°, 82 p. + portrait.

Loria, G., Nicola Fergola e la scuola di matematici che lo ebbe a duce.
[*Genova*, Università, Atti 1892. 144 p.

Steinschneider, M., Miscellen zur Geschichte der Mathematik.
Biblioth. Mathem. 1892, 7—8.

Suter, H., Einiges aus Nassir ed-Dins Euklidausgabe.
Biblioth. Mathem. 1892, 3—6.

Torelli, G., Achille Sannia. Commemorazione.
Palermo, Circolo matem., Rendiconti **6**, 1892, 48—51.

Weissenborn, H., Zur Geschichte der Einführung der jetzigen Ziffern in Europa durch Gerbert. Eine Studie. Berlin, Mayer & Müller 1892.
8°, (5) + 123 p. — [1.80 Mk.]

Vivanti, G., Notice historique sur la théorie des ensembles.
Biblioth. Mathem. 1892, 9—25.

Question 37 [sur la signification de l'expression *regula coeci*].
Biblioth. Mathem. 1892, 32. (G. Eneström.)

[Listes d'ouvrages récemment publiés.]
Biblioth. Mathem. 1892, 27—31. — Fiziko-matem. naouki **9** (1890), 1892, 146—168. — Zeitschr. für Mathem. **37**, 1892; Hist. Abth. 40.

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

38. Les dictionnaires biographiques ne donnent que des indications incomplètes sur la vie et les travaux du mathématicien Marc-Antoine Parseval-Deschênes, mort en 1836 (voir p. ex. la *Nouvelle biographie générale* **39** [Paris 1862] col. 253), auquel on doit un beau théorème dans la théorie des séries. Y-a-t-il quelque notice imprimée sur l'action scientifique de ce savant?
(G. Eneström.)

Inhalt. — Table des matières.

STOCKHOLM, TRYCKT I CENTRAL-TRYCKERIET, 1892.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK



JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON — PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1892. STOCKHOLM. N° 3.

NEUE FOLGE. **6.** — NOUVELLE SÉRIE. **6.**

BERLIN. MAYER & MÜLLER. Markgrafenstrasse 51.

Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr.

PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Über den Commentar des Simplicius zu den Elementa.

Von R. O. BESTHORN in Kjöbenhavn.

Herr STEINSCHNEIDER hat in der Bibliotheca Mathematica 1892, S. 7—8, einige sehr schätzenwerthe Erläuterungen über Spuren eines Commentars (nicht Übersetzung) des AL-NARIZI und des SIMPLICIUS zu den Elementen des EUKLIDS gegeben — eine Frage, die, wie die Redaction hervorgehoben, schon früher von Herrn TANNERY angeregt ist. Die gelehrte Abhandlung des Herrn TANNERY ist auf Mittheilungen des Herrn RODET aus dem arabischen Codex der Leidener Bibliothek 399: 1 gegründet. Da ich im Begriffe stehe den ersten und wichtigsten Theil dieses Codex herauszugeben (mit lateinischer Übersetzung, während mein Mitherausgeber, Herr Professor J. L. HEIBERG die historischen und kritischen Untersuchungen übernommen), möchte ich schon jetzt durch eine kurze Analyse dieses wichtigen Codex dazu beitragen die genannten wieder angeregten Fragen, sowie die sehr umstrittene HERON-Frage zu beleuchten, worüber noch SUTER (Abhandl. z. Geschichte der Mathem. **6**, 1892, 54) im unklaren ist.

Der arabische Codex Leidensis 399: 1 zerfällt in zwei Theile:

1. Die (älteste) arabsiche Übersetzung der sechs ersten Bücher der Elemente EUKLIDS von HADSCHDSCHADSCH IBN JUSUF MATHAR, mit Commentar von AL-NARIZI, 162 dicht geschriebene Seiten (in unserer Ausgabe ca. 300 Druckseiten). Der Commentar ist eine Compilation nach arabischen und griechischen

Autoren. Wir verdanken dieser Compilation die Übermittelung werthvoller Bruchstücke zweier in der Originalsprache verlorenen griechischen Werke — der Commentar des Heron und des Simplicius zu den Elementen Euklids. Die Einleitung schliesst mit folgenden Worten: »Hier enden die von Simplicius zu Erklärung der Einleitung des Euklids zum ersten Buche der Elemente vorausgeschickten Begriffe«. Leider ist der Commentar des Simplicius zu den ersten 22 Definitionen verloren, da mehrere Blätter fehlen. Der Commentar zu Prop. I, 28 enthält eine sehr umfassende Discussion von Simplicius und Geminus über die Theorie der Parallelen. Von einem Heronischen Commentar enthält der Codex zahlreiche Auszüge.

2. Eine arabische »verbesserte« Übersetzung der *Sphaerica* des Menelaus von Ahmad Ibn Sad Al-Haruni in zwei Büchern, 47 Seiten. Diese Übersetzung beabsichtige ich nicht zu ediren, vergleiche sie aber mit dem von Halley und Costard herausgegebenen Text, und Professor Heiberg wird diese Vergleichung verwerthen.

Studi italiani sulla storia della matematica.

Rivista di Antonio Favaro in Padova.

Allorchè dall' egregio direttore di questo periodico mi fu gentilmente affidato l'incarico di fornire alcune notizie sopra gli studi italiani relativi alla storia delle matematiche, mi parve di poter adempiere nel modo più conciso e più esatto che per me si potesse l'onorevole incarico con indicare succintamente quei capitoli della classica *Biblioteca Matematica Italiana* del nostro Riccardi, ai quali le più particolareggiate notizie avrebbero potuto attingersi intorno a tale argomento.[1] Ma la domanda, che dalla medesima e da altre parti ancora, mi viene con insistenza indirizzata, di ritornare con maggiori particolari sullo stesso argomento, mi fa un gradito dovere di corrispondervi, seguendo le traccie che furono in questo medesimo periodico così luminosamente segnate da altri studiosi, i quali si fecero per lo passato a trattare lo stesso argomento riferibilmente ad altri paesi.

Ed al pari dei miei predecessori comincierò dal riconoscere io pure non essere agevol cosa segnare nettamente i confini di tale lavoro. Ho già esternato altrevolte il parere che non si possano sceverare negli studi storici, specialmente per ciò che si riferisce ai tempi da noi più lontani, le matematiche pure dalle applicate, e l'ho sostenuto anche contro il conforme parere di autorevoli studiosi ed egregi amici miei, nè le ragioni addotte in contrario mi hanno minimamente persuaso, chè anzi nel raccogliere gli elementi per il presente cenno ho trovato di che maggiormente rafforzare quel mio antico modo di vedere. Ma poichè io devo ora corrispondere agli altrui desiderii, e non fare la volontà mia propria, così dichiaro che, uniformandomi io pure alle norme seguite in altri lavori congeneri che videro già la luce in questo medesimo periodico, mi terrò semplicemente ad enumerare lavori concernenti le matematiche pure; che se talvolta, dal titolo della pubblicazione registrata, potrà giudicarsi che io abbia deviato da siffatto proposito, la deviazione sarà soltanto apparente, e la giustificazione del mio operato sarà da cercarsi nella essenza della scrittura medesima, o nell' esempio che gli altri lavori congeneri ebbero a somministrarmi.

Una corrispondente limitazione mi sono imposto per ciò che concerne le notizie biografiche, le quali posso dire d'aver

completamente escluse dalla mia rivista, essendomi tenuto a comprendervi soltanto alcune pochissime voci nelle quali mi è sembrato che il nome del personaggio, la cui vita è stata descritta, non costituisse il fine nè unico nè principale del lavoro. E per dare soltanto una idea di quanto con le due anzidette limitazioni venga a restringersi il campo di ciò che a tale proposito possono offrire gli studi italiani, basterà il dire che con tali premesse vengono a rimanere esclusi dalla seguente rassegna tutti i lavori che concernono GALILEO e la di lui scuola.

Non si troveranno del pari in questa nostra rassegna quegli emporii di notizie i quali sono costituiti dai diversi Cataloghi pubblicati dal LIBRI, da certi indici di manoscritti, come quello compilato del NARDUCCI per i Codici BONCOMPAGNI, e dalle storie delle nostre antiche università.

Non mi sono tuttavia creduto in facoltà di trascurare le collezioni biografiche, nel caso in cui esse risguardino esclusivamente o precipuamente i matematici, rimanendo perciò da parte quei lavori, così numerosi in Italia, nei quali sono contenuti cenni biografici intorno agli uomini più o meno illustri di ciascuna regione o di ciascuna provincia. Il BIERENS DE HAAN, nel dare in questo medesimo periodico la bibliografia storica delle matematiche nei Paesi Bassi,[2] la fece seguire da un elenco di notizie biografiche sopra i matematici neerlandesi, e quantunque io non abbia fatto altrettanto, credo tuttavia che tornerebbe assai utile il redigere un consimile lavoro bio-bibliografico anche per le altre nazioni, particolarmente poi se questi singoli lavori, come giova sperare, saranno insieme raccolti; e per parte mia mi riservo di contribuirvi, se ne verrà espresso il desiderio.

Dirò finalmente che, ancora sull' esempio degli altri che attesero a lavori analoghi al presente, ho escluso della mia rivista tutti i lavori italiani nei quali trovansi pubblicate in originale, tradotte e commentate le opere degli antichi matematici: lavori in altri tempi così numerosi nel nostro Paese, nel quale pur troppo oggidì tali studi non sono più in quell'onore nel quale sono giustamente tenuti, in particolar modo in Germania, dove vediamo illustri studiosi attendere con tutto l'armamentario che forniscono i sussidi della moderna critica e l'impiego delle più scrupolose norme filologiche, a nuove edizioni dei sommi scrittori greci e latini.

Il giudizio sintetico che può formarsi intorno alle condizioni presenti degli studi di storia delle matematiche in Italia, specialmente se confrontato con i tempi andati, non è per verità molto lusinghiero. Anche se numericamente in questi ultimi anni sono

andati crescendo i lavori intorno a questo argomento, non può dirsi che, e per il valore delle persone che vi attendono e per la profondità ed originalità delle ricerche, rappresenti un vero e reale progresso. La cessazione del Bullettino pubblicato dal Principe BONCOMPAGNI per il ventennio 1868—1887 diede un colpo gravissimo a questo ordine di ricerche: il tentativo fatto da me stesso or sono quattordici anni di fondare nella Università di Padova un corso di storia delle matematiche è rimasto isolato, e, debbo confessarlo con profondo rammarico, quantunque da me fedelmente proseguito con tutte le cure delle quali sono capace, non diede, neppure nella Università stessa dove viene impartito, tutti quei frutti che me ne attendevo. Nè poteva avvenire altrimenti, dato da una parte il presente ordinamento degli studi superiori in Italia, per il quale gli studenti sono indotti a trascurare tutti quei corsi i quali non sono costretti a seguire dai vigenti regolamenti, ed atteso dall' altra lo scarsissimo favore che questo ordine di indagini incontra per parte di coloro che vanno per la maggiore nell' arringo matematico e che per conseguenza potrebbero esercitare una maggiore influenza.

Lo stesso concorso aperto dall Istituto Veneto, e con premio relativamente cospicuo, per un lavoro sulla storia delle matematiche,[1] il quale sarebbe tornato di così grande aiuto alla diffusione degli studi di storia scientifica e del loro insegnamento, non diede alcun frutto; ed è questo un segno di grandissimo significato, perciocchè concorre a dimostrare che l'ambiente non è favorevole alla diffusione di questo ordine di ricerche, per quanto in questi ultimi anni abbia saputo guadagnare a sè qualche cultore di primo ordine, il quale alla profondità delle cognizioni accoppia una singolare diligenza ed una non comune operosità e fecondità. Ma queste nuove forze, per quanto valide, le quali vengono ad aggiungersi, non bastano purtroppo a colmare i gravissimi vuoti lasciati da studiosi dei quali si deplora la immatura perdita o la cessata attività scientifica, e soprattutto non bastano a modificare l'indirizzo il quale si manifesta assai più favorevole ad un intendimento degli studi che interroga l'avvenire che non a quello il quale in una più esatta o profonda conoscenza del passato cerca le basi d'un più sicuro ed effettivo progresso.

[1] ANTONIO FAVARO, *Notizie sulle fonti bibliografiche per gli studi di storia delle matematiche in Italia.* Biblioth. Mathem. 1889, 113—116.

[2] D. BIERENS DE HAAN, *Bibliographie de l'histoire des sciences mathématiques aux Pays-Bas.* Biblioth. Mathem. 1891, 13—22.

[3] ANTONIO FAVARO, *Otto anni d'insegnamento di storia delle matematiche nella Reale Università di Padova.* Biblioth. Mathem. 1887, 45—56.

[4] Biblioth. Mathem. 1889, 64.

1548.

Claricini del Gambaro, L. Oratio de laudibus et utilitatibus arithmeticae. Bononiae 1548.

1553.

Giraldi, G. G. Suarum quarundam adnotationum dialogismi XXX ad amplissimum Card. Salviatum. Item LAURENTII FRIZZOLII Solianensis dialogismus unicus de ipsius Lilii vita et operibus. Venetiis 1553.

1556.

Tartaglia, N. La seconda parte del general trattato di numeri et misure, nella quale in undici libri si notifica la più ellevata et speculativa parte della pratica Arithmetica, la qual è tutte le regole, et operationi praticali delle progressioni, radici, proportioni et quantità irrationali. Vinegia 1556.

1557.

Medici, S. De latinis numerorum notis. Venetiis 1557.

1562.

Cardano, G. Somniorum Synesiorum, omnis generis insomnia explicantes Libri III, etc. Quibus accedunt eiusdem haec etiam: De libris propriis . . . Geometriae encomium. Basileae 1562.

1615.

Biancani, G. Aristotelis loca mathematica ex universis ipsius operibus collecta et explicata. Aristotelicae videlicit expositionis complementum hactenus desideratum. Accessere de natura mathematicarum scientiarum tractatio, atque clarorum mathematicorum chronologia. Bononiae 1615.

1663.

Dati, C. Lettera a Filateti di Timauro Antiate della vera storia della cicloide, e della famosissima esperienza dell' argento vivo. Firenze 1663.

1672.

Orsati, S. De notis romanorum commentarius. Patavii 1672.

1674.

Viviani, V. Quinto libro degli Elementi d'Euclide ovvero scienza universale delle proporzioni spiegata colla dottrina del Galileo, con nuov' ordine distesa e per la prima volta pubblicata. Aggiuntevi cose varie del Galileo e del Torricelli; i ragguagli delle ultime opere loro, con altro, che dall' indice si manifesta. Firenze 1674.

1707.

Baldi, B. Cronica di matematici overo epitome dell' istoria delle vite loro. Urbino 1707.

1737.

Mazzuchelli, G. M. Notizie storiche e critiche intorno alla vita, alle invenzioni ed agli scritti di Archimede. Brescia 1737.

1739.

Poleni, G. Exercitationes Vitruvianae primae. Hoc est: commentarius criticus de M. Vitruvii Pollionis architecti X librorum editionibus, necnon de eorundem editionibus, atque de aliis, qui Vitruvium quocumque modo explicarunt, aut illustrarunt. Patavii 1739.

1741.

Belgrado, J. Ad disciplinam mechanicam, nauticam et geographicam acroasis critica et historica. Parmae 1741.

1744.

Castiglioni, G. Isaaci Newtoni, equitis aurati, opuscula mathematica, philosophica et philologica. Collegit partimque latine vertit ac recensuit etc. Accessit commentariolus de vita auctoris. Lausannae et Genevae 1744.

1753.

Gianpriamo, N. Specula parthenopea uranophilis juvenibus excitata, duplici constructione ordinique disposita. Neapoli 1753.

Giovanni, F. De numeralium notarum minuscolarum origine. Dissertatio mathematico-critica.
Calogerà: Raccolta d'opuscoli, t. **48** (1753).

1757.

Ximenes, L. Del vecchio e nuovo gnomone fiorentino e delle osservazioni astronomiche, fisiche e delle architettoniche fatte nel verificarne la costruzione, libri IV. A'quali premettesi una introduzione istorica, ecc. Firenze 1757.

1778.

Barbieri, M. Notizie istoriche dei matematici e filosofi del regno di Napoli. Napoli 1778.

Frisi, P. Elogio del cavaliere Isacco Newton. [Milano 1778.]

Torricelli, E. Racconto di alcune proposizioni proposte e passate scambievolmente tra i matematici di Francia e me dall' anno 1640 in qua.
FABRONI: Vitae Italorum, etc. **1**, 1778, p. 375.

1779.

Santini, G. Picenorum mathematicorum elogia. Maceratae 1779.

1780.

Targioni-Tozzetti, G. Atti e memorie dell' Accademia del Cimento e notizie aneddote dei progressi delle scienze in Toscana contenenti secondo l'ordine delle materie e dei tempi memorie, esperienze, osservazioni, scoperte e la rinnovazione della fisica celeste e terrestre, cominciando da Galileo Galilei fino a Francesco Redi ed a Vincenzio Viviani inclusive. I—III. Firenze 1780.

1786.

Frisi, P. Elogio del sig. D'Alembert. Milano 1786.

Hervas, L. Aritmetica delle nazioni e divisione del tempo fra gli orientali. Cesena 1786.

1787.

Verri. Memorie appartenenti alla vita ed agli studi del signor Don Paolo Frisi. Milano 1787.

1797.

Cossali, P. Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell' Algebra, storia critica, ecc. I—II. Parma 1797—1799.

1802.

Saggio sulla storia generale delle matematiche di **Carlo Bossut,** prima edizione italiana con note ed aggiunte di GREGORIO FONTANA. I—IV. Milano 1802—1803.

1804.

P. P. G. G. Delle utilità, dell' origine e del progresso della matematica. Casale 1804.

1807.

Fontana, M. Osservazioni storiche sopra l'aritmetica di Francesco Maurolico.
Memorie dell' istituto nazionale (Bologna) **2**, 1807, 275—296.

1811.

Dragoni, A. Sul metodo aritmetico degli antichi romani. Cremona 1811.

1813.

Giuglielmini, G. B. Elogio di Lionardo Pisano recitato nella grand' aula della Regia Università di Bologna nel giorno XII novembre MDCCCXII. Bologna 1813.

Memoria sulle cifre arabiche attribuite fino a giorni nostri agl' indiani, ma inventate in un paese più rimoto dell' India. 123456789. Milano 1813.

1818.

de Matthaeis, G. Dissertazione sull' origine de' numeri romani. Roma 1818.

1819.

Oliva, A. M. Gli elementi della stereometria degli antichi. Napoli 1819.

1821.

Franchini, P. Saggio sulla storia delle matematiche corredato di scelte notizie biografiche ad uso della gioventù. Lucca 1821.

1823.

Scinà, D. Discorso intorno ad Archimede. Palermo 1823.

Scorza, G. Divinazione sulla geometria analitica degli antichi, ovvero sul metodo usato dalle greche scuole nella risoluzione de' problemi. Napoli 1823.

1827.

Franchini, P. La storia dell' algebra e de' suoi principali scrittori. Lucca 1827.

1833.

Colangelo, F. Storia dei filosofi e dei matematici napolitani, e delle loro dottrine da' Pitagorici sino al secolo XVII dell'era volgare. I—III. Napoli 1833—1834.

1835.

Libri, G. Histoire des sciences mathématiques en Italie depuis la renaissance des lettres jusqu'à la fin du XVII siècle. I. Paris 1835.

1838.

Minich, S. R. Intorno al metodo del Tartaglia per la risoluzione delle equazioni cubiche. Padova 1838.

Libri, G. Histoire des sciences mathématiques en Italie depuis la renaissance des lettres jusqu'à la fin du dix-septième siècle. I—IV. Paris 1838—1841.

1839.

Libri, G. Notice sur l'Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie etc. par M. Chasles.
Journal des savants, Août 1839, 493—505.

1843.

Silvestrelli, S. M. Calcolo completo dei numeri romani ossia mare delle matematiche. Roma 1843.

1844.

Libri, G. Notice sur la correspondance mathématique et physique de quelques géomètres célèbres du XVIII[e] siècle, précédée d'une notice sur les travaux de Léonard Euler, tant imprimés qu'inédits, et publiée sous les auspices de l'Académie impériale de St. Pétersbourg, de P. H. Fuss.
Journal des savants, Juillet 1844, 385—390; Janvier 1846, 50—62.

Piola, G. Elogio di Bonaventura Cavalieri. Milano 1844.

Rambelli, G. Intorno invenzioni e scoperte italiane. Lettere. Modena 1844.

1845.

de Luca, F. Memorie per rivendicare alla Scuola italica tutta l'antica geometria. Napoli 1845.

de Luca, F. Colpo d'occhio sui progressi delle scienze matematiche dai tempi più rimoti fino ai nostri giorni.

1846.

Gherardi, S. Di alcuni materiali per la storia della Facoltà Matematica nell' antica Università di Bologna composti nella opportunità di stendere delle notizie sul Padre Bonaventura Cavalieri.
Annali delle scienze naturali (Bologna) **5**$_2$, 1846, 241—368.

de' Sallustj, G. Storia dell' origine e de' progressi delle matematiche di più autori riunita in commentarj a forma di cronica. I—V. Roma 1846.

1851.

Boncompagni, B. Delle versioni fatte da Platone Tiburtino, traduttore del secolo duodecimo.
Roma, Accad. d. Lincei, Atti **4**, 1851.

Boncompagni, B. Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese, traduttore del secolo duodecimo e di Gherardo da Sabbionetta astronomo del secolo decimoterzo.
Roma, Acc. d. Lincei, Atti **4**, 1851.

1852.

Barciulli, F. Memorie intorno a Fra Luca Pacioli e Pietro Della Francesca.
Giornale arcadico di scienze (Roma) **126**, 1852.

Boncompagni, B. Della vita e delle opere di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo.
Roma, Acc. d. Lincei, Atti **5**, 1852, 5—91, 208—245.

1854.

Boncompagni, B. Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo.
Giornale arcadico di scienze (Roma) **131**, 3—129; **132**, 376; **133**, 3—91.

Nannucci, V. Intorno ad alcuni trattati d'aritmetica e di geometria manoscritti nell' I. e R. Biblioteca Riccardiana di Firenze.
Giornale arcadico di scienze **138**, 1854, 328—335.

Nannucci, V. Intorno ad un trattato d'aritmetica che trovasi manoscritto nella I. e R. Biblioteca Magliabechiana di Firenze.
Giornale arcadico di scienze **137**, 1854.

1855.

Boncompagni, B. Intorno alla risoluzione delle equazioni simultanee $x^2+h=y^2$, $x^2-h=z^2$.
Annali di sc. matem. **6**, 1855, 135—154.

Genocchi, A. Intorno a tre scritti inediti di Leonardo Pisano pubblicati da Baldassarre Boncompagni.
Annali di sc. matem. **6**, 1855, 115—120.

Genocchi, A. Intorno ad alcuni problemi trattati da Leonardo Pisano nel suo *Liber quadratorum*.
Annali di sc. matem. **6**, 1855, 186—209, 251—259.

Genocchi, A. Sopra tre scritti inediti di Leonardo Pisano pubblicati da Baldassarre Boncompagni. Note analitiche.
Annali di sc. matem. **6**, 1855, 161—185, 218—251, 273—320, 345—362.

1857.

Cossali, P. Scritti inediti pubblicati da B. Boncompagni, seguiti da un' appendice contenente quattro lettere dirette al medesimo P. Cossali ed una nota intorno a queste lettere. Roma 1857.

Genocchi, A. Leonardo Pisano, matematico del secolo XIII.
Rivista contemporanea **40**, 1857, 287—321.

Veratti, B. Ricerche e congetture intorno all' aritmetica degli antichi Romani. Modena 1857.

1859.

Veratti, B. Del vaglio d'Eratostene e della illustrazione fattane da Samuele Horsley negli Atti della R. Società di Londra.
Modena, Accad. d. sc., Memorie **3**, 1859.

1860.

Veratti, B. Dei matematici italiani anteriori all' invenzione della stampa. Commentario storico.
Opuscoli religiosi, letterarii e morali (Modena 1860), T. **5**, **6** e **7**. Fasc. 15—19.

1863.

Narducci, E. Intorno a due edizioni della Summa de Arithmetica di fra Luca Pacioli. Roma 1863.

Veratti, B. Sopra la terminologia matematica degli scrittori latini.
Modena, Accad. d. sc., Memorie **5**, 1863.

1864.

Codazza, G. Il principe Boncompagni e la storia delle scienze matematiche in Italia.
Il politecnico (Milano) **20**, 1864.

Vivanet, F. Del carattere e della storia della Geometria Descrit tiva. Cagliari 1864.

1865.

Cipolletti, D. Sopra alcuni lavori del principe Boncompagni risguardanti la storia delle matematiche in Italia.
Corrispondenza scientifica (Roma) **17**, 1865, ni 12, 14.

Narducci, E. Intorno ad alcuni passi notevoli d'antiche opere relativi alle scienze fisiche e matematiche.
Il politecnico (Milano) 1865, 342—350. — Giornale arcadico **191**, 1864, 1—24.

Libri, G. Histoire des sciences mathématiques en Italie, depuis la renaissance des lettres jusqu'à la fin du dix-septième siècle. Deuxième édition. I—IV. Halle 1865.

Martinez, D. Origine e progressi dell' Aritmetica. Sunto istorico seguito da una dissertazione sull' aritmetica binaria. Messina 1865.

1868.

Piani, D. Intorno al centro di gravità. Notizie storico-critiche.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **1**, 1868, 41—42.

1870.

Riccardi, P. Biblioteca Matematica Italiana dalla origine della stampa ai primi anni del secolo XIX. Modena 1870—1880.

Stiattesi, A. Sull' Aritmetica. Dissertazione storico-critica.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **3**, 1870, 389—408.

1871.

Boncompagni, B. Intorno alle definizioni di Erone.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **4**, 1871, 122—126, 512.

Jacoli, F. Intorno ad un comento di Benedetto Vittori, medico Faentino al *Tractatus proportionum* di Alberto di Sassonia.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **4**, 1871, 493—497.

Boncompagni, B. Intorno al *Tractatus proportionum* di Alberto di Sassonia.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **4**. 1871, 498—511.

1873.

Boncompagni, B. Intorno ad un passo della Geometria di Boezio relativo al pentagono stellato.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **6**, 1873, 341—356.

Vivanet, F. Dei più notabili progressi della geometria nel corrente secolo decimonono. Cagliari 1873.

1874.

Boncompagni, B. Intorno al comento di Proclo sul primo libro degli Elementi di Euclide.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **7**, 1874, 152—165.

Favaro, A. Notizie storiche sulle frazioni continue dal secolo decimoterzo al decimosettimo.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **7**, 1874, 451—502, 523—589.

1875.

Boncompagni, B. Intorno ad una proprietà dei numeri dispari.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **8**, 1875, 51—62.

Favaro, A. Saggio di cronografia dei matematici dell' antichità. Padova 1875.

Favaro, A. Sulla ipotesi geometrica nel Menone di Platone. Padova 1875.

1876.

Boncompagni, B. Intorno ad un trattato d'aritmetica di Giovanni Widmann di Eger.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **9**, 1876, 188—210.

Bombelli, R. Dell' antica numerazione italica e dei relativi numeri simbolici. Studi archeologici-critici. Parte prima. Roma 1876.

I sei cartelli di matematica disfida primamente intorno alla generale risoluzione delle equazioni cubiche di Lodovico Ferrari coi sei contro-cartelli in risposta di Nicolò Tartaglia, comprendenti le soluzioni di quesiti dall' una e dall' altra

parte proposti. Raccolti, autografati e pubblicati da **E. Giordani.** Premesse notizie bibliografiche ed illustrazioni sui cartelli medesimi, estratte da documenti già a stampa ed altri manoscritti favoriti dal Comm. Prof. **S. Gherardi.** Milano 1876.

Govi, G. Applicazione delle funzioni circolari e dei logaritmi alla soluzione di alcuni problemi rivendicata a Bonaventura Cavalieri. Nota storica.
Roma, Accad. d. Lincei, Atti $\mathbf{3}_2$, 1876.

1877.

Boncompagni, B. Intorno alla somma delle quarte potenze dei numeri naturali.
Bullet. di bibliogr. d. sc. matem. **10**, 1877, 294—302.

Favaro, A. Intorno ad alcuni lavori sulla storia delle scienze matematiche e fisiche recentemente pubblicati dal prof. Sigismondo Günther.
Venezia, Istituto Veneto, Atti $\mathbf{3}_5$, 1877, 913—958.

Narducci, E. Intorno ad un manoscritto della Biblioteca Alessandrina contenente gli apici di Boezio senz' abaco e con valore di posizione.
Roma, Accad. d. Lincei, Atti $\mathbf{1}_3$, 1877, 503—509.

1878.

Favaro, A. Intorno ad una statistica degli scienziati vissuti nei due ultimi secoli.
Padova, Accad. d. sc., Rivista **28**, 1878, 25—67.

Favaro, A. Notizie storico-critiche sulla costruzione delle equazioni.
Modena, Accad. d. sc., Memorie **18**, 1878, 127—332.

Favaro, A. La storia delle matematiche nella Università di Padova.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **11**, 1878, 799—801.

Zanotti Bianco, O. Sopra due passi della storia della teoria matematica delle probabilità del signor Todhunter.
Giornale di matematiche **16**, 1878, 26—30.

1879.

Favaro, A. Sulla elica calcolatoria di Fuller con cenni storici sopra gli strumenti calcolatori a divisione logaritmica.
Venezia, Istituto Veneto, Atti $\mathbf{5}_5$, 1879, 495—521.

Favaro, A. Intorno alla vita e alle opere di Prosdocimo de' Beldomandi, matematico padovano del secolo XV.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **12**, 1879, 1—74, 115—251.

Favaro, A. Sulla interpretazione matematica del papiro Rhind.
Modena, Accad. d. sc., Memorie **19**, 1879, 89—145.

Riccardi, P. Nuovi materiali per la storia della facoltà matematica nell' antica Università di Bologna.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **12**, 1879, 299—303.

Boncompagni, B. Intorno alle vite inedite di tre matematici (Giovanni Danck di Sassonia, Giovanni de Lineriis, e Fra Luca Pacioli da Borgo San Sepolcro) scritte da Bernardino Baldi.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **12**, 1879, 354—419.

Boncompagni, B. Appendice di documenti inediti relativi a Fra Luca Pacioli.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **12**, 1879, 428—438.

Favaro, A. Intorno ad alcune notizie inedite relative a Niccolò Copernico raccolte e pubblicate dal Prof. Massimiliano Curtze.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **12**, 1879, 775—807.

Boncompagni, B. Intorno a due scritti di Leonardo Euler.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **12**, 1879, 808—811.

Boncompagni, B. Giunte all' articolo intitolato: »Intorno alle vite inedite di tre Matematici (Giovanni Danck di Sassonia, Giovanni de Lineriis e fra Luca Pacioli da Borgo San Sepolcro) scritte da Bernardino Baldi.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **12**, 1879, 863—872.

1880.

Boncompagni, B. Intorno ad un trattato di aritmetica del P. D. Smeraldo Borghetti Lucchese, Canonico Regolare della Congregazione del SS. Salvatore.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **13**, 1880, 1—80, 121—200, 245—368.

Boncompagni, B. Michele Chasles.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **13**, 1880, 815—827.

Favaro, A. Appendice alle notizie storico-critiche sulla costruzione delle equazioni.
Modena, Accad. d. sc., Memorie **19**, 1879, 233—244.

Favaro, A. Le matematiche nello Studio di Padova dal principio del secolo XIV alla fine del XVI.
Padova, Accad. d. sc., Nuovi saggi **9**: 1, 1880, 1—91.

Favaro, A. Sulla Biblioteca Matematica del prof. P. Riccardi.
Venezia, Istituto Veneto, Atti **7**, 1880, 47—64.

Narducci, E. Notizie di libri relativi alle matematiche, posseduti dalla Biblioteca Alessandrina, e non citati dal Conte Giovanni Maria Mazzuchelli nella parte stampata della sua opera intitolata »Gli scrittori d'Italia« ecc.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **13**, 1880, 369—378.

Riccardi, P. Nota statistica di storia matematica.
Modena, Accad. d. sc., Memorie **20**, 1880, 299—310.

1881.

Boncompagni, B. Intorno ad uno scritto inedito di Adelardo di Bath intitolato »Regulae Abaci«.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **14**, 1881, 1—90.

Boncompagni, B. Testamento inedito di Nicolò Tartaglia.
Collectanea Mathematica (Milano 1881), 363—412.

Forti, A. Saggio di nuove tavole di funzioni iperboliche aventi per argomento il loro doppio fattore, precedute dalla loro storia, dalla teorica e da applicazioni. Pisa 1881.

Schiaparelli, G. V. Sulla nuova Storia delle Matematiche pubblicata dal Prof. M. Cantor.
Milano, Istituto Lombardo, Rendiconti **14**, 1881, 62—69.

1882.

Favaro, A. Intorno al primo volume delle lezioni sulla storia della matematica del prof. Maurizio Cantor.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **15**, 1882, 183—205.

Favaro, A. Intorno alla vita ed alle opere di Bartolomeo Sovero, matematico svizzero del secolo XVII.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **15**, 1882, 1—48.

Favaro, A. Intorno al testamento inedito di Niccolò Tartaglia pubblicato da D. B. Boncompagni.
Padova, Accad. d. sc., Rivista **32**, 1882, 71—108.

Garbieri, G. Come l'algebra s'introdusse e si svolse in Europa per opera degli italiani. Reggio Emilia 1882.

Narducci, E. Intorno a due trattati inediti d'Abaco contenuti in due codici vaticani del secolo XII.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **15**, 1882, 111—134.

Narducci, E. Intorno ad un comento inedito di Remigio d'Auxerre al »Satyricon«, di Marziano Capella e ad altri comenti al medesimo »Satyricon«.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **15**, 1882, 505—565.

Narducci, E. Intorno a due trattati d'Abaco manoscritti del secolo XII.
Roma, Accad. dei Lincei, Transunti **6_3**, 1882, 324—326.

1883.

Favaro, A. Preliminari ad una restituzione del libro di Euclide sulla divisione delle figure piane.
Venezia, Istituto Veneto, Atti **1_6**, 1883, 393—397.

Favaro, A. Sul carteggio inedito tra Lagrange e d'Alembert.
Venezia, Istituto Veneto, Atti **1_6**, 1883, 533—545.

Favaro, A. Notizie storico-critiche sulla divisione delle aree.
Venezia, Istituto Veneto, Memorie **22**, 1883, 129—154.

Favaro, A. Intorno ad alcuni lavori di bibliografia e di storia delle matematiche presentati in omaggio alla Reale Accademia delle Scienze di Padova da M. Curtze e da E. Narducci.
Padova, Accad. d. sc., Rivista **33**, 1883, 67—83.

Narducci, E. Alcuni libri rari relativi alle matematiche e ad altre scienze affini posseduti dalla Biblioteca Alessandrina di Roma.
Il Buonarroti (Roma) 1_3, 1883, 209—233.

Narducci, E. Sur un manuscrit du Vatican du XIVe siècle, contenant un traité de calcul emprunté à la méthode Gobari.
Bullet. des sc. mathém. 7_2, 1883, 247—256.

Jacoli, F. Intorno al problema »le noeud de cravate», e ad alcune opere d'Urbano d'Aviso romano.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **16**, 1883, 445—456.

Boncompagni, B. Intorno a due quesiti proposti nella raccolta intitolata »Giornale degli eruditi e curiosi».
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **16**, 1883, 673—686.

Favaro, A. Intorno ad alcuni studi del dott. J. L. Heiberg sopra Euclide.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **16**, 1883, 565—571.

1884.

Genocchi, A. Résumé de différentes recherches sur les ovales de Descartes et quelques autres courbes.
Mathesis **4**, 1884, 49—52.

Genocchi, A. Sur un manuscrit de Fermat, récemment publié.
Mathesis **4**, 1884, 106—108.

Menabrea, L. F, Sur la machine analytique de Charles Babbage.
Paris, Acad. d. sc., Comptes rendus **99**, 1884, 179—182.

1885.

Favaro, A. Notice sur les manuscrits de mathématiques de la collection Libri-Ashburnham achetée par le gouvernement italien.
Biblioth. Mathem. 1885, 44—46.

Favaro, A. Appendice agli studi intorno alla vita ed alle opere di Prosdocimo de' Beldomandi, matematico padovano del secolo XV.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **18**, 1885, 405—423.

de Marchi, L. Di tre manoscritti del Maurolicio che si trovano nella Biblioteca Vittorio Emanuele di Roma.
Biblioth. Mathem. 1885, 141—144, 193—195.

Narducci, E. Trattatello sulle divisioni, secondo il sistema dell'abaco, scritto in Italia innanzi al secolo XII.
Roma, Accad. dei Lincei, Rendiconti **1**, 1885, 563—566.

1886.

Boncompagni, B. Sur un manuscrit du traité de géométrie attribué à Petrus de Dacia.
Biblioth. Mathem. 1885, 196.

Boncompagni, B. Sur l'Histoire des sciences mathématiques et physiques de M. Maximilien Marie. I, II.
Biblioth. Mathem. 1886, 43—45, 87—90.

de Marchi, L. Sull' ortografia del nome del matematico messinese Maurolicio.
Biblioth. Mathem. 1886, 90—92.

Riccardi, P. Per una completa collezione delle opere matematiche di Lorenzo Mascheroni.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **19**, 1886, 59—66.

Favaro, A. Ricerche ulteriori intorno alla vita ed alle opere di Bartolomeo Sovero, matematico svizzero del secolo XVII.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **19**, 1886, 99—144.

Baldi, B. Vite inedite di matematici italiani pubblicate da E. NARDUCCI.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **19**, 1886, 335—406, 437—489, 521—640.

Favaro, A. Carteggio inedito di Ticone Brahe, Giovanni Keplero e di altri celebri astronomi e matematici dei secoli XVI e XVII con Giovanni Antonio Magini, tratto dall' Archivio Malvezzi de Medici in Bologna. Bologna 1886.

Zanotti-Bianco, O. L'esagramma di Pascal. Nota storica.
Torino, Accad. d. sc., Atti **21**, 1886, 686—697.

Riccardi, P. Le prime edizioni degli Elementi d'Euclide.
Il bibliofilo (Bologna) **6**, 1886.

1887.

Baldi, B. Vita di Pitagora, tratta dall' autografo ed annotata da E. NARDUCCI.
Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **20**, 1887, 197—308.

Favaro, A. Otto anni d'insegnamento di storia delle matematiche nella Università di Padova.
Biblioth. Mathem. 1887, 49—54.

Jacoli, F. Isaaco Newton (a proposito d'un prossimo centenario).
Annuario astro-meteorologico (Venezia) **5** (1887), 153—157.

Loria, G. Il passato e il presente delle principali teorie geometriche. Monografia storica.
Torino, Accad. d. sc., Memorie **38**, 1887, 327—376.

Traduzioni:

Die hauptsächlichen Theorien der Geometrie in ihrer früheren und heutigen Entwickelung. Historische Monographie. Unter Benutzung zahlreicher Zusätze und Verbesserungen seitens des Verfassers ins Deutsche übertragen von F. SCHÜTTE. Mit einem Vorworte von R. STURM. Leipzig 1888.

Przeszlosc i stan obecny najwazniejszych teoryj geometrycznych. Przeklad uzupelniony licznemi dodatkami wydany za upowaznieniem autora przez S. DICKSTEINA. Warszawa 1889.

Riccardi, P. Saggio di una bibliografia Euclidea. I—IV.
Bologna, Accad. d. sc. dell' Istituto, Memorie $\mathbf{8}_4$, 1887, 399—523; $\mathbf{9}_4$, 1888, 319—343; $\mathbf{1}_5$, 1890, 25—84.

1888.

Favaro, A. Bonaventura Cavalieri nello Studio di Bologna.
Atti e memorie della deputazione di Storia patria per le provincie di Romagna, $\mathbf{6}_3$, 1888, 120—177.

Loria, G. Notizie storiche sulla Geometria numerativa.
Biblioth. Mathem. 1888, 39—48, 67—80.

1889.

Beltrami, E. Un precursore italiano di Legendre e Lobatschewsky.
Roma, Accad. d. Lincei, Rendiconti $\mathbf{5}_4$: 1, 1889, 441—448.

Besso, D. Sopra una ricerca goniometrica di Aristarco di Samo.
Periodico di matematica (Roma) **4**, 1889, 14—17.

Besso, D. Sulla ricerca del volume della piramide triangolare quando sono date le lunghezze dei suoi spigoli.
Periodico di matem. **4**, 1889, 144—145.

Loria, G. Addizioni alle Notizie storiche sulla Geometria numerativa.
Biblioth. Mathem. 1889, 23—27.

Loria, G. I poligoni di Poncelet. Torino 1889.

Loria, G. Rassegna di alcuni scritti sui poligoni di Poncelet.
Biblioth. Mathem. 1889, 67—74.

Riccardi, P. Di alcune opere di prospettiva di autori italiani ommesse nella »Histoire de la Perspective« di M. Poudra.
Biblioth. Mathem. 1889, 39—42.

Carrara, B. La coincidenza dei due metodi di Newton e Lagrange nelle radici quadrate irrazionali dei numeri interi. Torino 1889.

Favaro, A. Notizie sulle fonti bibliografiche per gli studi di storia delle matematiche in Italia.
Biblioth. Mathem. 1889, 113—116.

Favaro, A. Il Bullettino di Bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da D. B. Boncompagni (1868—1887).
Biblioth. Mathem. 1889, 109—112.

d'Ovidio, E. Uno sguardo alle origini e allo sviluppo della matematica pura. Torino 1889.

1890.

Loria, G. Il periodo aureo della geometria greca. Saggio storico.
Torino, Accad. d. sc., Memorie **40**$_2$, 1890, 369—445.

d'Ovidio, E. Altra addizione alla nota sui determinanti di determinanti.
Torino, Accad. d. sc., Atti **26**, 1890, 131—133.

Riccardi, P. De propositione novae Bibliothecae mathematicae italicae saeculi XIX.
Biblioth. Mathem. 1890, 56.

Riccardi, P. Saggio d'una biblioteca matematica italiana del secolo XIX.
Bologna, Accad. d. sc. dell' Istituto, Memorie **10**$_4$, 1890, 633—651.

1891.

Favaro, A. Sopra la parte fatta alla storia in un disegno di bibliografia delle matematiche.
Rivista di matematica **1**, 1891, 72—77.

Loria, G. Il teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche. Contributo alla storia critica dell' algebra.
Rivista di matematica **1**, 1891, 185—248.

Loria, G. Esame di alcune ricerche concernenti l'esistenza di radici nelle equazioni algebriche.
Biblioth. Mathem. 1891, 99—112.

Vivanti, G. Sur une classe de grandeurs infiniment petites considerée par Newton.
Biblioth. Mathem. 1891, 97—98.

Sur les découvertes mathématiques de Wronski.

Par S. DICKSTEIN à Warszawa.

2. Fonctions alephs.

Grâce aux travaux de NEWTON, de GIRARD, de WARING, de VANDERMONDE et de LAGRANGE, l'importance des fonctions symétriques pour la théorie des équations était bien appréciée par les mathématiciens. WRONSKI étudie la classe des fonctions symétriques complètes (*Philosophie des mathématiques* p. 65) qu'il a nommées fonctions *alephs.* Il forme ces fonctions en prenant le développement de la puissance $m^{ième}$ du polynome $n_1 + n_2 + \ldots$ $\ldots + n_\omega$, où les n sont des nombres quelconques, et en remplaçant par l'unité les coefficients de ce développement. Il désigne la fonction aleph obtenue de cette manière par

$$\aleph[n_1 + n_2 + \ldots + n_\omega]^{(m)}$$

ou bien simplement par $\aleph(m)$, et il énonce les propriétés de cette espèce de fonctions. Si l'on fait $n_1 + n_2 + \ldots + n_\omega = N_\omega$, on aura la relation générale

$$\aleph[N_\omega - n_p]^{(m)} - \aleph[N_\omega - n_q]^{(m)} = (n_q - n_p)\aleph[N_\omega]^{(m)},$$

n_p et n_q étant deux quelconques parmi les quantités $n_1, n_2, \ldots, n_\omega$, et m un nombre arbitraire.

Si l'on a une équation du degré ω:

$$0 = A_0 + A_1 x + \ldots + A_\omega x^\omega$$

dont les racines soient les quantités $-n_1, -n_2, \ldots, -n_\omega$, on aura

$$\aleph[N_\omega]^{(1)} = A_{\omega-1}$$
$$\aleph[N_\omega]^{(2)} = A_{\omega-1}\aleph[N_\omega]^{(1)} - A_{\omega-2}$$
$$\aleph[N_\omega]^{(3)} = A_{\omega-1}\aleph[N_\omega]^{(2)} - A_{\omega-2}\aleph[N_\omega]^{(1)}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

WRONSKI reprend ses formules dans la *Résolution générale des équations* (p. 8). Il croit encore ici que toutes les fonctions alephs à indices négatifs sont égales à zéro; il corrige cette erreur dans le supplément aux *Canons de logarithmes* où il indique (sans démonstration) les expressions générales des fonctions alephs à indices positifs et à indices négatifs. Pour les fonctions à indices positifs de l'équation

$$x^\omega - A_1 x^{\omega-1} + A_2 x^{\omega-2} + \ldots + (-1)^\omega A_\omega = 0$$

il donne l'expression

$$\aleph(m)=A_1^m-A_1^{m-2}(m-1)A_2$$
$$+A_1^{m-4}\left\{(m-2)A_1A_3+(m-2)^{2|-1}\frac{A_2^2}{1^{2|1}}\right\}$$
$$-A_1^{m-6}\left\{(m-3)A_1^2A_4+(m-3)^{2|-1}A_1A_2A_3\right.$$
$$\left.+(m-3)^{3|-1}\frac{A_2^3}{1^{3|1}}\right\}+\ldots.$$

Une expression analogue existe pour les fonctions alephs à indices négatifs, $\aleph(-1)$, $\aleph(-2)$, ..., $\aleph(-\omega+1)$ étant zéro. Ces formules sont répétées dans la *Réforme des mathématiques.*

Outre ces fonctions alephs, dites simples, Wronski a étudié aussi les fonctions alephs composées »des différents ordres». Les fonctions composées du premier ordre designées par $\aleph(\rho, \alpha)$ ont été construites d'après la formule

$$\aleph(\rho, \alpha)=\aleph(\rho)\aleph(\rho+\alpha)-\aleph(\rho-1)\aleph(\rho+\alpha-1);$$

les fonctions alephs composées du deuxième ordre: $\aleph(\rho, \alpha_1, \alpha_2, \beta)$ ont été définies par la formule

$$\aleph(\rho, \alpha_1, \alpha_2, \beta)=\aleph(\rho, \alpha_1)\aleph(\rho+\beta, \alpha_1)-\aleph(\rho-1, \alpha_1)\aleph(\rho+\beta, \alpha_1)$$

etc.; Wronski n'a pas donné les expressions générales de ces fonctions.

La théorie des fonctions alephs de Wronski peut-être développée aujourd'hui avec facilité. La fonction $\aleph(m)$ de l'équation $f(x)=0$ peut être donnée sous la forme

$$\aleph(m)=\sum_{i=1}^{i=\omega}\frac{x_i^{m+\omega-1}}{f'(x_i)},$$

$x_1, x_2, \ldots, x_\omega$ étant les racines (inégales) de l'équation donnée. Le second membre de cette formule peut être exprimé par un quotient de deux déterminants orthosymétriques. En fonction des coefficients de l'équation, la fonction $\aleph(m)$ peut être écrite sous la forme de déterminant:

$$\begin{vmatrix} A_1, & A_2, & A_3, & \ldots, & A_m \\ 1, & A_1, & A_2, & \ldots, & A_{m-1} \\ 0, & 1, & A_1, & \ldots, & A_{m-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots, & 1, & A_1 \end{vmatrix}$$

qui est égal à la somme

$$\sum_{(a_1+2a_2+\ldots+\omega a_\omega=m)}(-1)^{m+a_1+a_2+\ldots+a_\omega}\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_\omega)!}{a_1!\,a_2!\ldots a_\omega!}A_1^{a_1}A_2^{a_2}\ldots A_\omega^{a_\omega}.$$

C'est de cette dernière forme, analogue à la formule de Waring, que dérivent immédiatement les expressions générales de Wronski.

Les fonctions alephs composées peuvent être exprimées aussi en fonctions des racines ou des coefficients de l'équation.

Dans la théorie des nombres, Wronski a introduit une forme différente des fonctions aleps. Si S et R sont deux nombres entiers pour lesquels on fait l'opération de la recherche du plus grand diviseur commun, et si $a_1, a_2, \ldots, a_{\omega-1}, a_\omega$ sont les quotients de ces divisions, on aura les fonctions alephs suivantes:

$$\aleph\left[\frac{S}{R},\omega\right]^{(0)}=1$$

$$\aleph\left[\frac{S}{R},\omega\right]^{(1)}=a_1\aleph\left[\frac{S}{R},\omega\right]^{(0)}$$

$$\aleph\left[\frac{S}{R},\omega\right]^{(2)}=a_2\aleph\left[\frac{S}{R},\omega\right]^{(1)}+\aleph\left[\frac{S}{R},\omega\right]^{(0)}$$

. . . .

On voit que ces fonctions alephs constituent les numérateurs des fractions réduites qu'on trouve en développant le quotient $\frac{S}{R}$ en une fraction continue.

Ces deux formes des fonctions alephs peuvent être comprises dans une définition générale.

On retrouve les fonctions symétriques de Wronski dans quelques recherches de Cauchy et de Jacobi.[13] Fürstenau,[14] Nägelsbach,[15] d'Ocagne,[16] Crocchi[17] etc. s'occupaient aussi de leur théorie.

Passons à l'application des fonctions alephs à la théorie des équations.

3. Méthode téléologique de la résolution des équations.

Cette méthode une extension des méthodes de Daniel Bernoulli[18] et d'Euler.[19] Wronski expose sa méthode pour les équations du cinquième degré dans le supplément aux *Ca-*

nons de logarithmes (1827) et pour les équations de tous les degrés dans la *Reforme du savoir humain* (1848).

L'idée principale de la méthode de Wronski consiste dans la détermination d'un polynome dont les coefficients dépendent des fonctions alephs de l'équation donnée et qui sous une certaine condition devient un facteur de plus en plus exact de l'équation à mesure que les indices des fonctions alephs deviennent de plus en plus grands. Cette idée est dérivée chez Wronski d'une idée plus générale de la génération dite *neutre,* par laquelle on construit la nature des fonctions cherchées par des degrés de l'exactitude de plus en plus croissante. C'est aussi la même génération qui nous fait connaître la nature des quantités irrationelles et transcendantes.

Soit proposée l'équation

$$0 = z^{\omega} - A_1 z^{\omega-1} + A_2 z^{\omega-2} + \dots + (-1)^{\omega} A_{\omega},$$

on aura d'après Wronski, pour la décomposition de cette équation en ses facteurs, l'équation générale du degré $\omega - 1$:

$$0 = z^{\omega-1} - P_2 z^{\omega-2} + P_3 z^{\omega-3} + \dots + (-1)^{\omega-1} P_{\omega}$$

dans laquelle, en prenant pour q un nombre entier de plus en plus grand jusqu'à l'infini, les coefficients P_2, P_3, ... seront formés avec les fonctions aleph de la manière suivante

$$P_{\mu} \aleph(q) = A_{\mu} \aleph(q-1) - A_{\mu+1} \aleph(q-2) + \dots$$
$$\dots + (-1)^{\omega-\mu} A_{\omega} \aleph[q - (\omega - \mu + 1)], \qquad (\mu = 2, 3, \dots)$$

en ne perdant pas de vue que les coefficients A_{μ}, $A_{\mu+1}$, ... sont zéro lorsque les indices μ, $\mu + 1$ ... sont plus grands que ω. Il peut arriver d'abord que dans des cas spéciaux toutes les racines de l'équation précédente peuvent être immédiatement des racines de l'équation proposée. Alors doit être remplie la condition

$$\frac{\aleph(q)}{\aleph(q-1)} = \frac{\aleph(q+a+1)}{\aleph(q+a)},$$

a étant un nombre entier arbitraire. Nous aurons alors une racine de l'équation par la formule

$$z = \frac{\aleph(q)}{\aleph(q-1)};$$

c'est le cas de la méthode de Bernoulli.

Lorsque la condition donnée plus haut ne peut pas être réalisée, on réduit le facteur du degré $\omega - 1$, en donnant un accroissement d'unité à l'indice q des fonctions alephs dans les

coefficients de ce facteur et, en prenant la différence des valeurs de ce facteur, on obtient une équation réduite du degré $\omega-2$:

$$0 = z^{\omega-2} - a_3 z^{\omega-3} + \ldots + (-1)^{\omega-2} a_\omega,$$

dont les coefficients peuvent être exprimés par les fonctions alephs composées du premier ordre. Si ces fonctions satisfont à une certaine condition, cette équation formera, pour des valeurs suffisamment grandes de l'indice, un facteur du degré $\omega-2$ de l'équation donnée. Et on trouve alors facilement le facteur complémentaire du second degré dont les deux racines sont les racines de l'équation donnée. Nous nous trouvons ici dans le cas de la méthode d'Euler.

En poursuivant cette marche, Wronski arrive au facteur du degré $\omega-3$ dont les coefficients dépendent des fonctions alephs composées du deuxième ordre et détermine la condition sous laquelle ce facteur sera réellement un facteur de l'équation donnée. Cette condition étant remplie, on trouve immédiatement le facteur complémentaire du troisième degré dont les racines sont égales, pour des valeurs assez grandes des indices, aux racines de l'équation donnée. On peut aller plus loin, jusqu'au facteur du degré $\frac{1}{2}\omega$ ou $\frac{1}{2}(\omega-1)$ et son complémentaire. La notation incommode des fonctions alephs composées empêcha Wronski de donner l'expression générale de l'un ou de l'autre de ces facteurs, mais par des exemples complétement résolus il a montré la fécondité de sa méthode.

A l'aide de déterminants on peut exprimer le facteur complémentaire du degré $n+\omega$ sous cette forme très simple

$$\begin{vmatrix} x^n, & x^{n-1}, & x^{n-2}, & \ldots, & 1 \\ \aleph_{q+n}, & \aleph_{q+n-1}, & \aleph_{q+n-2}, & \ldots, & \aleph_q \\ \aleph_{q+n-1}, & \aleph_{q+n}, & \aleph_{q+n-1}, & \ldots, & \aleph_{q+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \aleph_{q+2n-1}, & \aleph_{q+2n-2}, & \aleph_{q+2n-3}, & \ldots, & \aleph_{q+n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Les racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de ce facteur seront égales à n racines de l'équation donnée, en commençant par la racine ayant le moindre module et passant aux autres avec des modules croissants.

Le problème posé et résolu par Wronski, fut traité plus tard indépendamment par Fourier,[20] Stern,[21] Jacobi[22] et Fürstenau[23] etc. La solution la plus élégante du problème est due à Jacobi. Elle nous donne, comme j'avais montré,[24] une déduction simple de la méthode téléologique et la forme donnée

ci-dessus du facteur complémentaire. La méthode de FÜRSTENAU, que BALTZER[25] et GÜNTHER[26] ont supposée nouvelle, est aussi identique avec la méthode de JACOBI, c'est à dire avec la méthode téléologique de WRONSKI.[27]

[13] CAUCHY, *Sur la détermination du nombre des racines réelles.* Journal de l'éc. polytech. Cah. **17**, 1815, p. 457. — JACOBI, *De functionibus alternantibus etc.* Journal für Mathem. **22**, 1841, 360—371.

[14] FÜRSTENAU, *Darstellung der reellen Wurzeln der algebraischen Gleichungen durch Determinanten der Coefficienten* (Marburg 1860). — *Neue Methode zur Darstellung und Berechnung der imaginären Wurzeln algebraischer Gleichungen* (Marburg 1867).

[15] NÄGELSBACH, *Über eine Classe symmetrischer Functionen* (Zweibrücken 1871) et Archiv für Mathem. **59**, 1876, 147—192.

[16] M. d'OCAGNE, *Théorie élémentaire des séries récurrentes.* Nouv. ann. de mathém. $\mathbf{3}_3$, 1884, 65—90.

[17] CROCCHI, *Una relazione fra le funzioni simmetriche semplici e le funzioni simmetriche complete.* Giornale di matematiche **18**, 1880, 377—380.

[18] D. BERNOULLI, *Observationes de seriebus recurrentibus.* Comment. acad. scient. Petropol. **3**, 1732, 85—100.

[19] EULER, *Introductio in analysin infinitorum* (Lausannæ 1748). Dans la traduction allemande de MOSER (Berlin 1885), p. 275—295. — Les méthodes de BERNOULLI et d'EULER sont exposées aussi par LAGRANGE dans son *Traité de la résolution des équations numériques de tous degrés* (Paris 1798), par LEGENDRE dans sa *Théorie des nombres* (Paris 1830) et par CAUCHY dans son *Cours d'analyse algébrique* (Paris 1821).

[20] FOURIER, *Analyse des équations déterminées* (Paris 1831), p. 68.

[21] STERN, *Remarque sur un théorème énoncé par M. Fourier.* Journal für Mathem. **9**, 1832, 305—311. — *Theorie der Kettenbrücke.* Journal für Mathem. **11**, 1834, 311—350.

[22] JACOBI, *Observatiunculae ad theorema aequationum pertinentes.* Journal für Mathem. **13**, 1835, 340—353.

[23] Voir les deux écrits de FÜRSTENAU cités ci-dessus.

[24] Dans un article publié dans le Comptes Rendus de l'académie des science de Cracovie 1889 (en polonais).

[25] BALTZER, Zeitschr. für Mathem. **6**, 1861; Literaturz. 9—11.

[26] GÜNTHER, *Lehrbuch der Determinantentheorie* (2e Aufl. Erlangen 1877). — *Auflösung der Gleichungen durch Kettenbrüche.* Mathem. Ann. **7**, 1874, 262—268.

[27] Comparez E. HANEGRAEFF: *Méthode générale pour la résolution générale des équations* (Paris 1854).

RECENSIONEN. — ANALYSES.

M. Cantor. VORLESUNGEN ÜBER GESCHICHTE DER MATHEMATIK. ZWEITER BAND. VON 1200—1668. ZWEITER THEIL. Leipzig, Teubner 1892. 8°, X p. + p. 501—863.

La Bibliotheca Mathematica a déjà rendu compte (voir année 1891, p. 117—118) de la première partie du second tome des *Vorlesungen* de M. CANTOR; maintenant nous avons le plaisir d'en annoncer aussi la dernière partie. Cette partie est divisée en deux sections, dont la première embrasse la période 1550—1600, et la seconde, qui occupe seule à peu près 250 pages, la période 1660—1668. La première section comprend 3 chapitres traitant:

> Ouvrages d'histoire des mathématiques. Editions d'auteurs classiques. Géométrie. Mécanique. — Geométrie et mécanique (continuation). Cyclométrie et trigonométrie. — Arithmétique et algèbre.

La seconde section est divisée en 12 chapitres, qui se rapportent aux matières suivantes:

> Histoire des mathématiques. Editions d'auteurs classiques. — Géométrie. — Mécanique pratique et théorique. — Trigonométrie et cyclométrie. — Arithmétique. Logarithmes. — Invention de différentes méthodes. Calcul des probabilités. Fractions continues. Recueils de problèmes plaisants. — Théorie des nombres. Algèbre. — Méthodes géométriques pour résoudre des équations. Géométrie analytique. — Considérations infinitésimales. Kepler. Cavalieri. — Descartes. Fermat. — Roberval. Torricelli. — Grégoire de S:t Vincent. Wallis. Pascal. De Sluse. Hudde. Van Heuraet.

La seconde partie des *Vorlesungen* est aussi instructive que la première; l'auteur passe en revue un grand nombre de mathématiciens et il expose l'histoire des différentes théories mathématiques. En particulier, il traite amplement VIÈTE, DESCARTES, PASCAL, CAVALIERI, FERMAT et WALLIS, et il donne des notices détaillées sur la découverte des logarithmes et sur les recherches préparatoires pour l'invention du calcul infinitésimal.

A la fin de sa préface, M. CANTOR fait ressortir lui-même, qu'il n'a pas la prétention d'avoir fait une exposition complète de l'histoire des mathématiques pendant la période 1200—1668. En effet, une telle exposition est actuellement impossible, parce qu'un seul homme ne peut pas avoir recours lui-même à

toutes les sources manuscrites et imprimées, et parce qu'il nous manque encore des monographies sur plusieurs points de l'histoire des mathématiques. Ce manque dépend sans doute en grande partie de ce que les étudiants de l'histoire des mathématiques n'ont eu jusqu'à présent aucun moyen commode pour connaître les points de l'histoire des mathématiques qui ont encore besoin d'être examinés de plus près. Ce moyen leur a été offert maintenant par le second tome des *Vorlesungen*, qui montre, d'une part tout ce qu'on sait déjà sur la période 1200—1668, d'autre part les lacunes qui doivent être comblées, et nous ne doutous pas que l'important ouvrage de M. CANTOR ne provoquera des recherches où seront approfondies les questions qui n'ont pas été traitées jusqu'à présent d'une manière satisfaisante.

Avant de terminer, nous nous permettons de communiquer quelques petites observations, auxquelles a donné lieu la lecture du livre de M. CANTOR.

A la page 537, l'auteur fait mention du *Canon mathematicus* publié en 1579 par VIÈTE. On sait que cet ouvrage est devenu très rare, parce que VIÈTE retira tous les exemplaires qu'il put recouvrir. Mais on semble ignorer en général que le *Canon* a été réédité en 1609 après la mort de VIÈTE. Un exemplaire de cette édition, dont le titre finit: »Parisiis, Apud Bartholomæum Macæum, in monte D. Hilarij, sub scuto Britanniæ. M.D.C.IX» est gardée à la bibliothéque royale de Stockholm (cf. MÜLLER, *Auserlesene mathematische Bibliothek* [Nürnberg 1820] p. 38—39; KÄSTNER, *Geschichte der Mathematik* III, p. 175).

Les deux éditions de l'algèbre de BOMBELLI, que M. CANTOR mentionne aux pages 570—571, sont probablement identiques (comparez ci-dessous p. 96, question 39); en tout cas le lieu de publication de l'édition de 1572 n'est pas Venezia mais Bologna.

En parlant de la géométrie de DESCARTES, M. CANTOR dit (p. 723): »Statt der Vokale benutzte er die letzten Buchstaben des Alphabetes, vorzugsweise und in erster Linie x, sodann y, z zur Bezeichnung der Unbekannten». Il nous semble qu'on puisse avec plus de raison dire que DESCARTES a employé en premier lieu z comme signe d'une quantité inconnue; en effet z est introduite déjà à la page 4 de la *Géométrie* (édition de 1886), y à la page 5, et x à la page 6.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von || journal d'histoire des mathématiques publié par G. ENESTRÖM. Stockholm. 8°.
1892: 2.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von M. CANTOR. Leipzig. 8°.
37 (1892): 2. — Supplement [= Abh. zur Gesch. der Mathem. **6**].

°**Adam, J.**, The nuptial number of Plato: its solution and significance. London 1891.
8°, 79 p. — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **37**, 1892; Hist. Abth. 54—55. (CANTOR.)

Ball, W. W. R., A Newtonian fragment relating to centripetal forces.
London, Mathem. soc., Transactions **23**, 1892, 226—231.

БОБЫНИНЪ, В. В., Приложенія исторіи математики къ рѣшенію и постановкѣ нѣкоторыхъ вопросовъ преподаванія математическихъ наукъ.
Fiziko-matem. naouki **9** (1890), 1892, 97—132. — BOBYNIN, V. V., Usage de l'histoire des mathématiques pour la résolution et la décision de quelques questions relatives à l'enseignement des sciences mathématiques (fin).

°**Brückner, J. M.**, Das Ottojanische Problem. Eine mathematisch-historische Studie. Leipzig 1892.
4°, 25 p. + 1 pl. [1·00 Mk.]

Burkhardt, H., Bernhard Riemann. Vortrag, bei der am 20. Juli 1891 vom mathematischen Verein zu Göttingen veranstalteten Feier der 25. Wiederkehr seines Todestages. Göttingen 1892.
8°, 12 p.

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Zweiter Band. Von 1200—1668. Zweiter Theil. Leipzig, Teubner 1892.
8°, X p. + p. 501—863.

Delbos, L., Les mathématiques aux Indes Orientales.
Bullet. d. sc. mathém. 16_2, 1892, 93—112.

Dickstein, S., Sur les découvertes mathématiques de Wronski.
Biblioth. Mathem. 1892, 48—52.

Dickstein, S., Uchwaly kongresu miedzynarodowego bibliografii nauk matematycznych.
Praze matematyczno-fisyczne (Warszawa) **3**, 1892, 179—183. — Résolutions du congrès international de bibliographie des sciences mathématiques.

Dickstein, S., Dopelnienia do »wiadomosci bibliograficznéj o badaniach historyczno-matematycznych w polsce».
Praze matematyczno-fisyczne **3**, 1892, 184—186. — Additions à la note sur les études historico-mathématiques en Pologne.

Dickstein, S., Zasady teoryi liczb Wronskiego.
Krakow, Akad. umiej., Rozprawy **24**, 1892, 73—104. — Sur la théorie des nombres de WRONSKI. — [Compte rendu en français:] *Krakow*, Akad. umiej., Bulletin 1892, 64—65. (S. DICKSTEIN.)

Duhem, P., Emile Mathieu, his life and work.
New York, Mathem. soc., Bulletin **1**, 1892, 156—168.

Favaro, A., La cattedra di Galileo nella università di Padova. Notizie e documenti.
| *Padova*, Accad. d. sc., Atti e memorie **8**, 1892. 18 p.

Favaro, A., Gli oppositori di Galileo. I.
Venezia, Istituto Veneto, Atti $\mathbf{3}_7$, 1892, 615—636.

Fine, H. B., Kronecker and his arithmetical theory of the algebraic equation.
New York, Mathem. soc., Bulletin **1**, 1892, 173—184.

Floquet, G., Notice sur Emile Mathieu, sa vie et ses travaux.
Nancy, Soc. d. sc., Bulletin 1891. — [Analyse:] Jornal de sc. mathem. **10**, 1892, 143. (G. T.)

Gutzmer, A., Zur Erinnerung an Paul Günther.
Zeitschr. für Mathem. **37**, 1892; Hist. Abth. 46—49.

Isenkrahe, C., Über die Zurückführung der Schwere auf Absorption und die daraus abgeleiteten Gesetze.
Abh. zur Gesch. der Mathem. **6**, 1892, 161—204. — Note en grande partie historique.

°**Kluge, G.**, De Euclidis elementorum libris qui feruntur XIV et XV. Lipsiæ 1891.
4°, 47 p. — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **37**, 1892; Hist. Abth. 55—56. (CANTOR.)

Müller, F., Über litterarische Unternehmungen, welche geeignet sind, das Studium der Mathematik zu erleichtern.
Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher (Halle 1891). p. 11.

°**Nassiruddin el Thoussy**, Traité du Quadrilatère. Texte arabe avec traduction française par A. P. CARATHEODORY. Constantinople 1891.
8°, 157 + 214 p. + [12 Mk.] — [Analyse:] Bullet. des sc. mathém. $\mathbf{16}_2$, 1892, 147—152. (P. TANNERY.)

[Nécrologie sur L. Kronecker.]
Tokyo, Sugaku butsurigaku kwai, Kiji **5**, 1892. 1 p. + portrait. — En japonais.

N[euberg], J., Bibliographie relative à un problème de Fermat: »Trouver un point tel que la somme de ses distances à trois points donnés soit minima».
Mathesis $\mathbf{2}_2$, 1892, 162—163.

Ovidio, E. d', Cenno necrologico di A. de Gasparis.
| *Torino,* Accad. d. sc., Atti **28**, 1892. 2 p.

Prósper, V. R., Ch. S. Peirce y O. H. Mitchell.
El progreso matem. **2**, 1892, 170—173.

°**Rembacz, M.**, Krótko zebrana historya geometryi wykreslnéj. I, II. Stanislawow 1890, 1891.
8°, 34 + 64 p. — Aperçu de l'histoire de la géométrie descriptive.

Segre, C., Intorno alla storia del principio di corrispondenza e dei sistemi di curve.
Biblioth. Mathem. 1892, 33—47.

°**Staigmüller, H.**, Dürer als Mathematiker. (Programm des Realgymnasiums in Stuttgart 1890—91.) Stuttgart 1891.
4°, 59 p. — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **37**, 1892; Hist. Abth. 56—57. (Cantor.)

Steinschneider, M., Die arabischen Bearbeiter des Almagest.
Biblioth. Mathem. 1892, 53—62.

Suter, H., Das Mathematiker-Verzeichniss im Fihrist des ibn abî Ja'kûb an-Nadîm. Zum ersten Mal vollständig ins deutsche übersetzt und mit Anmerkungen versehen.
Abh. zur Gesch. der Mathem. **6**, 1892, 1—87.

Tannery, P., Psellus sur Diophante.
Zeitschr. für Mathem. **37**, 1892; Hist. Abth. 41—45.

Wappler, E., Bemerkungen zur Rhythmomachie.
Zeitschr. für Mathem. **37**, 1892; Hist. Abth. 1—17.

Wittstein, A., Historisch-astronomische Fragmente aus der orientalischen Literatur.
Abh. zur Gesch. der Mathem. **6**, 1892, 89—118.

Question 38 [sur M.-A. Parseval-Deschênes].
Biblioth. Mathem. 1892, 64. (G. Eneström.)

Fermat, P., Oeuvres, publiées par les soins de P. Tannery et Ch. Henry, sous les auspices du ministère de l'instruction publique. Tome premier. Oeuvres mathématiques diverses; observations sur Diophante. Paris 1891. 4°.
Zeitschr. für Mathem. **36**, 1891; Hist. Abth. 212—215. (G. Wertheim.)

Galilei, G., Opere. Edizione nazionale sotto gli auspicii di sua maestà il re d'Italia. Volumi I, II. Firenze 1890, 1891. 4°.
Biblioth. Mathem. 1892, 26—27. (G. Eneström.) — Bullet. des sc. mathém. $\mathbf{16}_2$, 1892, 152—158. (P. Tannery.)

Loria, G., Il teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche. (Rivista di matematica 1891.)
Jornal de sc. mathem. **10**, 1892, 143. (G. T.) — Zeitschr. für Mathem. **37**, 1892; Hist. Abth. 57—58. (Cantor.)

WEISSENBORN, H., Zur Geschichte der Einführung der jetzigen Ziffern in Europa durch Gerbert. Eine Studie. Berlin, Mayer & Müller 1892. 8°.
Biblioth. Mathem. 1892, 63. (G. ENESTRÖM.)

WRONSKI, H., Loi téléologique du hasard. Réimpression de trois pièces rarissimes (1833), précédée d'un autobiographie et d'un inventaire de l'oeuvre. Paris 1890. 8°.
Fiziko-matem. naouki **9** (1890), 1892, 142—144.

[Listes d'ouvrages récemment publiés.]
Biblioth. Mathem. 1892, 63—64. — Zeitschr. für Mathem. **37**, 1892; Hist. Abth. 78—80.

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

39. M. CANTOR (*Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* **2**, 1892, p. 570) fait mention de deux éditions différentes de l'*Algebra* de R. BOMBELLI, publiées respectivement à Venezia en 1572 et à Bologna en 1579. Quant à la 1ère édition, l'indication du lieu de publication est inexacte; en effet on trouve sur le feuillet du titre les mots: »In Bologna. Nella stamperia di Giovanni Rossi. MDLXXII.» Pour ce qui concerne la 2e édition, l'existence en a été indiquée aussi par M. RICCARDI (*Biblioteca matematica italiana* **1**, 1870, col. 146), qui l'appelle une reproduction exacte de la 1ère édition. D'autre part, le prince BONCOMPAGNI (*Sur l'histoire des sciences mathématiques et physiques de M. Marie;* Biblioth. Mathem. 1886, col. 44) parle d'une seule édition de 1572, dont quelques exemplaires portent dans la première page MDLXXIX au lieu de MDLXXII.

Est-ce que l'ouvage de BOMBELLI a été réimprimé en 1579?

(G. Eneström.)

Inhalt. — Table des matières.

STOCKHOLM, TRYCKT I CENTRAL-TRYCKERIET, 1892.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK



JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON / PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1892. STOCKHOLM. Nº 4.

NEUE FOLGE. 6. — NOUVELLE SÉRIE. 6.

BERLIN. MAYER & MÜLLER. Markgrafenstrasse 51.

Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr.

PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Congetture e ricerche sull' aritmetica degli antichi Egiziani.

Di GINO LORIA a Genova.

Fra le scoperte fatte in quest' ultimo trentennio intorno alle Matematiche delle età passate, nessuna può competere per importanza con la scoperta di quell' antichissimo papiro (copia fatta circa 1700 anni a. C. di uno scritto che risale forse a cinque secoli prima) che A. H. RHIND acquistò durante il suo soggiorno in Egitto e che, egli morto, passò nel British Museum. Dopo che gli sforzi coalizzati del BIRCH, del BRUGSCH,[1] di A. EISENLOHR[2] e M. CANTOR[3] furono coronati da così grande successo che quel papiro si ritiene in generale[4] avere rivelati i suoi più riposti segreti, si è, fra l'altro, riconosciuto che alla terra de' Faraoni non soltanto spetta, come ERODOTO opinava, il titolo di patria della geometria, ma deve eziandio riguardarsi come una delle più vetuste sedi di non disprezzabili studii aritmetici.

Gli argomenti svolti nel Papiro Rhind, e più ancora la forma sotto cui essi vengono presentati, lo fanno apparire, non già come un trattato scientifico, ma sibbene come un manuale pratico, come una guida destinata agli agricoltori[5] già istruiti nell' aritmetica dei numeri interi. Non dimostrazioni e neppure giustificazioni dei procedimenti insegnati capaci di svelare il filo delle idee che condusse a formularli, ma nella maggior parte dei casi semplici verificazioni dei risultati; non enunciati di regole

generali, ma molteplici applicazioni di uno stesso metodo dalle quali chi legge deve desumere il modo di dirigersi nei casi analoghi. Lo scritto di cui è parola, vuoi per l'aspetto, vuoi per la sostanza, non può essere il prodotto di una scienza ancora bambina, deve al contrario corrispondere a quello stadio di maturità in cui solo è giustificata e permessa l'adozione della forma dogmatica. E d'altronde il calcolo *Seqem* avente per iscopo la riduzione di più frazioni allo stesso denominatore, il calcolo *Hau* mediante il quale vengono risolte le equazioni della forma

$$x + \frac{x}{m} + \frac{x}{n} + \ldots = a,$$

i calcoli di società, le traccie di progressioni aritmetiche e geometriche ed altro che per brevità si tace, sono più che sufficienti a rivelare, in chi compose l'anzidetta scrittura, una somma non indifferente di cognizioni aritmetiche.

Era costume degli antichi Egiziani di usare in pratica esclusivamente delle frazioni aventi per numeratori 1 (*frazioni fondamentali*), veniva fatta un' eccezione solo a favore della frazione $\frac{2}{3}$; non già che essi fossero nell' impossibilità di concepire anche le altre frazioni, ma incontravano delle difficoltà grafiche, fonetiche o grammaticali nell' indicarle. Donde la necessità da parte loro di sapere *esprimere qualunque frazione come somma di frazioni fondamentali*.

Riguardo a tale problema aritmetico si può osservare anzitutto che, siccome qualunque frazione è decomponibile in una somma di frazioni fondamentali e di frazioni della forma $\frac{2}{2n+1}$,[6] così esso problema potrà risolversi in generale nota che sia la decomposizione in frazioni fondamentali di qualsia frazione di questa forma. A ciò parzialmente provvede il Papiro Rhind, la cui prima parte contiene appunto la *decomposizione in fondamentali delle frazioni* $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \ldots, \frac{2}{99}$. Si noti poi che quel problema è, non solo difficile, ma di sua natura indeterminato: si possono scegliere ad arbitrio delle ulteriori condizioni a cui devono soddisfare le frazioni componenti[7] e si può anche variarne in ogni caso il numero e la natura. E siccome è estremamente probabile che la tabella che ne dà la soluzione per le frazioni $\frac{2}{2n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots, 49)$ non sia stata costruita da una sola persona, nè in una sola epoca, ma sia passata per molteplici stadii di sviluppo prima di assumere le parvenze che

conosciamo,[8] così si potrebbe pensare che la decomposizione sia stata fatta in modi e con criterii diversi, scelti a caso o a capriccio o in base a differenti scopi pratici.[9]

Prima però di accettare questo modo di vedere, il quale, invece di risolvere la questione di determinare il metodo di costruzione, la distrugge, è doveroso cercare se coll' esame accurato della tabella non si possa avvertire qualche carattere comune alle decomposizioni proposte che guidi alla scoperta delle ragioni per cui esse furono prescelte ad infinite altre. Già l'Eisenlohr ed il Cantor si occuparono di tale ricerca e notarono un buon numero di formole da cui sono deducibili alcuni gruppi di decomposizioni. Ora a me pare (e in questo mi accordo col modo di giudicare del venerato capo della scuola storica tedesca) che il pretendere di scoprire l'esistenza di una formola unica di cui siano particolarizzazioni quelle corrispondenti agli spezzamenti egiziani, sia chiedere troppo; ritengo per converso sia debito dello storico di studiare se esista qualque proprietà generale comune a tutte, e, in caso affermativo, sia còmpito del matematico di cercare se essa sia sintomo di un concetto unico (anche se svolto diversamente)[10] regolatore dei varii passi fatti dai differenti costruttori della tabella.

Per tentare di adempiere a quel dovere, esaminiamo la tabella riassuntrice degli spezzamenti in questione (dopo avere soppressa l'indicazione della frazione $\frac{2}{3}$, perchè questa non viene decomposta):

$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$	$\frac{2}{35}=\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$
$\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$	$\frac{2}{37}=\frac{1}{24}+\frac{1}{111}+\frac{1}{296}$
$\frac{2}{9}=\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$	$\frac{2}{39}=\frac{1}{26}+\frac{1}{78}$
$\frac{2}{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{66}$	$\frac{2}{41}=\frac{1}{24}+\frac{1}{246}+\frac{1}{328}$
$\frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}$	$\frac{2}{43}=\frac{1}{42}+\frac{1}{86}+\frac{1}{129}+\frac{1}{301}$
$\frac{2}{15}=\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$	$\frac{2}{45}=\frac{1}{30}+\frac{1}{90}$
$\frac{2}{17}=\frac{1}{12}+\frac{1}{51}+\frac{1}{68}$	$\frac{2}{47}=\frac{1}{30}+\frac{1}{141}+\frac{1}{470}$
$\frac{2}{19}=\frac{1}{12}+\frac{1}{76}+\frac{1}{114}$	$\frac{2}{49}=\frac{1}{28}+\frac{1}{196}$
$\frac{2}{21}=\frac{1}{14}+\frac{1}{42}$	$\frac{2}{51}=\frac{1}{34}+\frac{1}{102}$
$\frac{2}{23}=\frac{1}{12}+\frac{1}{276}$	$\frac{2}{53}=\frac{1}{30}+\frac{1}{318}+\frac{1}{795}$
$\frac{2}{25}=\frac{1}{15}+\frac{1}{75}$	$\frac{2}{55}=\frac{1}{30}+\frac{1}{330}$
$\frac{2}{27}=\frac{1}{18}+\frac{1}{54}$	$\frac{2}{57}=\frac{1}{38}+\frac{1}{114}$
$\frac{2}{29}=\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{74}+\frac{1}{232}$	$\frac{2}{59}=\frac{1}{36}+\frac{1}{236}+\frac{1}{531}$
$\frac{2}{31}=\frac{1}{20}+\frac{1}{124}+\frac{1}{155}$	$\frac{2}{61}=\frac{1}{40}+\frac{1}{244}+\frac{1}{488}+\frac{1}{610}$
$\frac{2}{33}=\frac{1}{22}+\frac{1}{66}$	$\frac{2}{63}=\frac{1}{42}+\frac{1}{126}$

$\frac{2}{65} = \frac{1}{39} + \frac{1}{195}$

$\frac{2}{67} = \frac{1}{40} + \frac{1}{335} + \frac{1}{736}$

$\frac{2}{69} = \frac{1}{46} + \frac{1}{138}$

$\frac{2}{71} = \frac{1}{40} + \frac{1}{568} + \frac{1}{710}$

$\frac{2}{73} = \frac{1}{60} + \frac{1}{219} + \frac{1}{292} + \frac{1}{365}$

$\frac{2}{75} = \frac{1}{50} + \frac{1}{150}$

$\frac{2}{77} = \frac{1}{44} + \frac{1}{308}$

$\frac{2}{79} = \frac{1}{60} + \frac{1}{237} + \frac{1}{316} + \frac{1}{790}$

$\frac{2}{81} = \frac{1}{54} + \frac{1}{162}$

$\frac{2}{83} = \frac{1}{60} + \frac{1}{332} + \frac{1}{415} + \frac{1}{498}$

$\frac{2}{85} = \frac{1}{51} + \frac{1}{255}$

$\frac{2}{87} = \frac{1}{58} + \frac{1}{174}$

$\frac{2}{89} = \frac{1}{60} + \frac{1}{356} + \frac{1}{534} + \frac{1}{890}$

$\frac{2}{91} = \frac{1}{70} + \frac{1}{130}$

$\frac{2}{93} = \frac{1}{62} + \ ?$

$\frac{2}{95} = \frac{1}{60} + \frac{1}{380} + \frac{1}{570}$

$\frac{2}{97} = \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}$

$\frac{2}{99} = \frac{1}{66} + \frac{1}{198}$

Lasciando per un momento in disparte le frazioni $\frac{2}{35}$ e $\frac{2}{91}$, di cui ci occuperemo più innanzi, tale esame rivela subito che:

A. Ogni frazione del tipo $\frac{2}{2n + 1}$ viene spezzata in tante frazioni fondamentali aventi, tutte meno una, la forma $\frac{1}{(2n + 1)x}$.

B. Quest' ultima frazione, moltiplicata per $2n + 1$, dà un prodotto compreso fra 1 e 2.

Ricordando ora alcuni dei problemi alla soluzione di quali è destinato il calcolo *Seqem,*[11] si è naturalmente condotti a congetturare che, per ottenere lo scopo a cui aspirava, chi costruì quella tabella, tentasse di sottrarre da ogni frazione $\frac{2}{2n + 1}$ tante frazioni differenti del tipo $\frac{1}{(2n + 1)x}$ finchè ottenesse come resto una nuova frazione fondamentale. Quest' ipotesi riceve una valida conferma dal fatto che, svolgendone il concetto essenziale, si può ottenere un procedimento di calcolo che mena a tutte le formole della tabella, eccettuate quelle sole che concernono le due anzidette frazioni. Nell' esporre tale procedimento noi ci serviremo dalle forme moderne, perchè sono così frammentarie ed incomplete le informazioni che ci furon trasmesse intorno ai metodi con cui calcolavano gli antichi Egiziani,[12] che sarebbe ora imprudente il tentarne una divinazione; il lettore è pertanto avvertito che noi non intendiamo in alcun modo di attribuire agli antichi abitatori dell' Egitto la nostra tecnica aritmetica e tanto meno i nostri ragionamenti d'indole algebrica; ce ne serviamo per convenienza, avvertendo però che quella e questi possono venire surrogati da un algoritmo fondato su tentativi (analogo a quello che permise a DIOFANTO di risolvere delle equazioni algebriche senza adoperare i nostri simboli) e che nulla vieta di supporre posseduto dai calcolatori, eccezionalmente esperti, vissuti sulla sponde del Nilo.

Supponiamo anzitutto che si voglia spezzare $\frac{2}{2n+1}$ in *due* frazioni fondamentali, una delle quali abbia per denominatore $(2n+1)x$, x essendo un numero intero da determinare. Sussisterà l'identità

$$(1) \qquad \frac{2}{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)x} + \frac{2x-1}{(2n+1)x}$$

e se determineremo x per modo che l'ultima di queste frazioni sia fondamentale, avremo raggiunto lo scopo. Notiamo intanto che, fatto ciò, questa frazione moltiplicata per $2n+1$ dà per prodotto $2 - \frac{1}{x}$, cioè un numero compreso fra 1 a 2, conformemente all' osservazione B.

Ora, se $2n+1$ è un numero primo, affinchè $\frac{2x-1}{(2n+1)x}$ sia una frazione fondamentale, deve $2n+1$ essere un multiplo di $2x-1$. Facendo per semplicità $2x-1=2n+1$ otterremo $x=n+1$, e quindi la decomposizione

$$\frac{2}{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)(n+1)} + \frac{1}{n+1};$$

ponendo in questa eguaglianza successivamente $n=2, 3, 5, 11$ si ottiene ordinatamente

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{15} + \frac{1}{3}$$
$$\frac{2}{7} = \frac{1}{28} + \frac{1}{4}$$
$$\frac{2}{11} = \frac{1}{66} + \frac{1}{6}$$
$$\frac{2}{23} = \frac{1}{276} + \frac{1}{12},$$

come appunto si legge nella tabella. Le rimanenti frazioni del tipo $\frac{2}{2n+1}$ corrispondenti a valori primi di $2n+1$ vengono decomposte in più di due frazioni fondamentali e verranno perciò considerate più innanzi.

Considerando pel momento ancora la formola (1), osserveremo che, se $2n+1$ non è primo, si può eguagliare $2x-1$ ad uno qualunque dei fattori di $2n+1$ ed ottenere in corrispondenza altrettante formole di decomposizione. I risultati a cui per tal modo si giunge sono i seguenti, fra cui segnammo con un * quelli che non si trovano nel Manuale egiziano:[13]

$n=4$	$x=2$	$\frac{2}{9}=\frac{1}{18}+\frac{1}{18}$		
$n=7$	$x=2$	$\frac{2}{15}=\frac{1}{30}+\frac{1}{10}$;	$x=3$	* $\frac{2}{15}=\frac{1}{45}+\frac{1}{9}$
$n=10$	$x=2$	$\frac{2}{21}=\frac{1}{42}+\frac{1}{14}$;	$x=4$	* $\frac{2}{21}=\frac{1}{84}+\frac{1}{12}$
$n=12$	$x=3$	$\frac{2}{25}=\frac{1}{75}+\frac{1}{15}$		
$n=13$	$x=2$	$\frac{2}{27}=\frac{1}{54}+\frac{1}{18}$		
$n=16$	$x=2$	$\frac{2}{33}=\frac{1}{66}+\frac{1}{22}$;	$x=6$	* $\frac{2}{33}=\frac{1}{198}+\frac{1}{18}$
$n=19$	$x=2$	$\frac{2}{39}=\frac{1}{78}+\frac{1}{26}$;	$x=7$	* $\frac{2}{39}=\frac{1}{273}+\frac{1}{21}$
$n=22$	$x=2$	$\frac{2}{45}=\frac{1}{90}+\frac{1}{30}$;	$x=3$	* $\frac{2}{45}=\frac{1}{135}+\frac{1}{27}$
$n=24$	$x=4$	$\frac{2}{49}=\frac{1}{196}+\frac{1}{28}$		
$n=25$	$x=2$	$\frac{2}{51}=\frac{1}{102}+\frac{1}{34}$;	$x=9$	* $\frac{2}{51}=\frac{1}{459}+\frac{1}{27}$
$n=27$	$x=6$	$\frac{2}{55}=\frac{1}{330}+\frac{1}{30}$;	$x=3$	* $\frac{2}{55}=\frac{1}{165}+\frac{1}{33}$
$n=28$	$x=2$	$\frac{2}{57}=\frac{1}{114}+\frac{1}{38}$;	$x=10$	* $\frac{2}{57}=\frac{1}{570}+\frac{1}{30}$
$n=31$	$x=2$	$\frac{2}{63}=\frac{1}{126}+\frac{1}{42}$;	$x=4$	* $\frac{2}{63}=\frac{1}{252}+\frac{1}{36}$
$n=32$	$x=3$	$\frac{2}{65}=\frac{1}{195}+\frac{1}{39}$;	$x=7$	* $\frac{2}{65}=\frac{1}{455}+\frac{1}{35}$
$n=34$	$x=2$	$\frac{2}{69}=\frac{1}{138}+\frac{1}{46}$;	$x=12$	* $\frac{2}{69}=\frac{1}{828}+\frac{1}{36}$
$n=37$	$x=2$	$\frac{2}{75}=\frac{1}{150}+\frac{1}{50}$;	$x=3$	* $\frac{2}{75}=\frac{1}{225}+\frac{1}{45}$
$n=38$	$x=4$	$\frac{2}{77}=\frac{1}{308}+\frac{1}{44}$;	$x=6$	* $\frac{2}{77}=\frac{1}{462}+\frac{1}{42}$
$n=40$	$x=2$	$\frac{2}{81}=\frac{1}{162}+\frac{1}{54}$		
$n=42$	$x=3$	$\frac{2}{85}=\frac{1}{255}+\frac{1}{51}$;	$x=9$	* $\frac{2}{85}=\frac{1}{765}+\frac{1}{45}$
$n=43$	$x=2$	$\frac{2}{87}=\frac{1}{174}+\frac{1}{58}$;	$x=15$	* $\frac{2}{87}=\frac{1}{1305}+\frac{1}{45}$
$n=46$	$x=2$	$\frac{2}{93}=\frac{1}{186}+\frac{1}{62}$;[14]	$x=16$	* $\frac{2}{93}=\frac{1}{1488}+\frac{1}{48}$
$n=49$	$x=2$	$\frac{2}{99}=\frac{1}{198}+\frac{1}{66}$;	$x=6$	* $\frac{2}{99}=\frac{1}{594}+\frac{1}{54}$.

Restano per tal modo ottenute TUTTE le *decomposizioni binomie* del Papiro, eccettuate, ben inteso, le due singolari dianzi citate.

Passiamo a studiare le decomposizioni trinomie. Osservando che è

$$\frac{2}{2n+1}-\frac{1}{(2n+1)x}-\frac{1}{(2n+1)y}=\frac{2xy-(x+y)}{(2n+1)xy},$$

ossia

$$(2)\quad \frac{2}{2n+1}=\frac{1}{(2n+1)x}+\frac{1}{(2n+1)y}+\frac{1}{(2n+1)\dfrac{xy}{2xy-(x+y)}},$$

si vedrà subito che, per risolvere il problema di cui ci occupiamo, basta scegliere per x e y due valori differenti nella serie $2, 3, \ldots$ tali che $2n+1$ sia un multiplo del denomina-

tore della frazione $\frac{xy}{2xy-(x+y)}$, supposta ridotta ai suoi minimi termini. Notiamo anzitutto che l'ultimo termine della (2) moltiplicato per $2n+1$ diviene

$$2-\frac{x+y}{xy},$$

numero sempre compreso fra 1 e 2, d'accordo coll' osservazione B. Per determinare poi x e y senza tentativi, si formi una tabella di valori della funzione

$$f(x\,,y)=\frac{xy}{2xy-(x+y)};$$

limitandosi ai valori di x e y compresi fra 2 e 15 essa si riduce alla seguente:

$f(2\,,3)=\frac{6}{7}$	$f(3\,,14)=\frac{42}{71}$	$f(6\,,7)=\frac{42}{71}$	$f(8\,,15)=\frac{120}{217}$
$f(2\,,4)=\frac{4}{5}$	$f(3\,,15)=\frac{5}{8}$	$f(6\,,8)=\frac{24}{41}$	$f(9\,,10)=\frac{90}{161}$
$f(2\,,5)=\frac{10}{13}$	$f(4\,,5)=\frac{20}{31}$	$f(6\,,9)=\frac{54}{93}$	$f(9\,,11)=\frac{110}{199}$
$f(2\,,6)=\frac{3}{4}$	$f(4\,,6)=\frac{12}{19}$	$f(6\,,10)=\frac{15}{16}$	$f(9\,,12)=\frac{60}{109}$
$f(2\,,7)=\frac{14}{19}$	$f(4\,,7)=\frac{28}{45}$	$f(6\,,11)=\frac{66}{115}$	$f(9\,,13)=\frac{130}{237}$
$f(2\,,8)=\frac{8}{11}$	$f(4\,,8)=\frac{8}{13}$	$f(6\,,12)=\frac{4}{7}$	$f(9\,,14)=\frac{35}{64}$
$f(2\,,9)=\frac{18}{25}$	$f(4\,,9)=\frac{36}{59}$	$f(6\,,13)=\frac{78}{137}$	$f(9\,,15)=\frac{6}{11}$
$f(2\,,10)=\frac{5}{7}$	$f(4\,,10)=\frac{20}{33}$	$f(6\,,14)=\frac{21}{37}$	$f(10\,,11)=\frac{110}{199}$
$f(2\,,11)=\frac{31}{22}$	$f(4\,,11)=\frac{44}{73}$	$f(6\,,15)=\frac{30}{53}$	$f(10\,,12)=\frac{60}{109}$
$f(2\,,12)=\frac{12}{17}$	$f(4\,,12)=\frac{3}{5}$	$f(7\,,8)=\frac{56}{97}$	$f(10\,,13)=\frac{130}{237}$
$f(2\,,13)=\frac{26}{37}$	$f(4\,,13)=\frac{52}{87}$	$f(7\,,9)=\frac{63}{110}$	$f(10\,,14)=\frac{35}{64}$
$f(2\,,14)=\frac{7}{10}$	$f(4\,,14)=\frac{28}{47}$	$f(7\,,10)=\frac{70}{123}$	$f(10\,,15)=\frac{6}{11}$
$f(2\,,15)=\frac{30}{43}$	$f(4\,,15)=\frac{60}{101}$	$f(7\,,11)=\frac{77}{126}$	$f(11\,,12)=\frac{132}{241}$
$f(3\,,4)=\frac{12}{17}$	$f(5\,,6)=\frac{30}{49}$	$f(7\,,12)=\frac{84}{149}$	$f(11\,,13)=\frac{143}{262}$
$f(3\,,5)=\frac{15}{22}$	$f(5\,,7)=\frac{35}{58}$	$f(7\,,13)=\frac{91}{162}$	$f(11\,,14)=\frac{154}{283}$
$f(3\,,6)=\frac{2}{3}$	$f(5\,,8)=\frac{40}{67}$	$f(7\,,14)=\frac{14}{25}$	$f(11\,,15)=\frac{165}{204}$
$f(3\,,7)=\frac{21}{22}$	$f(5\,,9)=\frac{45}{76}$	$f(7\,,15)=\frac{105}{188}$	$f(12\,,13)=\frac{156}{287}$
$f(3\,,8)=\frac{24}{37}$	$f(5\,,10)=\frac{10}{17}$	$f(8\,,9)=\frac{72}{127}$	$f(12\,,14)=\frac{84}{155}$
$f(3\,,9)=\frac{9}{14}$	$f(5\,,11)=\frac{55}{94}$	$f(8\,,10)=\frac{40}{71}$	$f(12\,,15)=\frac{36}{111}$
$f(3\,,10)=\frac{30}{47}$	$f(5\,,12)=\frac{60}{103}$	$f(8\,,11)=\frac{88}{157}$	$f(13\,,14)=\frac{182}{337}$
$f(3\,,11)=\frac{33}{52}$	$f(5\,,13)=\frac{65}{112}$	$f(8\,,12)=\frac{6}{11}$	$f(13\,,15)=\frac{195}{362}$
$f(3\,,12)=\frac{36}{67}$	$f(5\,,14)=\frac{70}{121}$	$f(8\,,13)=\frac{104}{187}$	$f(14\,,15)=\frac{210}{391}$.
$f(3\,,13)=\frac{39}{62}$	$f(5\,,15)=\frac{15}{26}$	$f(8\,,14)=\frac{56}{101}$	

Volendo servirsene per trovare la decomposizione trinomia di $\frac{2}{13}$, cercheremo nella tabella precedente i valori di $f(x, y)$ aventi per denominatore 13; troveremo agevolmente i due seguenti

$$f(5, 2)=\frac{10}{13}, \qquad f(8, 4)=\frac{8}{13};$$

allora la (2) darà subito le due decomposizioni

$$* \ \frac{2}{13}=\frac{1}{65}+\frac{1}{26}+\frac{1}{10}$$
$$\frac{2}{13}=\frac{1}{104}+\frac{1}{52}+\frac{1}{8},$$

la seconda delle quali si trova nel Papiro Rhind. Procedendo in modo analogo si ottengono i risultati seguenti:

$2n+1=17$:	$f(2, 12)=\frac{12}{17}$,	$* \ \frac{2}{17}=\frac{1}{204}+\frac{1}{34}+\frac{1}{12}$
	$f(3, 4)=\frac{12}{17}$,	$\frac{2}{17}=\frac{1}{68}+\frac{1}{51}+\frac{1}{12}$
	$f(5, 10)=\frac{10}{17}$,	$* \ \frac{2}{17}=\frac{1}{170}+\frac{1}{85}+\frac{1}{10}$
$2n+1=19$:	$f(2, 7)=\frac{14}{19}$,	$* \ \frac{2}{19}=\frac{1}{133}+\frac{1}{38}+\frac{1}{14}$
	$f(4, 6)=\frac{12}{19}$,	$\frac{2}{19}=\frac{1}{114}+\frac{1}{76}+\frac{1}{12}$
$2n+1=31$:	$f(4, 5)=\frac{20}{31}$,	$\frac{2}{31}=\frac{1}{155}+\frac{1}{124}+\frac{1}{20}$
$2n+1=37$:	$f(2, 13)=\frac{26}{37}$,	$* \ \frac{2}{37}=\frac{1}{481}+\frac{1}{74}+\frac{1}{26}$
	$f(3, 8)=\frac{24}{37}$,	$\frac{2}{37}=\frac{1}{296}+\frac{1}{111}+\frac{1}{24}$
	$f(6, 14)=\frac{21}{37}$,	$* \ \frac{2}{37}=\frac{1}{518}+\frac{1}{122}+\frac{1}{21}$
$2n+1=41$:	$f(6, 8)=\frac{24}{41}$,	$\frac{2}{41}=\frac{1}{328}+\frac{1}{246}+\frac{1}{24}$
$2n+1=47$:	$f(3, 10)=\frac{30}{47}$,	$\frac{2}{47}=\frac{1}{470}+\frac{1}{141}+\frac{1}{30}$
	$f(4, 14)=\frac{28}{47}$,	$* \ \frac{2}{47}=\frac{1}{658}+\frac{1}{188}+\frac{1}{28}$
$2n+1=53$:	$f(6, 15)=\frac{30}{53}$,	$\frac{2}{53}=\frac{1}{795}+\frac{1}{318}+\frac{1}{30}$
$2n+1=59$:	$f(4, 9)=\frac{36}{59}$,	$\frac{2}{59}=\frac{1}{531}+\frac{1}{236}+\frac{1}{36}$
$2n+1=67$:	$f(3, 12)=\frac{36}{67}$,	$* \ \frac{2}{67}=\frac{1}{804}+\frac{1}{201}+\frac{1}{36}$
	$f(5, 8)=\frac{40}{67}$,	$\frac{2}{67}=\frac{1}{536}+\frac{1}{335}+\frac{1}{40}$
$2n+1=71$:	$f(3, 14)=\frac{42}{71}$,	$\frac{2}{71}=\frac{1}{994}+\frac{1}{213}+\frac{1}{42}$
	$f(6, 7)=\frac{42}{71}$,	$\frac{2}{71}=\frac{1}{497}+\frac{1}{426}+\frac{1}{42}$
	$f(8, 10)=\frac{40}{71}$,	$\frac{2}{71}=\frac{1}{710}+\frac{1}{568}+\frac{1}{40}$
$2n+1=95$:	$f(2, 4)=\frac{4}{5}=\frac{76}{95}$,	$* \ \frac{2}{95}=\frac{1}{380}+\frac{1}{190}+\frac{1}{76}$
	$f(4, 6)=\frac{12}{19}=\frac{60}{95}$,	$\frac{2}{95}=\frac{1}{570}+\frac{1}{380}+\frac{1}{60}$
$2n+1=97$:	$f(7, 8)=\frac{56}{97}$,	$\frac{2}{97}=\frac{1}{776}+\frac{1}{679}+\frac{1}{56}$.

Per tal modo si sono ottenute direttamente TUTTE le *decomposizioni trinomie* contenute nel manuale di AHMES.

Con procedimento non dissimile si possono stabilire le decomposizioni quadrinomie. Si osservi a tale scopo l'identità:

$$\frac{2}{2n+1}-\frac{1}{(2n+1)x}-\frac{1}{(2n+1)y}-\frac{1}{(2n+1)z}$$
$$=\frac{2xyz-(yz+zx+xy)}{(2n+1)xyz};$$

scrivendola sotto la forma seguente

$$(3) \qquad \frac{2}{2n+1}=\frac{1}{(2n+1)x}+\frac{1}{(2n+1)y}+\frac{1}{(2n+1)z}$$
$$+\frac{1}{(2n+1)\dfrac{xyz}{2xyz-(yz+zx+xy)}}$$

si vedrà che essa guida ad una decomposizione quadrinomia purchè si scelgano per x, y, z dei valori fra loro differenti nella serie $2, 3, \ldots,$ e tali che la frazione

$$F(x, y, z)=\frac{xyz}{2xyz-(yz+zx+xy)},$$

ridotta a' suoi minimi termini, abbia per denominatore $2n+1$ o un suo summultiplo. Per fare tale scelta è opportuno servirsi di una tabella di valori della funzione $F(x, y, z)$: limitandosi a valori delle indeterminate compresi fra 2 e 10, essa tabella si riduce alla seguente:

$F(2, 3, 4) = \frac{2}{11}$	$F(2, 5, 7) = \frac{70}{81}$	$F(3, 4, 5) = \frac{60}{73}$
$F(2, 3, 5) = \frac{30}{29}$	$F(2, 5, 8) = \frac{40}{47}$	$F(3, 4, 6) = \frac{6}{7}$
$F(2, 3, 6) = 1$	$F(2, 5, 9) = \frac{90}{107}$	$F(3, 4, 7) = \frac{84}{107}$
$F(2, 3, 7) = \frac{42}{43}$	$F(2, 5, 10) = \frac{5}{6}$	$F(3, 4, 8) = \frac{24}{31}$
$F(2, 3, 8) = \frac{24}{25}$	$F(2, 6, 7) = \frac{21}{25}$	$F(3, 4, 9) = \frac{108}{141}$
$F(2, 3, 9) = \frac{18}{19}$	$F(2, 6, 8) = \frac{24}{29}$	$F(3, 4, 10) = \frac{60}{79}$
$F(2, 3, 10) = \frac{15}{16}$	$F(2, 6, 9) = \frac{27}{33}$	$F(3, 5, 6) = \frac{45}{56}$
$F(2, 4, 5) = \frac{20}{21}$	$F(2, 6, 10) = \frac{30}{37}$	$F(3, 5, 7) = \frac{105}{139}$
$F(2, 4, 6) = \frac{12}{13}$	$F(2, 7, 8) = \frac{56}{69}$	$F(3, 5, 8) = \frac{120}{161}$
$F(2, 4, 7) = \frac{26}{31}$	$F(2, 7, 9) = \frac{126}{157}$	$F(3, 5, 9) = \frac{45}{61}$
$F(2, 4, 8) = \frac{8}{9}$	$F(2, 7, 10) = \frac{35}{44}$	$F(3, 5, 10) = \frac{30}{41}$
$F(2, 4, 9) = \frac{36}{41}$	$F(2, 8, 9) = \frac{72}{91}$	$F(3, 6, 7) = \frac{14}{19}$
$F(2, 4, 10) = \frac{20}{23}$	$F(2, 8, 10) = \frac{40}{51}$	$F(3, 6, 8) = \frac{8}{11}$
$F(2, 5, 6) = \frac{15}{17}$	$F(2, 9, 10) = \frac{45}{58}$	$F(3, 6, 9) = \frac{18}{25}$

$F(3, 6, 10) = \frac{5}{9}$	$F(4, 6, 9) = \frac{158}{259}$	$F(5, 7, 10) = \frac{70}{109}$
$F(3, 7, 8) = \frac{168}{135}$	$F(4, 6, 10) = \frac{60}{89}$	$F(5, 8, 9) = \frac{360}{563}$
$F(3, 7, 9) = \frac{63}{89}$	$F(4, 7, 8) = \frac{56}{83}$	$F(5, 8, 10) = \frac{40}{63}$
$F(3, 7, 10) = \frac{210}{299}$	$F(4, 7, 9) = \frac{252}{377}$	$F(5, 9, 10) = \frac{80}{47}$
$F(3, 8, 9) = \frac{216}{307}$	$F(4, 7, 10) = \frac{140}{211}$	$F(6, 7, 8) = \frac{168}{263}$
$F(3, 8, 10) = \frac{120}{173}$	$F(4, 8, 9) = \frac{72}{109}$	$F(6, 7, 9) = \frac{378}{599}$
$F(3, 9, 10) = \frac{90}{131}$	$F(4, 8, 10) = \frac{40}{61}$	$F(6, 7, 10) = \frac{105}{167}$
$F(4, 5, 6) = \frac{60}{83}$	$F(4, 9, 10) = \frac{45}{68}$	$F(6, 8, 9) = \frac{72}{115}$
$F(4, 5, 7) = \frac{140}{197}$	$F(5, 6, 7) = \frac{210}{313}$	$F(6, 8, 10) = \frac{60}{73}$
$F(4, 5, 8) = \frac{40}{57}$	$F(5, 6, 8) = \frac{120}{181}$	$F(6, 9, 10) = \frac{45}{73}$
$F(4, 5, 9) = \frac{180}{259}$	$F(5, 6, 9) = \frac{90}{121}$	$F(7, 8, 9) = \frac{594}{1007}$
$F(4, 5, 10) = \frac{20}{29}$	$F(5, 6, 10) = \frac{15}{23}$	$F(7, 8, 10) = \frac{280}{457}$
$F(4, 6, 7) = \frac{84}{121}$	$F(5, 7, 8) = \frac{280}{429}$	$F(7, 9, 10) = \frac{630}{1037}$
$F(4, 6, 8) = \frac{24}{35}$	$F(5, 7, 9) = \frac{315}{527}$	$F(8, 9, 10) = \frac{360}{599}$.

Per applicarla alla determinazione delle decomposizioni quadrinomie della frazione $\frac{2}{29}$, cercheremo in essa quei valori della frazione $F(x, y, z)$ il cui denominatore è 29. Troveremo i seguenti:

$$F(2, 3, 5) = \frac{30}{29}, \qquad F(2, 6, 8) = \frac{24}{29}, \qquad F(4, 5, 10) = \frac{20}{29}$$

e ne dedurremo tosto le seguenti decomposizioni

$$* \; \frac{2}{29} = \frac{1}{58} + \frac{1}{87} + \frac{1}{95} + \frac{1}{30}$$
$$\frac{2}{29} = \frac{1}{58} + \frac{1}{174} + \frac{1}{232} + \frac{1}{24}$$
$$* \; \frac{2}{29} = \frac{1}{116} + \frac{1}{145} + \frac{1}{290} + \frac{1}{20},$$

la seconda delle quali s'incontra nel Manuale egiziano. Servendosi dello stesso metodo di calcolo si giunge alle conclusioni seguenti:

$2n + 1 = 43$	$F(2, 3, 7) = \frac{42}{43}$	$\frac{2}{43} = \frac{1}{86} + \frac{1}{129} + \frac{1}{301} + \frac{1}{42}$
$2n + 1 = 61$	$F(3, 5, 9) = \frac{45}{61}$	$* \; \frac{2}{61} = \frac{1}{183} + \frac{1}{305} + \frac{1}{549} + \frac{1}{45}$
	$F(4, 8, 10) = \frac{40}{61}$	$\frac{2}{61} = \frac{1}{244} + \frac{1}{488} + \frac{1}{610} + \frac{1}{40}$
$2n + 1 = 73$	$F(3, 4, 5) = \frac{60}{73}$	$\frac{2}{73} = \frac{1}{219} + \frac{1}{292} + \frac{1}{365} + \frac{1}{60}$
	$F(6, 9, 10) = \frac{45}{73}$	$* \; \frac{2}{73} = \frac{1}{438} + \frac{1}{657} + \frac{1}{730} + \frac{1}{45}$
$2n + 1 = 79$	$F(3, 4, 10) = \frac{60}{79}$	$\frac{2}{79} = \frac{1}{237} + \frac{1}{316} + \frac{1}{790} + \frac{1}{60}$
$2n + 1 = 83$	$F(4, 5, 6) = \frac{60}{83}$	$\frac{2}{83} = \frac{1}{332} + \frac{1}{415} + \frac{1}{498} + \frac{1}{60}$
	$F(4, 7, 8) = \frac{56}{83}$	$* \; \frac{2}{83} = \frac{1}{332} + \frac{1}{581} + \frac{1}{664} + \frac{1}{56}$.

E così restano ottenute anche TUTTE le *decomposizioni qua-*

drinomie riferite da AHMES. Che anche per esse sia verificata l'osservazione B risulta della formola (3) e dall' osservare che

$$F(x, y, z) < 1$$

tranne per le tre terne di valori di x, y, z: 2, 3, 5; 2, 3, 6 e 3, 7, 8.

Quanto alle due decomposizioni binomie escluse, esse si presentano tanto spontaneamente che nulla si oppone a che si ammetta essere desse state ottenute direttamente o dal primo costruttore della tabella, che le preferì a quelle che si otterrebbero applicando il concetto generale, o da qualche successivo rimaneggiatore che volle lasciare traccia di sè. Ad esempio esse possono ricavarsi con le seguenti trasformazioni (eseguibili al certo da chi conosceva così bene, come gli antichi Egiziani, il maneggio delle frazioni)

$$\frac{2}{35} = \frac{5+7}{5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 6} = \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$$

$$\frac{2}{91} = \frac{7+13}{7 \cdot 10 \cdot 13} = \frac{1}{10 \cdot 13} + \frac{1}{7 \cdot 10} = \frac{1}{70} + \frac{1}{130}.$$

Ciò conduce naturalmente a notare da ultimo come alla tabella da noi studiata tengano dietro nel Papiro alcuni problemi sulla *ripartizione dei pani* i cui risultati possono compendiarsi nella seguente tabellina:

$$\tfrac{3}{10} = \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{10}, \qquad \tfrac{6}{10} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{10}, \qquad \tfrac{7}{10} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5},$$

$$\tfrac{8}{10} = \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{30}, \qquad \tfrac{9}{10} = \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{30}.$$

Ora, se da essa non si può trarre alcuna conferma alla nostra congettura sul concetto che servì a costruire la grande tabella, ci sembra però che da essa non scaturisca alcun argomento in contrario; chè le questioni ivi risolte sono semplici giuochi in confronto di quelle trattate dall' altra: e infatti si trova anzitutto assai agevolmente

$$\tfrac{3}{10} = \tfrac{2}{10} + \tfrac{1}{10} = \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{10}$$

$$\tfrac{6}{10} = \tfrac{5}{10} + \tfrac{1}{10} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{10}$$

$$\tfrac{7}{10} = \tfrac{5}{10} + \tfrac{2}{10} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5};$$

in seguito coll' aiuto dalla tavola maggiore si trova

$$\frac{8}{10} = \frac{4}{5} = \frac{10+2}{3 \cdot 5} = \frac{2}{3} + \frac{2}{15} = \frac{2}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30},$$

dalla quale finalmente si conclude:

$$\tfrac{9}{10} = \tfrac{8}{10} + \tfrac{1}{10} = \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{10} + \tfrac{1}{30} = \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{30}.$$

[1] Per maggiori particolari bibliografici rimando alla memoria di A. FAVARO: *Sulla interpretazione matematica del papiro Rhind publicato ed illustrato dal Prof. Augusto Eisenlohr* (Mem. della r. accademia di Modena, **19**, 1879, p. 89—143).

[2] A. EISENLOHR. *Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter* (Leipzig 1877). Le citazioni seguenti si riferiscono alla *Zweite Ausgabe* (ohne Tafeln) uscita a Lipsia nel 1891.

[3] M. CANTOR. *Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst* (Leipzig 1875). — *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* I (Leipzig 1880).

[4] Mi esprimo così perchè l'interpretazione di EISENLOHR e CANTOR venne gagliardamente combattuta da L. RODET nell' articolo intitolato *Les prétendus problèmes d'algèbre du manuel du calculateur Egyptien* (*papyrus Rhind*) (Journal Asiatique $\mathbf{18}_7$, 1881, p. 184—232 e 390—459). E, mentre sarebbe stata desirabile su quest' argomento un' ampia e obbiettiva discussione, la critica del RODET non fu seguita che da una breve replica dall' EISENLOHR (Journal Asiatique $\mathbf{19}_7$, 1882, 515—518).

[5] Che agli agricoltori esso fosse destinato, emerge dalle parole di chiusa »Dà la caccia agli insetti nocivi e ai topi, (estirpa) le varie erbe cattive, prega il Dio Ra per ottenere calore, vento ed acqua alta«.

[6] Cfr CANTOR, *Vorlesungen* citate p. 23.

[7] *Esempi:* Sia $f = \frac{N}{D}$ una frazione propria, ridotta alla sua più semplice espressione. Si divida D per N e si designi con q il quoziente ed r il resto. Sarà

$$D = Nq + r, \qquad r < N$$

epperò

$$\frac{1}{q+1} < \frac{N}{D} < \frac{1}{q}.$$

Ne viene che, chiamando f_1 e f_1' due nuove frazioni proprie si potrà

$$f = \frac{1}{q} - f_1, \qquad f = \frac{1}{q+1} + f_1'.$$

Applicando a f_1 la prima di queste formole e a f_1' la se-

conda e così proseguendo, si avranno due decomposizioni del seguente tipo

$$f = \frac{1}{q} - \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} - \ldots$$

$$f = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{q'_1} + \frac{1}{q'_2} + \ldots$$

ognuna con un numero finito di termini; la prima è dovuta a LAMBERT (cfr. LAGRANGE, *Essai d'analyse numérique sur la transformation des fractions,* Oeuvres complètes T. VII, p. 297) e non corrisponde al metodo di decomposizione egiziano; vi corrisponde invece la seconda che fu additata da SYLVESTER (*On a point in the theory of vulgar fractions,* American journal of mathematics 3, 1880, p. 332 e 388).

8 Valga a provarlo in primo luogo il preludio alla tabella e in secondo luogo il fatto che nelle parti ultime del Papiro non vengono sempre utilizzati i risultati ottenuti nelle prime (ad es. nel probl. 33 non si approfitta del valore già trovato per $\frac{2}{77}$).

9 Cfr FAVARO, l. c. pag. 106.

10 Quanto alle ragioni che consigliarono la scelta fra le varie forme di sviluppo, è forse vano tentare di scoprirle visto che possono provenire o dalle opinioni del calcolatore o dai fini speciali a cui i risultati dovevano servire. In generale sembrano evitate le decomposizioni conducenti a numeri molto grandi (tanto che non s'incontrano mai denominatori di 4 cifre) e prescelte quelle che si presentano più spontaneamente.

11 Alludo a quelli in cui si deve determinare una frazione che unita ad un' altra dia per somma un numero dato (intero o fratto).

12 Anche nei calcoli conservatrici si notano delle lacune che non si possono spiegare se non come indizii di calcoli eseguiti a memoria.

13 Lo stesso faremo in seguito anche senza avvertirlo espressamente.

14 Nel Papiro originale la frazione $\frac{1}{188}$ è illegibile in causa di una rottura.

15 Si veggano specialmente i calcoli *Seqem* illustrati da EISENLOHR l. c. p. 35—42.

Progrès successifs des sciences mathématiques chez les peuples de l'Europe.

Par V. Bobynin à Moskwa.

Nombre de peuples ont terminé leur cours de vie historique après en avoir traversé toutes les phases, à partir des premiers débuts jusqu'à la décadence postérieure et l'extinction finale. Tels sont les Egyptiens, les Chaldéens, les Indous et les Grecs. Nous avions dit[1] que l'état actuel de l'histoire nous permet de considérer l'ensemble de l'activité scientifique seulement chez les Grecs. Nous en avons esquissé aussi le tableau concernant le progrès mathématique. Ce tableau comprend trois phases distinctes: 1° L'appropriation des connaissances que l'humanité possédait déjà. 2° Le progrès indépendant de la science. Commencé sous l'influence de plus en plus décroissante des maîtres, il est bientôt entièrement dominé par le génie de la nation elle-même. 3° L'époque de la décadence. Les travaux mathématiques laissent à désirer sous le rapport de la qualité autant que sous celui de la quantité. Le génie grec se soumet à des influences étrangères et cette soumission n'est que trop prouvée par un accroissement d'ouvrages dans les domaines et les directions le moins propres à l'esprit grec. Enfin tout semblant d'originalité s'éteint dans les écrits des mathématiciens grecs.

Tentons maintenant un aperçu des progrès successifs dans les mathématiques chez les autres peuples de l'Europe.

Les Romains furent la première nation civilisée que heurtèrent si souvent les Celtes d'abord, les Germains et les Slaves ensuite. A l'Orient, après le démembrement de l'Empire, il y a les Bysantins, descendants dégénérés d'un peuple glorieux. Les jeunes races européennes eurent donc à recevoir de ces deux nations, et de la première surtout, le dépôt scientifique légué par l'antiquité. Voyons, quelle a été l'oeuvre des maîtres et ce qu'ils ont transmis aux élèves.

Nous venons de dire que les Bysantins étaient une race dégénérée. Quant à la nation romaine, barbare sous plus d'un point, elle s'était consumée en entreprises guerrières et ne fût accessible à des intérêts plus élevés qu'en touchant à la décadence et à la dégénération. Les Romains s'étaient vite approprié le côté extérieur et pour la plupart négatif de la civi-

lisation grecque. Il n'en fut point ainsi pour le fin fond de l'intelligence hellénique. En science comme en philosophie, les Romains restèrent à tout jamais de faibles disciples des Grecs, n'avançant pas au delà de l'élémentaire et des applications pratiques. Les élèves des Romains n'eurent donc pas grand'chose à recevoir de leurs maîtres.

Les habitants du Bas-Empire étaient à même de donner davantage, si non en vertu des connaissances qu'ils possédaient, du moins a l'aide des trésors littéraires et scientifiques qu'ils avaient hérités. Mais leur situation géographique les isolant de la plus grande partie de l'Europe, ils ne pouvaient user de leur influence que de par l'Italie.

Pour l'Europe adolescente il y a pourtant un avantage dans la faiblesse de ses maîtres: elle les comprend plus facilement. Néanmoins, les connaissances qu'ils transmettent se répandent fort lentement. La marche en devient plus rapide à mesure que s'accomplit la fusion des Romains, affaiblis et agonisants, avec les tribus germaines dont la presqu'île est envahie. Une nation nouvelle se forme alors dans ce pays, une nation qui surpasse en culture les jeunes races européennes et que le lecteur devine être les Italiens. En effet, soit qualités héritées des ancêtres indigènes civilisés, soit dépôt esthétique et intellectuel conservé malgré les invasions, les Italiens occupent la première place dans la vie intellectuelle de l'Europe pendant tout le Moyen âge, comme au début de l'histoire moderne. En donnant au monde le créateur de l'érudition monastique, tel que Cassiodore, l'Italie fit participer le clergé aux intérêts littéraires et en partie scientifiques. Elle le rendit donc promoteur des connaissances romaines parmi les jeunes peuples européens. Cette impulsion donnée au clergé se répandit quoique lentement en dehors de l'Italie. Les peuples le plus rapprochés des Italiens par la culture en furent touchés les premiers et la transmirent par dégrés à des voisins plus arriérés. Comme représentants principaux de ce mouvement citons au 7e siècle le célèbre Isidore en Espagne, au 8e siècle le moine écossais Bède le Vénérable et le savant Alcuin dans la Grande Bretagne. Pour le domaine mathématique nous avons l'illustre Gerbert, qui, dans les dernières années de sa vie, occupa le saint-siège sous le nom de Silvestre II. Avec lui se clôt la première phase du progrès mathèmatique en Europe occidentale, celle de l'appropriation de la science romaine († 1003).

Après les Romains ce sont les Arabes qui continuent leur oeuvre civilisatrice. Voyons ce que l'Europe va recevoir en fait

des mathématiques de ces maîtres nouveaux et à une culture supérieure. Les Arabes avaient reçu leurs premières connaissances mathématiques des Indous; cela fait, ils puisèrent avec toute la fougue de jeunesse aux trésors laissés par les mathématiciens grecs. La précocité intellectuelle les empêcha toutefois de posséder à fond les tendances et l'esprit des mathématiques grecques et ils travaillèrent toujours dans la direction arithmético-algébrique, héritée des Indous. Cela a peutêtre pour cause que la science indoue ne fut point transmise aux Arabes dans l'exposé sévèrement scientifique d'un Euclide, d'un Archimedes ou d'un Apollonios, mais sous des formes plus simples et dont les différentes *Siddhantas* nous donnent une idée.

Quoique les Arabes n'aient pas réussi à s'approprier en entier l'oeuvre des Grecs, ce qu'ils importaient en Europe était bien la science dans le véritable sens de ce mot, et non un recueil de connaissances pratiques auquel s'étaient bornés les Romains.

L'oeuvre civilisatrice des Arabes commence au temps de Gerbert, arrive toujours croissant à l'époque des Croisades et atteint son plus haut dégré dans celle qui les suit. Le système des chiffres indous est la première chose que les Arabes enseignent à l'Europe. Celle-ci étudie ensuite leur science mathématique et les auteurs grecs d'après leurs traductions. Aux 12e et 13e siècles on voit des générations entières, occupées à traduire de l'arabe, en Italie comme en Espagne. Alphonse X, roi de Castille, a une large part dans l'encouragement de ces travaux.

Nous avons dit que pendant tout le Moyen âge l'Italie se trouve à la tête de la vie intellectuelle de l'Europe. C'est à elle aussi que revient le rôle prédominant dans l'étude des mathématiques arabes. C'est elle qui fut la patrie des traducteurs éminents, tels que Platon de Tivoli, Gérard de Crémone, Giovanni Campano. A la fin du 12e siècle c'est l'Italien Léonard de Pise, qui s'approprie la science des mathématiques arabes dans toute son étendue. Les oeuvres de ce savant deviennent la source principale à laquelle puise l'Italie et, par l'entremise des universités italiennes, l'Europe entière. Mais Léonard a devancé son temps de deux siècles et demie. L'appropriation générale de la science arabe en Italie n'arrive que vers 1494. Alors elle est clairement démontrée par le code d'un certain Luca Paciuolo. Mathématicien médiocre et homme à l'intelligence ordinaire, Paciuolo entreprend de former un livre de tout ce que l'Europe a reçu des Arabes en fait des

mathématiques. Dans son recueil il se sert avant tout des oeuvres de LÉONARD de Pise. La fin du 15ᵉ siècle peut donc être considérée comme terminant pour les peuples européens l'époque de l'appropriation des mathématiques arabes.

Le 16ᵉ siècle vient appuyer à plus forte raison ce que nous venons de dire. On y voit les mathématiciens italiens, FERRO, TARTAGLIA, CARDANO, FERRARI poursuivre les recherches des Arabes dans le domaine de l'algèbre. Après avoir égalé les maîtres, les élèves continuent leur oeuvre. Une ère nouvelle s'ouvre pour la science mathématique en Europe. Nous ne saurions assez répéter cependant, que le progrès en est limité à la direction arithmético-algébrique reçue des Arabes.

Pendant tout le Moyen âge la science grecque, dans ses sources originales, est demeurée étrangère à l'Europe. Ce n'est qu'après la chute de Bysance que l'Occident se vit en possession des trésors légués par la Grèce. Or le dépôt en était trop riche et trop profond. Il arriva donc que les oeuvres classiques des géomètres grecs, mal comprises et imparfaitement retenues, furent étudiées superficiellement, sans qu'on ait cherché à descendre au fond des méthodes elles-mêmes. Les élèves se sont trouvés incapables de continuer l'oeuvre des maîtres. S'il y a pourtant des progrès géométriques à noter c'est encore sur un fond arithmético-algébrique, dans les applications de l'algèbre à la géométrie, déjà considérablement développées par les Indous et les Arabes. Cette faiblesse de la géométrie continue jusqu'à DESCARTES.

Le génie du penseur français termina les recherches antérieures sur l'application de l'algèbre à la géométrie, en rangeant celle-ci définitivement au nombre des sciences qui se développent à l'aide de algèbre ou plutôt de l'analyse. La Géométrie Analytique, cette création éminente de DESCARTES, et plus encore l'Analyse infinitésimale, découverte par NEWTON et LEIBNIZ bientôt après, fournirent enfin à la géométrie les méthodes qui lui avaient manqué dans l'antiquité et même à un géant de pensée tel que ARCHIMEDES. Dès lors la géométrie fait des progrès rapides, mais nous y insistons — sur un terrain qui lui est parfaitement étranger. C'est toujours un fond arithmético-algébrique secondé par des moyens indirects quoique étroitement liés à la géométrie. Ce n'en est point la voie directe et originale, servie par des moyens résultant de sa propre nature.

Ainsi, devenus explorateurs dans la géométrie dont le domaine leur avait été fermé si longtemps, les Européens conti-

nuèrent l'oeuvre des Grecs relativement à ce qui en faisait le sujet, mais en en méconnaissant l'esprit et les vrais moyens. Ils se laissèrent entrainer par la facilité et la rapidité à découvrir les vérités géométriques nouvelles. Ils étaient loin de s'apercevoir que dans leurs travaux ils s'écartaient de la direction purement géométrique léguée par la science grecque et que, ne traitant point la géométrie au point de vue de la synthèse, ils ne pouvaient la posséder véritablement. Ceux qui, comme DESARGUES et PASCAL, y avaient pénétré plus au fond, n'allèrent pas au delà de quelques modestes tentatives dans la voie dejà tracée par les géomètres grecs.

Ce mépris au fond involontaire de la géométrie synthétique dure jusqu'à la fin du siècle dernier, alors que les travaux de MONGE et de CARNOT en assurent le progrès en en créant les moyens. Leurs disciples et successeurs, PONCELET, STEINER, CHASLES nous font enfin assister au 19e siècle aux progrès de la géométrie dans les voies qui lui sont propres. C'est à partir de ce moment que les Européens peuvent se croire en possession complète des mathématiques grecques. Ils peuvent aussi se flatter de tenir en leurs mains le progrès futur des sciences mathématiques dans tous les domaines, comme dans toutes les directions actuellement connues.

En comparant ce qui vient d'être dit avec le mouvement des mathématiques grecques dans le tableau exposé plus haut, nous voyons que dans les deux cas le progrès successif de la nation dans la voie mathématique a suivi le même plan et traversé les mêmes phases. L'Europe a terminé celle de l'appropriation des connaissances, antérieurement acquises par l'humanité; elle a aussi fait immensément dans celle qui suit et qui est l'époque du progrès original de la science. Mais jusqu'où elle s'y est avancée et a-t-elle touché au point culminant, après lequel vient le déclin, ainsi que le soutiennent quelques auteurs, c'est ce qu'en notre qualité de contemporains nous ne sommes pas à même de juger.

[1] BOBYNIN, *Sur l'oeuvre des Grecs dans le développement des mathématiques*. Biblioth. Mathem. 1892, 1—2.

RECENSIONEN. — ANALYSES.

F. Müller. ZEITTAFELN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATIK, PHYSIK UND ASTRONOMIE BIS ZUM JAHRE 1500, MIT HINWEIS AUF DIE QUELLEN-LITERATUR. Leipzig, Teubner 1892. 8°, IV + 103 + (1) p.

Le but de cet ouvrage est, d'une part de rendre compte, en ordre chronologique, tant des savants qui ont contribué aux progrès des sciences mathématiques que de leurs principales découvertes, d'autre part de servir de guide pour ceux qui veuillent approfondir l'étude de l'action scientifique d'un certain mathématicien et qui, par conséquent, ont besoin de connaître quels écrits il faut consulter à cet effet. Conformément à l'indication du titre, M. MÜLLER n'a pas continué ses *Zeittafeln* au delà de l'an 1500, sans doute parce que, pour ce qui concerne les mathématiques modernes, il faut procéder d'une manière un peu différente.

Pour donner une épreuve du plan adopté par M. MÜLLER, nous reproduisons ici les lignes qu'il a consacrées à LEODAMAS (p. 13):

380. **Leodamas** von Thasos. Schüler des Platon, der für ihn die analytische Methode geschaffen haben soll, mit deren Hilfe Leodamas vieles neue in der Geometrie entdeckte.

A la fin de l'écrit, on trouve une table alphabétique des noms et des matières, qui en fait l'usage plus commode.

Il va sans dire qu'il est actuellement impossible de rédiger un compendium tel que celui de M. MÜLLER dont toutes les indications soient exactes. Ainsi p. ex. l'auteur du commentaire sur le *Centiloquium*, auquel fait allusion M. MÜLLER à la page 60, n'est pas IBN RIDHWAN, mais AHMED BEN JUSUF (voir Biblioth. Mathem. 1891, p. 42). De même, d'après ce qui a montré GOVI, LEONARDO DA VINCI ne s'est pas servi des signes + et —, comme l'indique M. MÜLLER. Mais en général, autant que nous avons pu les contrôler, les notices de M. MÜLLER sont exactes. — Pour ce qui concerne les renseignements bibliographiques, il est très difficile de faire un choix juste parmi les nombreux ouvrages et notes historiques parues jusqu'à présent, et il est impossible de faire le choix d'une manière qui satisfasse à tous. De notre côté, nous avons très peu à objecter à la partie bibliographique du livre; nous nous permettons seulement de faire observer que, à notre avis, l'écrit de BIERING (p. 9), qui est un simple plagiat, ne mérite pas

d'être mentionné, mais que, d'autre part, en parlant de BEHAIM, M. MÜLLER aurait dû indiquer l'intéressant écrit de M. GÜNTHER: *Martin Behaim* (Bamberg 1890) et la note du même auteur: *Die erste Anwendung des Jakobsstabes zu geographischen Ortsbestimmungen* citée déjà à la page 77.

En somme, l'ouvrage de M. MÜLLER est très utile, et nous le recommandons vivement aux étudiants de l'histoire des mathématiques, auxquels il facilitera sans doute l'étude de cette science; nous espérons aussi avec l'auteur que son travail sera un moyen de propager l'intérêt pour des recherches historiques dans le domaine des mathématiques.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

F. Rudio. ARCHIMEDES, HUYGENS, LAMBERT, LEGENDRE. VIER ABHANDLUNGEN ÜBER DIE KREISMESSUNG. DEUTSCH HERAUSGEGEBEN UND MIT EINER ÜBERSICHT ÜBER DIE GESCHICHTE DES PROBLEMS VON DER QUADRATUR DES ZIRKELS VON DEN ÄLTESTEN ZEITEN BIS AUF UNSERE TAGE VERSEHEN. Leipzig, Teubner 1892. 8°, VIII + 166 p.

En 1890, M. RUDIO, publia dans le tome 35 de la Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft zu Zürich une notice historique sur la quadrature du cercle. L'écrit dont nous allons rendre compte contient un remaniement complet de cette notice et une traduction ou reproduction de quatre ouvrages importants sur le rapport de la circonférence d'un cercle au diamètre, savoir: 1) ARCHIMEDES: *Κύκλου μέτρησις*; 2) HUYGENS: *De circuli magnitudine inventa*, paru en 1654; 3) LAMBERT: *Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur des Circuls suchen*, parues en 1770; 4) LEGENDRE: *Note où l'on démontre que le rapport de la circonférence au diamètre et son carré sont des nombres irrationnels*, parue en 1794.

Sans doute, l'histoire du problème de la quadrature du cercle doit être considérée comme la meilleure introduction à l'étude de l'histoire des mathématiques, d'une part parce que le problème dont il s'agit est le plus populaire des mathématiques pures, d'autre part parce que les recherches sur la quadrature du cercle ont été liées à presque toutes les branches des mathématiques avant d'être menées à fin par les travaux de MM. HERMITE, LINDEMANN er WEIERSTRASS. Tres justement, M. RUDIO fait observer (p. 68—69):

Ursprünglich eine rein geometrische Aufgabe von verhältnissmässig untergeordneter Bedeutung, hat sich die Frage

nach der Quadratur des Zirkels im Laufe der Jahrhunderte zu einem arithmetischen Probleme von der höchsten Interesse herausgebildet. Es hat Teil genommen an allen wichtigeren Wandlungen, welche die mathematischen Anschauungen und Methoden allmählich erfahren haben, es ist mit ihnen und durch sie im Laufe der Zeit selbst umgestaltet worden bis sich schliesslich die Fragestellung so abklärte und präzisierte, dass eine bestimmte Antwort gegeben werden konnte.

L'exposition que donne M. RUDIO de l'histoire de la quadrature du cercle est en même temps très complète et très succincte, et nous sommes convaincu qu'il réussira dans son dessein »das Interesse für historisch-mathematische Studien zu wecken und zu fördern». Quant aux quatre écrits annexés à la notice historique, ils méritent tous d'être étudiés par les jeunes mathématiciens de nos universités et par les élèves des écoles normales; aux derniers, le travail de HUYGENS fournira en particulier des leçons utiles aussi au point de vue pédagogique.

En terminant cette courte annonce du livre de M. RUDIO, nous regrettons seulement qu'il n'y ait pas ajouté à la fin une table alphabétique des noms des auteurs cités; on ne peut pas trop insister sur l'utilité d'une telle table pour quiconque veuille consulter un ouvrage historique.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von || journal d'histoire des mathématiques publié par G. ENESTRÖM. Stockholm. 8°.

1892: 3. — [Analyse de l'année 1891:] Fiziko-matem. naouki **11**, 1892, 31—36. (V. BOBYNIN.)

Физико-математическія науки въ ихъ настоящемъ и прошедшемъ. Журналъ издаваемый В. В. Бобынинымъ. Москва. 8°.

1892: 1. — Les sciences mathématiques dans leur état actuel et passé. Journal publié par V. V. BOBYNIN.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von M. CANTOR. Leipzig. 8°.

37 (1892): 3—6.

°**Berlet, B.,** Adam Riese, sein Leben, seine Rechenbücher und seine Art zu rechnen. Die Coss von Adam Riese. Frankfurt a/M. 1892.

8°, 64 p. + portr. + facsim. — [1 Mk.]

Besthorn, R. O., Über den Commentar des Simplicius zu den Elementa.

Biblioth. Mathem. 1892, 65—66.

БОБЫНИНЪ, В. В., Русская физико-математическая библіографія. **2** : 3 [1787—1791]. Москва 1890—1892.

8°, (2) + 161 + (1) p. — BOBYNIN, V. V., Bibliographie russe des sciences mathématiques et physiques. Catalogue de livres et de mémoires des sciences mathématiques et physiques publiés en Russie depuis l'invention de l'imprimérie jusqu'à présent. — Appendice au journal »Fiziko-matematitcheskia naouki» **9** (1890).

Braunmühl, A. v., Historische Studie über die organische Erzeugung ebener Curven von den ältesten Zeiten bis zum Ende des achtzehnten Jahrhunderts.

| Katalog der mathematischen Ausstellung zu Nürnberg 1892. 35 p.

Cajori, F., Evolution of criteria of convergence.

New York, Mathem. Soc., Bulletin **2**, 1892, 1—10.

°**Derousseau, J.**, Historique et résolution analytique complète du problème de Malfatti. Bruxelles, Hayez 1892.

8°, 52 p. + 1 pl.

Dickstein, S., Sur les découvertes mathématiques de Wronski.

Biblioth. Mathem. 1892, 85—90.

Diophanti Alexandrini Opera omnia cum graecis commentariis. Edidit et latine interpretatus est P. TANNERY. Volumen I. DIOPHANTI quae exstant omnia continens. Leipzig, Teubner 1893.

8°, IX + 481 p.

Favaro, A., Studi italiani sulla storia della matematica.

Biblioth. Mathem. 1892, 67—84.

Fergola, E., Per Annibale de Gasparis.

Napoli, Accad. d. sc. fis. e matem., Rendiconti $\mathbf{6}_2$, 1892, 65—66. — Nécrologie.

Galilei, G., Dialog über die beiden hauptsächlichsten Weltsysteme, das Ptolemäische und das Kopernikanische. Aus dem italiänischen übersetzt und erläutert von E. STRAUSS. Leipzig, Teubner 1892.

LXXIX + 585 p. — [Analyse:] Zeitschrift für Mathem. **37**, 1892; Hist. Abth. 213—215. (CANTOR.)

Gerhardt, C. J., Desargues und Pascal über die Kegelschnitte.

| *Berlin*, Akad. d. Wissensch., Mittheilungen 1892. 22 p.

°**Graves, R. P.**, Life of sir W. R. Hamilton. Addendum. London 1892.

8°. — [1 Mk.]

Heiberg, J. L., Die von Wilhelm von Moerbek benutzten Handschriften.

Zeitschr. für Mathem. **37**, 1892; Hist. Abth. 81.

Lampe, E., La formule de Snell ou d'Ozanam appartient à Nicolas de Cusa.
Mathesis 2_2, 1892, 230—231.

Martin, A., Note on an error in Ball's History of mathematics.
New York, Mathem. soc., Bulletin **2**, 1892, 10—11.

Müller, F., Zeittafeln zur Geschichte der Mathematik, Physik und Astronomie bis zum Jahre 1500, mit Hinweis auf die Quellen-Literatur. Leipzig, Teubner 1892.
8°, IV + 103 + (1) p. — [2·40 Mk.]

Narducci, E., Catalogo di manoscritti ora posseduti da D. B. Boncompagni. Seconda edizione. Roma 1892. 4°.

Nesselmann, G. H. F., Anmerkungen zu Diofant [mitgeteilt von M. CURTZE].
Zeitschr. für Mathem. **37**, 1892; Hist. Abth. 121—146, 161—192.

Ovidio, E. d', Discorso in commemorazione di Angelo Genocchi pronunciato nella inaugurazione di un busto marmoreo presso la reale accademia delle scienze di Torino addì 26 giugno 1892. Torino 1892.
8°, 19 p.

Pascal, E., Il senatore Errico Betti.
Rivista di matem. **2**, 1892, 151—153.

Pinto, L., Per Dino Padelletti.
Napoli, Accad. d. sc. fis. e matem., Rendiconto 6_2. 1892, 49—50. — Nécrologie.

Reyes y Prósper, V., Proyecto de clasificación de los escritos lógico-simbólicos especialmente de los post-boolianos.
El progreso matem. **2**, 1892, 229—232.

Rudio, F., Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung. Deutsch herausgegeben und mit einer Übersicht über die Geschichte des Problems von der Quadratur des Zirkels von den ältesten Zeiten bis auf unsere Tage versehen. Leipzig, Teubner 1892.
8°, VIII + 166 p.

ШПАЧИНСКИЙ, Э. К., Іосифъ Андреевичъ Клейберъ. (Некрологъ.)
Vjestnik elem. matem. **12**, 1892, 134—136. — SCHPATSCHINSKIJ, E. K., J.-A. Kleiber. Nécrologie.

СТОЛѢТОВЪ, А., ЖУКОВСКІЙ, Н. и НЕКРАСОВЪ, П., Софья Василевна Ковалевская. Москва 1891.
8°, 55 p. + portrait. — [1 roub.] — STOLJETOFF, A., CHOUKOWSKIJ, N. et NEKRASOFF, P., Sophie Kowalevski.

Tannery, P., Sur les lettres inédites de Descartes à la bibliothèque de l'Institut.
Bullet. d. sc. mathém. 16_2, 1892, 229—232.

Tannery, P., A propos de la correspondance de Huygens.
Bullet. d. sc. mathém. 16_2, 1892, 247—255.

T[orelli], **G.**, Lista delle pubblicazioni di D. Padelletti.
Palermo, Circolo matem., Rendiconti **6**, 1892, 68—72.

T., H., Историческая замѣтка о нѣкоторыхъ формулахъ прямолинейной тригонометріи.
Vjestnik elem. matem. **12**, 1892, 49—52. — Remarques historiques sur quelques formules de la trigonométrie rectiligne.

Wittstein, **A.**, Unsere Kenntnisse von alten Erd- und Himmelsgloben.
Zeitschr. für Mathem. **37**, 1892; Hist. Abth. 201—209.

Question 39 [sur l'algèbre de Bombelli].
Biblioth. Mathem. 1892, 96. (G. Eneström.)

Brückner, J. M., Das Ottojano'sche Problem. Eine mathematisch-historische Studie. Leipzig 1892. 4°.
Zeitschr. für Mathem. **37**, 1892; Hist. Abth. 216—217. (Cantor.)

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Zweiter Band. Von 1200—1668. Leipzig, Teubner 1892. 8°.
[Analyse de la 2e partie:] Biblioth. Mathem. 1892, 91—92. (G. Eneström). — [Analyse de la 1e partie:] Bullet. des sc. mathém. $\mathbf{16}_2$, 1892, 209—223. (P. Tannery.)

Mathematisches Abhandlungsregister. 1891. Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni. Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. December.
Zeitschr. für Mathem. **37**, 1892; Hist. Abth. 109—120, 228—240.

[Listes d'ouvrages récemment publiés.]
Biblioth. Mathem. 1892, 93—96. — Zeitschr. für Mathem. **37**, 1892; Hist. Abth. 107—108, 159—160, 199—200, 226—227. — Fizikomatem. naouki **11**, 1892, 37—48.

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

40. On sait que Bürmann a proposé en 1796 une formule pour développer une fonction $f(x)$ en une série procédant d'après les puissances d'une fonction arbitraire $\varphi(x)$. Il y a vingt ans, MM. M. Cantor et F. Caspari ont communiqué quelques notices éparses sur sa vie et son action scientifique (voir Zeitschr. für Mathem. **17**, 1872, 428—430; **18**, 1873, 120—122), mais ni l'un ni l'autre a pu indiquer les prénoms, l'année de naissance et de mort de Bürmann.

On demande les indications qui viennent d'être nommées, ainsi que d'autres renseignements sur Bürmann, qui puissent avoir un intérêt plus général. (G. Eneström.)



Index.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK

JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON

PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1893.

NEUE FOLGE 7.

NOUVELLE SÉRIE 7.

STOCKHOLM
G. ENESTRÖM.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
MARKGRAFENSTRASSE 51.

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM 1893.

PARIS
A. HERMANN.
RUE DE LA SORBONNE 8.

Inhalt. — Table des matières.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK | JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON | PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1893. STOCKHOLM. N° 1.

NEUE FOLGE. 7. | Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr. | NOUVELLE SÉRIE. 7.

BERLIN. MAYER & MÜLLER. Markgrafenstrasse 51. | PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Zur Geschichte der Trigonometrie.

Von H. SUTER in Zürich.

Vor einem Jahre erschien in Konstantinopel ein Buch, betitelt: *Traité du quadrilatère, attribué à* NASSIRUDDIN EL-TOUSSY, nach einem Ms. aus der Bibliothek des Grosswezirs EDHEM PASCHA, arabisch und in's französische übersetzt durch ALEXANDER PASCHA KARATHEODORY, ehemaligen Minister der auswärtigen Angelegenheiten. Es ist diese Herausgabe ein sehr verdienstliches Werk, da sie der Geschichte der Trigonometrie eine wesentlich andere Beleuchtung gibt, als dies bis jetzt der Fall war. Obgleich dieses Werk bereits zwei französische Besprechungen erfahren hat (die eine durch CARRA DE VAUX im Journal asiatique **20**$_7$, 1892, die andere durch P. TANNERY im Bulletin des sciences mathématiques, mai 1892), so glaubte ich doch, es dürfte noch eine deutsche nachfolgen, zumal in jenen beiden Besprechungen der wesentliche Fortschritt der historisch-trigonometrischen Forschung mir nicht scharf genug hervorgehoben zu sein schien, und weil ich selbst durch genaues Vergleichen der beiden Texte des Werkes die Korrektheit der Übersetzung in allen wesentlichen Punkten nachzuweisen unternommen hatte.

Mit *Traité du quadrilatère* übersetzt KARATHEODORY das arabische *Schakl al-kattà*, das in arabischen Bücherverzeichnissen bisweilen auftritt und »Sekantenfigur» oder »Transversalenfigur» bedeutet und nichts anderes als eine Behandlung des Satzes

des MENELAOS mit seiner Anwendung auf die Trigonometrie (anfänglich nur sphärische) ist. Bekanntlich hatte schon TÂBIT BEN KURRA eine Abhandlung unter diesem Titel geschrieben,[1] auf die auch am Schlusse seines Buches NASSIR ED-DIN verweist. Ich gebe im folgenden eine Übersicht des Inhaltes des Werkes.

Das I. Buch handelt über die Zusammensetzung der Verhältnisse; die für das folgende wichtigsten Sätze desselben sind:

1) Sind A, B, C 3 homogene Grössen, so ist stets $\frac{A}{B}=\frac{A}{C}\cdot\frac{C}{B}$.

2) Aus $\frac{A}{B}=\frac{C}{E}\cdot\frac{D}{F}$ folgt: $A.E.F=B.C.D$.

Das II. Buch handelt über das *ebene* vollständige Vierseit. Hinsichtlich der verschiedenen Fälle, die stattfinden können in Bezug auf die gegenseitige Lage der 6 Schnittpunkte der 4 Geraden, ist NASSIR ED-DIN (wie übrigens auch nach seinen Angaben seine Vorgänger) nach Art und Weise der alten Geometer furchtbar weitschweifig; was man heutzutage in 2 Fällen abthut, daraus machten die Alten 48 Fälle. Mit Rücksicht auf die verschiedenen Lagen der schneidenden Linie gegenüber den drei andern geschnittenen kommt NASSIR ED-DIN auf die ungeheure Zahl von 497664 Fällen des Satzes des MENELAOS: er bemerkt hierzu allerdings, dass unter dieser Zahl der Fälle viele sind, in denen dieselben Abschnittsverhältnisse auftreten und bricht dann in die Worte aus: »Siehe, wie diese kleine Figur alle diese Verhältnisse ergibt; so hat es der Mächtige, der Weise geordnet!« Er kommt dann auf PTOLEMAIOS und bemerkt, dass dieser sich bloss auf 2 einzige Fälle beschränkt habe. Was in diesen zwei ersten Büchern auf 60 Seiten (im arabischen Text 47) gesagt ist, würde heute ein Mathematiker auf 3 Seiten abthun.

Das III. Buch enthält Vorbereitungen auf das *sphärische* vollständige Vierseit. Der erste Satz als Hülfssatz für das folgende lautet: Wenn in einem Kreise die Sehne der Summe zweier aneinanderstossender Bogen durch den vom Zusammenstosspunkt ausgehenden Durchmesser geschnitten wird, so verhalten sich die beiden Abschnitte derselben wie die Sinus der beiden Bogen. — Im 2. Capitel behandelt er die verschiedenen Auflösungsfälle des rechtwinkligen und schiefwinkligen Dreiecks. Hierbei verfährt er zuerst ganz nach PTOLEMAIOS' Weise mit Hülfe der Sehnen der doppelten Winkel statt der Sinus (vergl. HANKEL, *Zur Geschichte der Mathematik im Alter-*

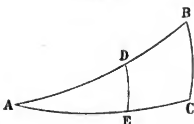
thum und Mittelalter p. 287 über Gâbir ben Aflah), gibt dann aber nachher auch die moderne Art der Berechnung mit Hülfe des Sinussatzes, den er auf zwei verschiedene Arten und jedesmal für das spitz- und für das stumpfwinklige Dreieck beweist. Den Fall zweier Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel behandelt er durch Zerlegung des Dreiecks in zwei rechtwinklige, denjenigen der drei Seiten löst er mit Hülfe des Cosinussatzes, den er allerdings noch nicht ganz in der jetzigen Form ausspricht, sondern statt des Cosinus die Projection der einen Seite auf die andere einführt:[2] $a^2 = b^2 + c^2 - 2cp$. — Im 3. Capitel wird die Aufgabe gelöst, zwei Winkel eines Dreieckes zu berechnen, wenn man ihre Summe (resp. Differenz) und das Verhältniss ihrer Sinus kennt.

Das IV. Buch geht zum sphärischen Vierseit über. Im 2. und 3. Capitel werden das sogenannte explicite und implicite Verhältniss des Ptolemaios bewiesen, d. h. in unsere Sprache übersetzt der Satz des Menelaos für die beiden Fälle, wo die Transversale entweder zwei Seiten des Dreiecks und die Verlängerung der dritten, oder alle drei Seiten in der Verlängerung schneidet; Nassir ed-Din gibt in erster Linie die Ptolemäischen Beweise dieser Sätze, dann aber auch seine eigenen, die »seinen bisherigen Entwicklungen und Principien conformer seien», und insoweit wirklich sehr consequent sind, als das sphärische Vierseit durch Konstruktion der Sehnen zu den einzelnen Bogen auf das ebene Vierseit zurückgeführt wird.

V. Buch. Die drei ersten Kapitel enthalten wieder weitschweifige Auseinandersetzungen über die verchiedenen Arten von sphärischen Dreiecken in Bezug auf die Grösse der Seiten und Winkel. In den folgenden Kapiteln geht er zur Berechnung der unbekannten Stücke aus den gegebenen über; im 5. und 6. behandelt er als Einleitung hierzu die sogenannte *»ersetzende Figur»* (Satz), *asch-schakl al mugni*, d. h. diejenige, welche die Sekantenfigur des Menelaos ersetzt, und die *»Tangentenfigur»*, *asch-schakl az-zilli*. Die ersetzende Figur ist nun nichts anderes als der sphärische Sinussatz, den Nassir zuerst für das rechtwinklige und dann für das schiefwinklige Dreieck nachweist und zwar gibt er für den ersteren Fall eine Reihe von Beweisen, so einen ersten von Abû Nasr ʿAli ben ʿIrâk[3] und Abû'l-Wefâ, einen zweiten und dritten von Abû Nasr, einen vierten von Abû'l-Wefâ, einen fünften von Abû'l Fadl an-Nairizi[4] (in seinem Commentar zum *Almagest*) und Abû Dscha'far al-Châzin (in seinem Buche: Untersuchungen über die Neigung der partiellen Neigungen und die Aufgänge auf der geraden

Sphäre[5]), einen sechsten von ABÛ MAHMÛD AL-CHODSCHENDÎ, einen siebenten von ABÛ-RIHÂN AL-BIRÛNÎ, und endlich einen achten (vielleicht von NASSIR selbst?) mit Hülfe des sphärischen Vierseits. Alle diese Beweise sagen also aus, dass in einem sphärischen Dreieck mit einem rechten Winkel (Fig. 1):

Fig. 1.

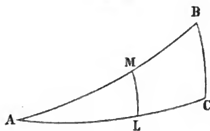


$$\frac{\sin AB}{\sin BC} = \frac{\sin C (= 1)}{\sin A} \quad \text{oder} \quad \frac{\sin AB}{\sin AD} = \frac{\sin BC}{\sin DE},$$

wenn E auch ein rechter Winkel ist, was NASSIR so ausspricht: Die Sinus der Bogen verhalten sich wie die Sinus ihrer Neigungen.[6] Von diesen Beweisen ist unstreitig derjenige mit Hülfe des Satzes des MENELAOS der eleganteste und einfachste, dann folgt ihm wohl der vierte von ABÛ'L-WEFÂ; ich muss den Leser hierfür auf das Werk selbst verweisen um nicht zu weitläufig zu werden.[7]

Nach diesem leitet NASSIR ED-DIN den Sinussatz für das schiefwinklige Dreieck ab, dann die Formeln $\cos c = \cos a \cdot \cos b$ und $\cos A = \cos a \cdot \sin B$ für das rechtwinklige. Hierauf kommt er im 6. Capitel zu der sogenannten Tangentenfigur und schickt hier zuerst einige einleitende Bemerkungen über die neuen Begriffe: »Tangente» (*zill* = Schatten), »Cotangente» (*zill al-tamâm* = Tangente der Ergänzung), »Sekante» (*kutr* = Durchmesser der Tangente) und »Cosekante» (Durchmesser der Cotangente) voraus; er bemerkt hierzu, dass die *Erfindung der Tangente* unbestritten dem ABÛ'L-WEFÂ angehöre, wie ABÛ RIHÂN AL-BIRÛNÎ selbst bezeuge. Dann beweist er die Formel (Fig. 2):

Fig. 2.

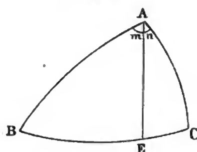


$$\sin a = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} B} \quad \text{oder} \quad \frac{\sin AC}{\sin AL} = \frac{\operatorname{tg} BC}{\operatorname{tg} ML},$$

wenn C und L rechte Winkel sind.

Nassir spricht diesen Satz in Worten auch so aus: die Sinus der Bogen verhalten sich wie die Tangenten ihrer Breiten (analog zur »ersetzenden Figur»). Er gibt ebenfalls mehrere Beweise dafür. Als Anwendung dieses Satzes auf das schiefwinklige Dreieck gibt er die Sätze (Fig. 3):

Fig. 3.



$$\frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} C} = \frac{\sin CE}{\sin BE} \text{ und } \frac{\operatorname{tg} m}{\operatorname{tg} n} = \frac{\operatorname{tg} BE}{\operatorname{tg} CE}.$$

Als weitere Ergebnisse der Anwendung der Tangentenfigur auf das rechtwinklige Dreieck werden die Formeln abgeleitet:

$$\cos A = \frac{\cot c}{\cot b} \text{ und } \cos c = \frac{\cot A}{\operatorname{tg} B} = \cot A \,.\, \cot B.$$

Als Beziehung zwischen 4 Stücken eines rechtwinkligen Dreiecks leitet er noch ab:

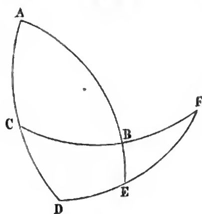
$$\frac{\cot A}{\operatorname{tg} b} = \frac{\cos c}{\sin a}.$$

In einem Schlusswort zu diesem Capitel tritt Nassir der Behauptung »hervorragender Vertreter der mathematischen Wissenschaften» entgegen, die Tangentenformel und die aus ihr abgeleiteten seien wegen des schnellen Wachsens der Tangente bei grössern Winkeln nicht mehr brauchbar; er bemerkt hierzu, dass in allen solchen Fällen die Tangente eines solchen Winkels einfach durch die Cotangente ersetzt werden könne, indem man zugleich die Multiplikation mit Division und umgekehrt vertausche. — Im 7. Capitel nun behandelt er die sechs Fälle des rechtwinkligen Dreiecks sowohl mit Hülfe der »ersetzenden Figur» (Sinussatz) und ihrer Ableitungen, als auch mittelst der »Tangentenfigur» und ihrer Folgerungen. Dann folgen die sechs Fälle des schiefwinkligen Dreiecks. Hierbei wendet er an: 1) den Sinussatz; 2) die Zerlegung in rechtwinklige Dreiecke; 3) den Satz: wenn man die Summe (resp. Differenz) zweier Winkel und das Verhältniss ihrer Sinus kennt, so kann man hieraus die einzelnen Winkel finden (diesen benutzt er beim Fall: gegeben die 3 Seiten); 4) den Satz: $\frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} C} = \frac{\sin CE}{\sin BE}$ (siehe

oben). Den sechsten Fall: gegeben die 3 Winkel, führt er mittelst des Polardreieckes auf den Fall der 3 Seiten zurück. Auch die Ergänzung zweier Seiten zu Quadranten und Herstellung des vollständigen Vierseits wird zu Hülfe gezogen (doch ohne etwa hierauf den Satz das Menelaos anzuwenden). Der Cosinussatz, den nach Cantor (a. a. O. I, 633) und Hankel (a. a. O. p. 281) schon Al-Battânî gekannt hat, findet sich bei Nassir ed-Din nicht.[8]

Wir können nicht umhin, hier die elegante Lösung des Falles der 3 Seiten wiederzugeben. *ABC* (Fig. 4) sei das Dreieck, dessen 3 Seiten gegeben sind. Man vervollständige die Seiten *AC* und *AB* zu Quadranten (*AD* und *AE*) und ergänze die Figur zum vollständigen Vierseit *ADFB*. Da *AC* und *AB* bekannt sind, so kennt man auch *CD* und *BE*; nun ist $\frac{\sin CD}{\sin BE} = \frac{\sin CF}{\sin BF}$; letzteres Verhältniss ist also bekannt, ebenso die Differenz der Bogen *CF* und $BF = BC$, also kann nach dem oben angeführten Satze sowohl *CF* als *BF* gefunden werden, mithin sind in den rechtwinkligen Dreiecken *CDF* und *BEF* je 2 Seiten bekannt, also kann man die Winkel bei *C* und *B* berechnen, ebenso die Seiten *DF* und *EF*, kennt dann also auch den Bogen *DE*, der den Winkel *A* misst.

Fig. 4.



Am Schluss des Werkes gibt er noch einen Auszug aus dem Buche Tâbits über die *Figur al-kattâ* und die zusammengesetzten Verhältnisse, in welchem ein besonderer, von dem Ptolemäischen verschiedener Beweis des Satzes des Menelaos gegeben wird.

Fassen wir kurz das historische Facit zusammen: Nassir ed-Din stellt zum *ersten Mal* eine vollständige Trigonometrie unabhängig von der astronomischen Anwendung auf. Sie zerfällt in eine *ebene* und *sphärische;* jene wird von ihm zum ersten Mal[9] mit Hülfe der trigonometrischen Functionen, des Sinus- und Cosinussatzes der Ebene, unabhängig von der Ptolemäischen Sehnenrechnung behandelt; in dieser kennt er alle sechs Hauptformeln des rechtwinkligen Dreiecks, löst alle sechs Fälle des schiefwinkligen ohne Anwendung (wir wollen nicht sagen »Kenntniss») des sphärischen Cosinussatzes (für den er entsprechende Surrogate hat), und führt auf elegante Weise den Fall der 3 Winkel auf denjenigen der 3 Seiten zurück. Dies

der Stand der Trigonometrie zur Zeit NASSIR ED-DINS! Was wäre da dem 15. Jahrhundert zu thun übrig geblieben, wenn es alles das gekannt hätte? Oder haben die Hauptvertreter desselben in den mathematischen Wissenschaften etwas hiervon gewusst? Diese Frage ist noch nicht endgültig entschieden.

[1] Vergl. meine Übersetzung des *Fihrist* in Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik 6, 1892. Sie befindet sich nach STEINSCHNEIDER (Biblioth. mathem. 1891, p. 69) in der Amplon. Sammlung als Ms. Qu. 349[16], und auch in Paris Cod. 7377 B.

[2] GÂBIR (DSCHÂBIR) BEN AFLAH benutzt in seinen *Astronomiae libri IX* den Satz in der Form: $a^2-b^2=p^2-q^2$, wo p und q die durch die Höhe gebildeten Abschnitte der Seite c sind.

[3] Wird auch nur ABÛ NASR BEN 'IRÂK geschrieben. KARATHEODORY vermuthet, dass derselbe identisch sei mit dem von WENRICH p. 211 genannten Commentator der Sphaerik des MENELAOS, ABÛ NASR MANSÛR(?). Es wäre auch möglich, dass ALFARABI damit gemeint wäre, der einen Commentar zum *Almagest* (vergl. STEINSCHNEIDERS *Alfarabi*, p. 78) verfasst haben soll, der vielleicht mit dem »königlichen Almagest» identisch ist, der ihm in diesem Werke NASSIR ED-DINS (p. 125 des arab. Textes, p. 162 der Übersetzung) zugeschrieben wird.

[4] Sein richtiger Name ist ABÛ'L-ABBÂS AL-FADL BEN HÂTIM AN-NAIRIZI, vergl. meine Übersetzung des *Fihrist* a. a. O.

[5] KARATHEODORY übersetzt unrichtig: »introduction sur la sphère droite». »Neigung der partiellen Neigungen» ist wahrscheinlich die »totale Neigung (Schiefe)» der arabischen Astronomen.

[6] Diese Ausdrucksweise ist aus der Astronomie entlehnt: AB und AD sind Bogen der Ekliptik, BC und DE ihre Neigungen (Schiefen) zum Aequator.

[7] Aus den Namen der hier angeführten Autoren der verschiedenen Beweise des Sinussatzes, die alle vor DSCHÂBIR BEN AFLAH gelebt haben (vergl. meine Übersetzung des *Fihrist* a. a. O.) ergibt sich, dass die bisherige Annahme, der letztere Mathematiker sei der erste, der diesen Satz ausgesprochen habe (vergl. HANKEL, a. a. O. p. 285, 286 und CANTOR, *Vorl. über Gesch. der Mathem.* I, 682, 683) wohl nicht mehr haltbar ist, ja nach einer Stelle NASSIRS (p. 125 d. Textes, p. 162 d. Übersetzung) hatte sogar schon TÂBIT BEN KURRA die »ersetzende Figur» behandelt, ABÛ NASR ihr aber erst

diesen Namen gegeben; AL-BIRÛNÎ dagegen behaupte, dass der Name von KUSCHJÂR BEN LEBBÂN (vergl. CANTOR, a. a. O. I, p. 654) herstamme. Wir kommen auf diese historischen Fragen gelegentlich noch näher zu sprechen.

[8] Bei AL-BATTÂNÎ findet sich der sphärische Cosinussatz im 11. Cap. seiner *Scientia stellarum*, das »de azimuth» überschrieben ist, aber in einer schwer verständlichen Form.

[9] Damit wollen wir nicht etwa behaupten, dass er hierin ohne Vorgänger gewesen sei, wir kennen bis jetzt einfach keine solche.

Sur les découvertes mathématiques de Wronski.

Par S. DICKSTEIN à Warszawa.

4. Théorie des congruences.

Dans la *Philosophie des mathématiques,* WRONSKI attribue une grande importance à la notion de congruence établie par GAUSS. Il dit que ce principe et son application forment la plus belle découverte faite depuis cinquante ans dans les mathématiques pures; c'est, selon lui, dans l'histoire de ces sciences, une époque hors de comparaison avec tout ce qui a été fait dans l'intervalle indiqué. Il faut dériver la notion de congruence de la loi citée plus haut pour les fonctions alephs, qu'il écrit sous la forme

$$\aleph[N_\omega - n_p]^{(m)} \equiv \aleph[N_\omega - n_q]^{(m)} \pmod{n_q - n_p};$$

WRONSKI donne un essai d'une méthode générale pour la résolution des congruences de tous les ordres et degrés, qui consiste à ramener les congruences données à la forme de cette loi et dans la détermination des éléments n. Dans les travaux postérieurs et nommément dans la *Réforme du savoir humain,* I, il modifie le point de départ. Il voit ici le fondement de toute la théorie des nombres dans la loi dite »téléologique» donnant la résolution de la congruence binôme $x^m \equiv a \pmod{M}$, et il réduit tous ces problèmes, par une transformation convenable, à cette forme fondamentale. Ces formules »téléologiques», constituant »la troisième loi de l'Algorithmie» de WRONSKI et données par lui sans déduction, ont la forme suivante:[28]

$$a = (-1)^{\omega+1}\left\{h(1^{k/1})^2 + (-1)^{k+1}\right\}^m \aleph\left[\frac{M}{(1^{k/1})^2},\, \omega\right]^{\omega-2} + Mi,$$

$$x = h + (-1)^{\pi+k} \aleph\left[\frac{M}{(1^{k/1})^2},\, \pi\right]^{\pi-1} + Mj,$$

$$M = \text{fact}\left[a(1^{k/1})^{2m} - \left\{h(1^{k/1})^2 - (-1)^{k+1}\right\}^m\right].$$

La dernière formule signifie que le module M doit être un facteur de l'expression renfermée dans les crochets [ ]; i et j sont nombres entiers arbitraires; k et h sont des nombres entiers jouant un rôle principal dans la méthode de WRONSKI. Le premier est nommé *genre,* le second *espèce.* Le nombre k est originairement tout nombre positif et entier compris entre zéro

et la moitié de module diminué de l'unité, lorsque ce module est un nombre premier ou bien généralement entre zéro et la moitié pareille du plus petit nombre premier parmi les facteurs de ce module. Le nombre h est originairement tout nombre entier positif ou négatif, y compris zéro, plus petit que le module M. La congruence binôme donnée peut donc être envisagée comme un cas particulier de la congruence binôme générale:

$$X(k, h)^m \equiv A(k, h) \pmod{M},$$

et les formules de Wronski expriment alors les relations qui doivent exister entre les nombres donnés de la congruence; les valeurs spéciales des nombres caractéristiques k et h indiquent les cas dans lesquels la congruence est résoluble ou non en nombres entiers (sous la forme donnée par Wronski).

Sur cette base sont développées les méthodes concernant la résolution des problèmes de la théorie des congruences, nommément la résolution des congruences $z^n - ay^n \equiv 0 \pmod{M}$, le problème de décomposition des nombres entiers en facteurs, la résolution des congruences de la forme

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_m x^m \equiv 0 \pmod{M},$$

ainsi que des congruences des ordres supérieurs (avec plusieurs inconnues) et des équations indéterminées de tous les ordres et de tous les degrés.

La simplicité et la fécondité de ces méthodes méritent notre attention.[29] Partout y entrent les nombres caractéristiques k et h, c'est à dire les »éléments» des quantités inconnues. Les quantités inconnues dans les questions de la théorie des nombres échappent, comme dit Wronski, à la loi de continuité et se rangent au contraire et exclusivement sous la loi d'isolément, c'est à dire sous la loi de singularité où elles ne peuvent être atteintes méthodiquement que par leurs éléments »philosophiques», leur genre k et leur espèce h.

Il faut aussi mentionner la formule de Wronski dans laquelle il réunit les théorèmes de Fermat et de Wilson:

$$(a\omega + 1)^{k/1} . (b\omega + 1)^{\omega - k - 1/1} + (-1)^k x^{\omega - 1} \equiv 0 \pmod{\omega}$$

ω étant un nombre premier, a et b des nombres entiers arbitraires, x un nombre entier premier avec ω; $k = 0, 1, 2, \ldots, \frac{1}{2}(a-1)$. La démonstration du théorème de Fermat est analogue à celle de Gauss dans les *Disquisitiones* (art. 51), avec cette différence que le point de départ de Wronski est un peu plus général.

Gauss part de la somme $S = n_1 + n_2 + \ldots + n_x$, et en élévant les deux membres de cette égalité à la puissance ω il obtient

$$S^{\omega} \equiv n_1^{\omega} + n_2^{\omega} + \ldots + n_x^{\omega} \pmod{\omega}.$$

Wronski, au lieu des puissances, prend la factorielle

$$S^{\omega/\mu\omega} = (n_1 + n_2 + \ldots + n_x)^{\omega/\mu\omega}$$

et obtient la congruence

$$S^{\omega/\mu\omega} \equiv n_1^{\omega/\mu\omega} + n_2^{\omega/\mu\omega} + \ldots + n_x^{\omega/\mu\omega} \pmod{\omega}$$

de laquelle il résulte que si $n_1 = n_2 = \ldots = n_x = n$,

$$(xn)^{\omega/\mu\omega} \equiv x(n)^{\omega/\mu\omega} \pmod{\omega}$$

d'où pour $n = 0$ on obtient le théorème de Fermat.

5. Canons de logarithmes.

Ces canons avaient été construits par Wronski plusieurs années avant leur publication (en 1827). Ils se distinguent parmi toutes les tables connues par le moindre volume, car ils se réduisent à une petite table qu'on peut embrasser d'un seul coup d'oeil. Leur construction est fondée sur la formule de la théorie des différences

$$F(x + t) = F(x) + \frac{t}{1 \,.\, h} \Delta_h F(x) + \frac{t(t-h)}{1 \,.\, 2 \,.\, h^2} \Delta_h^2 F(x)$$

qui étant appliquée aux logarithmes conduit à l'équation:

$$\log(\omega a + \omega m + \omega z)$$
$$= \log(\omega a) + \Delta_m \log a + z \Delta_1 \log(a + n)$$
$$+ \left(1 - \frac{m}{n}\right) z \left\{ \Delta_1 \log a - \Delta_1 \log(a + n) \right\} - z \frac{m(n-m)}{1 \,.\, 2} \Delta_1^3 \log a;$$

m et $a < n$ sont ici deux nombres quelconques, $z < 1$ et ω un facteur arbitraire. Les quantités ωa, ωm, ωz sont les parties »initiale», »moyenne» et »finale» du nombre donné; les parties correspondantes du logarithme sont respectivement:

$$\log \omega a,$$
$$\Delta_m \log a,$$
$$z \Delta_1 \log(a + n)$$
$$+ \left(1 - \frac{m}{n}\right) z \left\{ \Delta_1 \log a - \Delta_1 \log(a + n) \right\} - z \frac{m(n-m)}{1 \,.\, 2} \Delta_1^3 \log a.$$

Toutes ces parties des nombres et des logarithmes sont disposées de manière qu'on peut les trouver facilement par le prin-

cipe de l'intersection des lignes horizontales avec des lignes verticales. L'interpolation à l'aide de l'expression $z\frac{m(n-m)}{1\,.\,2}\Delta_1^3 \log a$ n'est nécessaire que pour la partie finale.

WRONSKI a construit six canons: le n° 1 avec 4 figures décimales des logarithmes; les nos 1bis, 2 et 3 avec 5 décimales, le n° 3bis avec 6, enfin le n° 4 avec 7 figures décimales.

6. Fonctions trigonométriques des ordres supérieurs.

La science doit à WRONSKI l'introduction dans l'analyse de ces transcendantes nouvelles. Dans la *Philosophie des mathématiques* il donne leur définition et un aperçu de leur théorie qu'il développe plus tard dans la *Technie algorithmique* et dans la *Réforme du savoir humain*. Le mémoire d'OLIVIER[30] (1827) cité par GÜNTHER[31] comme le premier dans ce domaine d'analyse est donc fort postérieur aux recherches de WRONSKI. La théorie de WRONSKI est très complète et générale. Il définit ces fonctions par l'équation

$$a^{x\psi(m,n)} = f_0x + f_1x\psi(m\,,\,n) + f_2x\psi(m\,,\,n)^2 + \ldots + f_{m-1}x\psi(m\,,\,n)^{m-1}$$

où

$$\psi(m\,,\,n) = \{(-1)^n\}^{\frac{1}{m}} = \cos\frac{n\pi}{2m} + \sqrt{-1}\sin\frac{n\pi}{2m}.$$

Les fonctions $f_0x\,,\,f_1x\,,\,\ldots\,,\,f_{m-1}x$ sont nommées fonctions transcendantes ou sinus de l'*ordre* $m-1$ et de plus du *genre elliptique,* lorsque le nombre n est impair, du *genre hyperbolique,* quand ce nombre est pair. La fonction f_0x (le sinus du degré 0) est dite aussi le cosinus. De la formule fondamentale on tire l'expression générale

$$f_\mu x = \frac{(-1)^n}{m}\{\psi(m\,,\,n_1)^{m-\mu}a^{x\psi(m,n_1)} + \psi(m\,,\,n_2)^{m-\mu}a^{x\psi(m,n_2)} + \ldots$$
$$\ldots + \psi(m\,,\,n_m)^{m-\mu}a^{x\psi(m,n_m)}\}\,,$$

$n_1\,,\,n_2\,,\,\ldots\,,\,n_m$ étant des valeurs différentes du nombre n entre 1 et $2m$. WRONSKI énonce les propriétés principales de ces nouvelles transcendantes.

La première propriété correspond à la relation fondamentale des sinus et cosinus ordinaires, c'est à dire à la relation $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, et elle s'exprime p. ex. pour le cas du genre elliptique et du troisième ordre par la formule:

$$f_0x^2 + f_1x^2 + f_2x^2 + f_3x^2 = a^{x\sqrt{2}} + a^{-x\sqrt{2}}\,.$$

Une deuxième propriété (le théorème d'addition) est représentée pour le même cas par les équations

$$f_0(x+y)=f_0x\,f_0y-f_2x\,f_2y-f_1x\,f_3y-f_3x\,f_1y$$
$$f_1(x+y)=f_1x\,f_0y+f_0x\,f_1y-f_3x\,f_2y-f_2x\,f_3y$$
$$f_2(x+y)=f_0x\,f_2y+f_2x\,f_0y+f_1x\,f_1y-f_3x\,f_3y$$
$$f_3(x+y)=f_3x\,f_0y+f_0x\,f_3y+f_1x\,f_2y-f_2x\,f_1y.$$

Une troisième propriété consiste dans le retour périodique des différentielles de ces fonctions. On a par exemple dans l'ordre ρ pour le genre elliptique (si l'on fait $a=e$)

$$df_0x=-f_\rho x\,dx$$
$$df_1x=+f_0x\,dx$$
$$df_2x=-f_1x\,dx$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$df_\rho x=+f_{\rho-1}x\,dx.$$

Une autre propriété est la détermination de ces fonctions pour un multiple quelconque de la variable au moyen de puissances de ces mêmes fonctions simples. On a la formule générale

$$\left\{\Sigma_\mu f_\mu x\,\psi(m\,,\,n)^\mu\right\}^\xi=\Sigma_\mu f_\mu(\xi x)\,\psi(m\,,\,n)^\mu.$$
$$(\mu=0,1,2,\ldots,n-1)$$

Une fonction quelconque des sinus et des cosinus supérieurs peut être développée par rapport à ces mêmes sinus et cosinus des multiples progressifs de la variable; Wronski indique le moyen d'y parvenir. On doit aussi à lui l'application de ces fonctions à l'intégration des équations différentielles. Il attribue à ces nouvelles transcendantes un rôle important dans la science future. »Déjà même», dit-il, »l'usage des sinus et des cosinus du premier ordre est, comme on sait, indispensable dans l'astronomie, dans la mécanique céleste et dans toutes les hautes questions de la physique; et cependant ces fonctions périodiques du premier ordre ne font que revenir sur elles-mêmes, sans aucun accroissement ni décroissement dans ce retour périodique. Mais comme on trouve, dans les mouvements des astres, des écarts de leur état moyen ou plutôt des oscillations continues qui, indépendamment de leurs retours périodiques, impliquent des accroissements et des décroissements continus et alternatifs, il est évident que nos transcendantes des ordres supérieurs pourront seules représenter leurs mouvements.»

Les travaux d'Appell, de Glaisher, de Nikodemi, cités par Günther,[32] d'Yvon Villarceau,[33] de Farkas,[34] de West,[35] de J. C. et W. Kapteyn[36] ont développé la théorie de ces transcendantes. Et les travaux récents de Schapira[37] qui ouvrent uue nouvelle voie à des recherches fort intéressantes, dérivent quoique indépendamment de la même source qui a inspiré l'auteur de la *Philosophie des mathématiques*.

[28] Hanegraeff, a démontré les formules de Wronski dans la *Note sur l'équation de congruence* $x^m \equiv r \pmod{p}$ (Paris 1860). Voir aussi Bukaty, *Déduction et démonstration de trois lois primordiales de la congruence des nombres etc.* (Paris 1873).

[29] J'ai donné un aperçu de ces méthodes de Wronski dans l'écrit: »Les principes de la théorie des nombres de Hoene-Wronski« (en polonais; Cracovie 1892). Voir aussi la note: »Sur la résolution de la congruence $z^n - ay^n \equiv 0 \pmod{M}$« (ibid. 1893).

[30] Olivier, *Bemerkungen über eine Art von Functionen, welche ähnliche Eigenschaften haben wie die Cosinus und Sinus.* Journal für Mathem. **2**, 1827, 243—251.

[31] Günther, *Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunctionen* (Halle 1881), p. 395.

[32] Günther, l. c., chapitre IV.

[33] Villarceau, *Théorie des sinus des ordres supérieurs.* Comptes rendus des séances de l'acad. des sciences [de Paris] **86**, 1878, 1160—1166, 1216—1222, 1287—1290. — *Application de la théorie des sinus des ordres supérieurs à l'intégration des équations différentielles.* Ibid. **90**, 1880, 721—727, 767—769. — *Note sur la théorie des sinus des ordres supérieurs.* Ibid. **91**, 1880, 195—197.

[34] Farkas, *Sur la théorie des sinus des ordres supérieurs.* Comptes rendus etc. **91**, 1880, 544—547. — *Sur l'application de la théorie des sinus des ordres supérieurs à l'intégration des équations différentielles linéaires.* Ibid. **91**, 1880, 1543—1545.

[35] E. West, l. c., p. 298—308.

[36] J. C. Kapteyn et W. Kapteyn. *Les sinus de quatrième ordre.* Archives néerland. d. sc. exactes **24**, 1885, 1—98. — *Die höheren Sinus.* Sitzungsber. der Akad. d. Wissensch. zu Wien; (Mathem. Cl.) **93**, 1886, 807—868.

[37] H. Schapira, *Grundlagen zu einer Theorie allgemeiner Cofunctionen* (Leipzig 1881). — *Theorie allgemeiner Cofunctionen und einige ihrer Anwendungen.* I (Leipzig 1892).

Intorno ad una pretesa seconda edizione dell' Algebra di Rafael Bombelli.

Nota di ANTONIO FAVARO in Padova.

La menzione fatta dall' illustre MAURIZIO CANTOR[1] di due diverse edizioni dell' *Algebra* di RAFAEL BOMBELLI, respettivamente pubblicate a Venezia nel 1572 ed a Bologna nel 1579 diede occasione ad un quesito dal ch^{mo} G. ENESTRÖM[2] nel quale, posta in chiaro la inesattezza per cui le due anzidette edizioni sarebbero state pubblicate in città diverse, mentre, qualunque sia il giudizio che intorno ad esse possa formarsi, figurano pubblicate ambedue »In Bologna», avvertito che il RICCARDI nella pregevolissima sua *Biblioteca matematica Italiana* accenna a credere trattarsi di due edizioni distinte,[3] mentre il BONCOMPAGNI afferma trattarsi di una edizione unica, cioè di quella del 1572,[4] della quale alcuni esemplari portano nel frontespizio il millesimo MDLXXII ed altri il MDLXXIX, si domanda se effettivamente l'opera del BOMBELLI sia stata nel 1579 ristampata.

La Biblioteca Universitaria di Padova possiede un esemplare di quest' opera con la data del MDLXXII ed un altro con quella del MDLXXIX, ed ho perciò stimato opportuno istituire sopra di essi un diligente esame allo scopo di rispondere al suaccennato quesito.

L'esemplare segnato »SN 11234» ha il titolo seguente: L'ALGEBRA | PARTE MAGGIORE | DELL' ARITMETICA | DIVISA IN TRE LIBRI | DI RAFAEL BOMBELLI | DA BOLOGNA | *Nouamente posta in luce.* | *IN BOLOGNA* | *Nella stamperia di Giouanni Rossi* | *MDLXXII.* | Con Licentia delli RR. VV. del Vesc. & Inquisit.

Nel qual titolo la parola »nouamente», non è già da interpretarsi nel senso di nuova edizione, ma bensì che l'opera è di fresco data alla luce. Consta questo esemplare di 710 pagine, delle quali le 1ª—56ª, 707ª—710ª non sono numerate, le 57ª—706ª sono numerate 1—650, e le 3ª—8ª contengono una lettera dedicatoria indirizzata nella prima di queste sei pagine »AL REVER^{MO} | MONS. IL SIG. | ALESSANDRO RVFINI | VESCOVO DIGNISSIMO | DI MELFI | SIGNORE E PADRON SVO | SEMPRE OSSERVANDISS. | Rafael Bombelli da Bologna.»

L'esemplare segnato »XXXI. 4 277» e che porta il timbro del primo regno italico, è intitolato:

L'ALGEBRA | OPERA | DI RAFAEL BOMBELLI da Bologna | Diuisa in tre Libri. | *Con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta* | *cognitione della teorica dell' Aritmetica.* | Con una Tauola copiosa delle materie, che | in essa si contengono. | *Posta hora in luce a beneficio degli studiosi di* | *detta professione.* | IN BOLOGNA, | Per Giouanni Rossi. MDLXXIX. | *Con licenza de' Superiori.*

Si compone di 710 pagine, delle quali le 1ª—56ª, 707ª—710ª non sono numerate, le 57ª—706ª sono numerate 1—650; le 57ª—710ª sono identiche colla 57ª—710ª della anzidetta edizione del 1572 e le 3ª—56ª contengono ciò che trovasi nelle pag. 3ª—56ª della edizione stessa, con questa differenza che le tre carte contenenti la suaccennata dedicatoria vennero effettivamente ristampate, mentre non lo furono le altre contenenti l'indice delle materie: il testo delle suddette lettere, ristampato pagina a pagina e linea a linea è indirizzato: »AL REVERENDISSIMO | MONSIGNOR, IL SIGNOR | ALESSANDRO RVFINI, | VESCOVO DIGNISS. | DI MELFI, | Signore, e Padron suo sempre osseruandiss. | RAFAEL BOMBELLI DA BOLOGNA.»

Il Conte GIOVANNI MARIA MAZZUCHELLI nel cenno da lui dettato intorno al BOMBELLI nota le due edizioni distintamente l'una dall' altra;[5] ma SILVESTRO GHERARDI, dopo avvertito che il TIRABOSCHI avea fatto altrettanto,[6] riferiti i due diversi frontespizii, aggiunge: »Parendomi difficile che un libro di tal genere avesse potuto godere, a quei tempi, tutto quel favore che farebbero supporre due edizioni del medesimo eseguite nello stesso luogo, nel breve lasso di sette anni, volli collazionare fra di loro li esemplari dall' uno e dall' altro frontespizio, che ne possiede la Biblioteca di questa P. Università.[7] Vidi subito che erano identici, d'una sola e medesima edizione, eccetto la differenza de' frontispizi ed eccetto la ristampa fatta, per li esemplari del secondo frontispizio, della Lettera dedicatoria a Monsignor RUFINI, conservatavi però la data: *In Bologna il dì XXII di Giugno MDLXXII,* che leggesi nell' esemplare dal primo frontispizio. La conformità della qual data coll' annata 1572 dello stesso frontispizio in un col tenore della Lettera fanno conoscere che l'edizione che porta questa medesima annata 1572 non è già una ristampa, come di prima giunta potrebbero insinuare le parole: *Novamente posta in luce,* che veggonsi nel ridetto primo frontispizio, onde quel *Novamente* va pigliato in senso di *Presentemente.* Il prestantissimo LAGRANGE non vide dell' Algebra Bombelliana che esemplari dal secondo frontispizio,

poichè la disse stampata in Bologna nel 1579 (Lezioni cit., lez. terza, pag. 49). — Il FANTUZZI che cita quest' Opera del BOMBELLI, sotto i due frontispizi, in guisa da far quasi credere che le due citazioni corrispondano a due opere diverse dello stesso Autore, menziona anche una ristampa di essa nel 1593 in Bologna, sull' autorità d'una *Biblioteca Exotica, sive Catalogus Officinalis etc.*, stampata in Francfort l'anno 1610, pag. 196 (FANTUZZI, ecc. Tomo 2, pag. 283). Ma in Bologna non abbiamo potuto ritrovare il libro del BOMBELLI con quest' ultima data, e dubitiamo fortemente che sia giammai esistito. — Rispetto agli esemplari dai due riportati frontispizi, che simulano due edizioni successive, aggiungeremo pure (per coloro che non avesser idea di queste piccole contrafazioni tipografico-librarie), che, a non dubitarne, il tipografo Rossi, trovandosi avere ancora, nel 1579, un bel fondo dell' Algebra Bombelliana, stampata da lui sette anni prima, rinnovò negli esemplari di essa soltanto il frontispizio e la dedica, colla speranza che la fresca data di quello gli accrescesse lo spaccio del suo fondo.»[8]

Io concordo pienamente, dopo accurato esame dei due succitati esemplari, con la opinione espressa dal GHERARDI; anzi mi vi sono associato già, quasi vent' anni or sono, quando trattai altra volta ed a fondo questa medesima questione.[9]

[1] M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Matematik.* **2** (1892), p. 570.

[2] Bibliotheca Mathematica 1892, 96.

[3] RICCARDI, *Biblioteca matematica italiana* **1** (1870), 145—146.

[4] BONCOMPAGNI, *Sur l'histoire des sciences mathématiques et physiques de M. Marie.* Biblioth. Mathem. 1886, col. 44.

[5] G. MAZZUCHELLI, *Gli scrittori d'Italia, cioè notizie storiche e critiche intorno alle vite e agli scritti dei letterati italiani.* Vol. II. Parte III (Brescia 1762), pag. 1509.

[6] TIRABOSCHI, *Storia della letteratura italiana.* Tomo VII. Par. 2ª. Lib. 2°. Cap. 2°. § 44.

[7] Cioè di Bologna.

[8] S. GHERARDI, *Di alcuni materiali per la storia della facoltà matematica nell' antica università di Bologna composti nella opportunità di stendere delle notizie sul Padre Bonaventura Cavalieri* (Bologna 1846), pag. 86—87.

[9] A. FAVARO, *Notizie storiche sulle frazioni continue dal secolo decimoterzo al decimosettimo.* Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **7**, 1874, pag. 494—495.

Sur la propagation des signes numériques cunéiformes.

Par V. Bobynin à Moskwa.

Les habitants de l'ancienne Chaldée parvenus à un degré de culture supérieur à celui de leurs proches voisins ne manquèrent pas d'exercer une influence plus ou moins grande sur ces derniers. L'ascendant en serait même peut être devenu exclusif sans la proximité d'une contrée encore plus civilisée, telle que l'Egypte. La propagation des signes numériques cunéiformes fait justement partie de l'influence exercée par les Chaldéens sur leurs voisins. Il va sans dire que cette propagation n'a pu avoir lieu sans que des changements notables n'aient été opérés dans l'extérieur de ces signes, changements qui ne laissèrent pas de s'accroître avec le temps. C'est donc tout modifiés que nous trouvons les signes de numération cunéiformes chez les plus proches voisins de la Chaldée, les Phéniciens, les Araméens ou les Palmériens.

Conformément à l'écriture cunéiforme, les Phéniciens n'avaient possédé tout d'abord que trois signes numériques différents. C'étaient: un trait vertical pour désigner l'unité; une ligne droite plus ou moins inclinée ayant le bout de dessus courbé à droite et souvent muni d'un angle, pour exprimer le nombre 10; enfin une ligne droite horizontale (ou le signe de 10) placée entre deux traits verticaux et servant à rendre le nombre 100.[1] On voit sans peine que le premier de ces signes provient d'un signe correspondant dans l'écriture cunéiforme, et qui est le coin vertical, ou ne présente qu'un reste similaire de son antécédant, l'écriture figurée.

Le second signe sous sa forme d'angle est bien une reproduction soit directe, soit quelque peu variée d'un autre signe correspondant dans l'écriture cunéiforme et qui est un angle formé de coins. Le sommet en est tourné dans la direction de l'écriture, c'est à dire non à gauche, mais à droite. C'est bien l'opposé de l'écriture cunéiforme qui a la direction de gauche à droite contrairement aux caractères phéniciens imités d'Egypte.

Quant au signe représentant le nombre 100, la première forme n'en fait qu'un avec la seconde ainsi qu'il va être démontré. Considérée comme la forme primitive, elle est encore une reproduction directe d'un signe correspondant dans l'écri-

ture cunéiforme et qui est la réunion du coin vertical au coin horizontal. Le trait droit et vertical en est alors regardé comme marquant l'unité et donnant à entendre que l'unité des centaines y est prise une seule fois, — cela conformément à la manière d'exprimer les multiples de 100 dont nous allons prendre connaissance. Or voici les modifications que subit avec le temps la forme phénicienne des signes de numération cunéiformes. En premier lieu on se sert d'un trait horizontal pour exprimer le nombre 10, ce qui peut bien amener à remplacer la droite horizontale dans la figure du nombre 100 par le signe de 10 en général. En second lieu on introduit pour le nombre 20 un signe à part composé de deux traits inclinés et d'un troisième unissant deux points pris sur ces derniers. Les Phéniciens employaient ce signe à côté de l'expression habituelle du nombre 20, au moyen de deux lignes, l'une surmontant l'autre et figurant chacune le nombre 10. Evidemment ce n'en est là qu'une modification.

La parenté des chiffres phéniciens à l'écriture cunéiforme n'est pas seulement bornée à leur nombre et à leur extérieur. Elle est prouvée plus vivement encore par les moyens d'en réunir les signes numériques pour exprimer les multiples des unités des ordres. Ceux-ci étaient représentés dans les ordres des unités et des dizaines par le signe de l'unité de l'ordre, marqué un nombre correspondant de fois. Ainsi que dans l'écriture cunéiforme, les signes en question, répétés à plusieurs reprises, étaient partagés en groupes, à trois, disposés l'un au dessus de l'autre ou l'un à côté de l'autre. Le signe exprimant le nombre 20 une fois trouvé, on chercha à abréger l'expression des nombres du deuxième ordre, multiples de 20, et on y arriva en remplaçant le signe de 10 par celui de 20 un nombre correspondant de fois. Nous ne saurions manquer de voir dans ce procédé, comme dans le signe de 20 qui y avait abouti, l'une des voies dont l'humanité s'était servie en inventant des signes à part pour les multiples des unités des ordres. Elle y voyait un moyen de diminuer le nombre des signes nécessaires à l'expression des nombres. Les multiples des unités des hauts ordres, ou tout au moins de celui des centaines, étaient encore exprimés chez les Phéniciens conformément à l'écriture cunéiforme. Ils associaient au signe de l'unité de l'ordre en question un nombre, marquant combien de fois cette unité se trouvait répétée. Il a fallu discerner ce dernier signe d'avec son semblable, servant à marquer le nombre des unités destinées à former avec le nombre écrit des centaines un nombre

entier composé. On convint donc que le premier dans la direction usitée de l'écriture précéderait le signe de l'unité de l'ordre en question, tandis que le second le suivrait. Placé donc dans l'écriture cunéiforme, comme nous l'avons vu plus haut, à gauche de l'unité de l'ordre en question, c'est à droite de ce même signe qu'il se trouve dans les caractères phéniciens qui ont une direction opposée.

Quant aux nombres entiers composés, ils étaient rendus comme à peu près partout par une série de signes numériques, servant de multiples aux unités des ordres différents qui les composaient. L'ordre de leur disposition était décroissant par rapport à la direction de l'écriture, c'est à dire chez les Phéniciens de droite à gauche.

Les chiffres des Palmériens, employés à Palmyre entre l'an 2 après J. Ch. et jusque vers le milieu du 3me siècle, présentent une forme quelque peu variée du système phénicien de ces mêmes signes, ou du système cunéiforme lui-même. Ils diffèrent du premier par emploi d'un signe à part pour le nombre 5, ressemblant un peu à l'Y. Ils en diffèrent encore par certaines modifications dans les signes équivalents à 10 et à 20. Ils en diffèrent enfin par l'emploi d'un seul trait vertical, nommément du trait droit, dans le signe du nombre 100. Dans tout le reste les chiffres palmériens coïncident entièrement avec ceux des Phéniciens.

Les signes de numération employés par les Palmériens furent transmis, avec de certaines modifications sans doute, aux manuscrits syriaques des 6e et 7e siècles. Pour juger du caractère des changements qui ont eu lieu dans ce cas là, il suffit d'observer que le nombre 2, par exemple, y était exprimé par deux traits verticaux et unis dans le bas par la partie du trait droit courbée en arc.

[1] A. P. Pihan, *Exposé des signes de numération usités chez les peuples orientaux anciens et modernes*. Paris 1860, p. 164—167.

Über den von Gerbert angeführten Joseph Sapiens oder Joseph Ispanus.

Von H. Weissenborn in Eisenach.

Als ich im vorigen Jahre unter dem Titel: *Zur Geschichte der Einführung der jetzigen Ziffern in Europa durch Gerbert* ein Schriftchen herausgab, dessen Zweck war, die Persönlichkeit des in Gerberts Briefen erwähnten Joseph *Sapiens* oder Joseph *Ispanus* nachzuweisen, eine Untersuchung, die mich nach mehrjähriger Forschung zu der Überzeugung führte, der Fragliche sei höchst wahrscheinlich ein s. g. Schutz-Jude des Grafen Borrel von Barzelona gewesen, fand diese Ansicht wenig Beachtung, weil ein greifbarer Beweis für ihre Richtigkeit sich nicht beibringen liess. Dieser Umstand sowohl als der, dass ich bald nach Vollendung meiner Schrift zufällig unter Büchern, die sich auf spanische Geschichte beziehen, ein älteres Werk »Über die Grafen von Barzelona» aus dem Jahre 1836, angeführt fand, liessen es mir nicht als überflüssig erscheinen, nochmals in der Kürze auf die Frage einzugehen, die zum Abschluss zu bringen ich mir, ich kann sagen, zur Lebens-Aufgabe gemacht habe. Der Titel liess mich wohl auch hoffen, etwas Näheres über den Joseph *Sapiens* zu erfahren. Zwar zeigte sich, als es mir gelungen war des betreffenden Werkes habhaft zu werden, dass derselbe etwas anders lautet, als ich ihn, offenbar der Kürze wegen, angegeben gefunden hatte, nämlich: *Los condes de Barcelona vindicados, y cronologia y genealogia de los reyes de España consideratos como soberanos independientes de su Marca. Por* D. Próspero de Bofarull y Mascarò (Barcelona 1836, 2 Teile), und meine Hoffnungen schwanden; dagegen fand ich bei der Abfassung des Werkes zu Hilfe gezogen die 1829 vollständig veröffentlichte *Cronica universal de Cataluña,* von Dr. Gerónimo Pujades und die von Jaime Ripoll 1834 herausgegebenen Urkunden aus dem Staatsarchiv von Vich, und dies veranlasst mich, einige hier in Betracht kommende Thatsachen und Ansichten mitzuteilen.

Als Stammvater der Grafen von Barzelona wird (I, p. 4 von Bofarulls Werk) angeführt ein Urgrossenkel Karl Martels, Wifred I *el velloso* (874—898). Ferner ist zu erwähnen, dass, wie (I, p. 23—24) aus den Acten des Klosters zu Ripoll hervorgeht, im 10. und. 11. Jahrhundert in Spanien den Mön-

chen die Ehe wenigstens stillschweigend erlaubt und gestattet gewesen ist; es scheint also hier mehr Freiheit geherrscht zu haben, als anderswo. Weiter lesen wir (I, p. 78, Anmerk. 2): »In den Archiven der Königl. Klöster von Ripoll und Campredon existiren verschiedene Schriften der 10. Jahrhunderts, welche sich auf einen Bischof von Gerona Namens *Bonifilio* beziehen, dessen keine Episkopologie Erwähnung thut. Bei der Übereinstimmung der Zeiten und Würden jenes *Bonifilio* mit dem Grafen Miron von Gerona vermuten wir, dass dies ein Beiname (*sobrenombre*), den er hatte, gewesen ist.» Ebenso soll die Tochter Borrell's, die nach der Zerstörung des Nonnenklosters in Barzelona zur Äbtissin gewählt wurde, eigentlich Adelazi, Adelez oder Adelaide geheisen haben, und *Bonafilia* nur ein Beiname gewesen sein (I, p. 135—137). Endlich wird als Jahr der Eroberung Barzelonas durch die Sarazenen nicht 985 angegeben, welches die *Marca Hispanica*, die der Verfasser Bofarull mehrfach erwähnt, ausdrücklich hervorhebt (s. Anm. 34 meiner oben angeführten Schrift), sondern als Datum jenes Ereignisses wird das in der *Appendix* zur *Marca Hispanica* zweimal genannte Jahr 986, wie es scheint, nach denselben Quellen, die bei der Abfassung derselben *Appendix* gedient haben, bezeichnet (I, p. 161—162).

Was mich nun zu der in meinem oben genannten Schriftchen ausgesprochenen Ansicht, an der ich noch heute festhalte, geführt hat, ist der Umstand, dass sich auch bei der sorgfältigsten Nachforschung ein Joseph *Sapiens*, dem wir ein Verdienst um das Rechnen zuschreiben könnten, oder ein hervorragender Gelehrter und Mathematiker nicht ergeben hat, sodann der entschieden jüdische Name Joseph, der bei Christen in jener Zeit in der Mark nicht vorkommt, und endlich die Bemerkung, dass sich in dem von dem damaligen Vezier Almansor unternommenen Sarazenen-Einfall, der doch wohl länger dauerte, als man gewöhnlich glaubt, manches, was sonst rätselhaft erschiene, eine leichte und natürliche Erklärung findet. Dahin rechne ich z. B. die Unterbrechung der von dem Kanzler oder Notar Arnulf in die Pyrenäen-Klöster gemachten Visitations-Reisen, den Mangel an Nachrichten über den Verbleib des Lupitus von Barzelona und des Bonifilius von Girona (mir wenigstens scheint diese Ursache der Wahrheit näher zu kommen, als die oben angeführte), und das Verschwinden des Büchleins *De multiplicatione et divisione numerorum* sammt seinem Verfasser. Das Alles macht begreiflich weshalb fassbare Beweise nicht gefunden worden sind und auch wohl in Zukunft nicht werden gefunden

werden. Wenn aber GERBERT selbst den JOSEPH *Sapiens*, der das Büchlein geschrieben, nicht als Juden bezeichnet, so beweist dies nur, wie gut und richtig er die Menschen zu beurteilen verstand. Und doch hatte er selbst Verdacht und üble Nachrede nicht von sich abzuhalten vermocht. Oder wäre es so unwahrscheinlich, dass in jenen weit zurückliegenden Jahren, trotz GERBERTS und seiner Freunde Vorsicht und Zurückhaltung, eine dunkle Kunde von dem wahren Stande der Dinge in das Volk hindurchgesickert wäre, und indem dies die jüdische Kabbala mit der Wissenschaft der Sarazenen verwechselte, die seltsamen Märchen, die WILHELM VON MALMESBURY über ihn erzählt (Anm. 16 meines Schriftchens), hervorgerufen hätte?

RECENSIONEN. — ANALYSES.

Diophanti Alexandrini Opera omnia cum graecis commentariis. Edidit et latine interpretatus est **P. Tannery.** Volumen I. Diophanti quae exstant omnia continens. Lipsiae, Teubner 1893. 8°, IX + 481 p.

Il y a 9 ans, nous avons inséré dans ce journal une *Notice sur une nouvelle édition de Diofantos préparée par M. Paul Tannery* (voir Biblioth. Mathem. 1884, col. 47—48). Nous nous permettons d'en reproduire ici les lignes suivantes:

> L'ouvrage en question comprendra une édition critique du texte grec de Diofantos, avec une traduction latine, faite en employant les notations modernes, des commentaires étendus, et, de plus, le texte grec, encore inédit, des scholies attribués à Maximus Planudes.
>
> La collation complète des cinq manuscrits de Diofantos qui existent à Paris, a convaincu M. Tannery qu'il y a en fait deux familles de manuscrits, dérivant d'une source commune.
>
> L'archétype de la première famille est antérieur à Maximus Planudes et avait ses scholies propres, d'ailleurs en petit nombre et peu étendus, qui seront également publiés. Le plus ancien manuscrit de cette famille est le n° 191 du Vatican.
>
> Le plus ancien de la seconde famille est le n° 308 de San Marco à Venezia. C'est à cette famille qu'appartiennent les manuscrits utilisés par Xylander et par Bachet de Méziriac. Mais ceux de la première famille sont préférables et permettront de combler plusieurs lacunes et d'apporter des corrections importantes.
>
> L'intérêt de la nouvelle édition sera surtout, au point de vue du texte grec, dans la restitution aussi fidèle que possible des notations algébriques de Diofantos souvent abandonnées ou défigurées dans les manuscrits et dans les éditions de Bachet et de S. Fermat.

D'après le plan de M. Tannery, la publication de la nouvelle édition aurait eu lieu déjà en 1885, mais ce n'est que vers la fin de l'année passée que la première partie en a paru. Ce retard a permis à M. Tannery de consulter quelques manuscrits qui lui étaient inconnus en 1884, en premier lieu le Cod. Matritensis 48 (du 13e siècle), qui est le plus ancien de la première famille et dont le n° 191 du Vatican est une copie faite en Italie vers le milieu du 15e siècle. En tout, M. Tannery

a eu connaissance de 22 manuscrits, dont seulement 8 ont mérité d'être collationnés pour la nouvelle édition. Pour la réstitution du texte, il s'est servi en premier lieu du cod. Matritensis déjà cité. Quant aux notations algébriques, M. TANNERY fait remarquer dans la préface qu'il est presque impossible de savoir comment DIOFANTOS a désigné la quantité inconnue, et quel symbole il a employé pour distinguer entre un nombre entier et une fraction fondamentale ayant ce nombre pour dénominateur; les signes qu'à choisis M. TANNERY, sont ceux qu'il a jugés les plus probables.

Comme l'indique le titre, le premier volume de l'édition de M. TANNERY contient tous les écrits de DIOFANTOS qui nous sont parvenus, c'est à dire *Arithmeticorum libri sex* et *De polygonis numeris liber* avec traduction latine; dans cette traduction les notations modernes (x, X_1, X_2, etc.), pour des quantités inconnues sont toujours employés, ce qui en facilite essentiellement la lecture.

La seconde partie embrassera entre autres choses les scholies attribués à MAXIMUS PLANUDES, et une notice sur les manuscrits connus des ouvrages de DIOFANTOS et des scholies.

L'édition soigneuse de M. TANNERY rendra assurément de grands services aux savants qui voudront étudier d'après les sources mêmes l'arithmétique et l'algèbre des Grecs.

Aux deux errata indiqués à la fin de la préface il faut ajouter: p. 209, ligne 5, *au lieu de* $35x$ *lire* $35x^3$.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

REVUE SEMESTRIELLE DES PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES RÉDIGÉE SOUS LES AUSPICES DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE D'AMSTERDAM. TOME I. PREMIÈRE PARTIE. Amsterdam, W. Versluys 1893. 8°, (4) + 104 p.

De nos jours, où les mathématiques sont cultivées avec tant d'ardeur, il devient de plus en plus difficile de suivre le mouvement scientifique dans toutes ses branches et dans tous les pays. Le Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik est un excellent guide pour quiconque veut prendre connaissance des recherches faites pendant les dernières années, mais il passe en général un temps de trois ans entre la publication d'un mémoire et la publication de l'analyse correspondante dans le Jahrbuch, et pendant ce temps intermédiaire il faut chercher ailleurs les renseignements nécessaires. Pour cette raison nous commençâmes en 1884 de publier dans la première

série de la Bibliotheca Mathematica des listes trimestrielles d'écrits récemment parus dans le domaine des mathématiques pures, mais, pour des motifs qui sont indiqués dans la préface à l'année 1886 du journal, la publication de ces listes ne fut plus continuée. Maintenant notre plan a été repris avec quelques modifications par la société mathématique d'Amsterdam, qui l'a en même temps considérablement amplifié, en joignant aux indications des titres aussi de petites analyses des mémoires respectifs. Pour donner une idée du plan de la Revue, nous reproduisons ici un extrait de l'»Avis» de la société.

En publiant la *Revue semestrielle* la société mathématique d'Amsterdam s'est proposé de faciliter l'étude des sciences mathématiques, en faisant connaître, sans délai de quelque importance, le titre et le contenu principal des mémoires mathématiques publiés dans les principaux journaux scientfiques.

La *Revue semestrielle* sera rédigée d'après les règles suivantes:

1. Le titre du mémoire sera précedé d'une ou de plusieurs notations, renvoyant au système de classification, adopté par le Congrès international de bibliographie des sciences mathématiques et suivi d'un compte rendu très sommaire du contenu du mémoire. Dans le cas pourtant que les notations et le titre indiquent suffisamment le contenu du mémoire, le compte rendu pourra être supprimé.

2. Les titres seront donnés en entier ou en abrégé dans la langue des auteurs. Pour les analyses on se servira de la langue allemande, anglaise ou française, selon que le mémoire a été rédigé en allemand, en anglais ou en français; pour les mémoires rédigés dans une autre langue l'analyse se fera d'ordinaire en français.

3. En général on ne donnera des comptes rendus que des mémoires se rapportant aux mathématiques pures et à la mécanique, y compris l'hydrodynamique et la théorie de l'élasticité et à l'exclusion de la mécanique appliquée, de la physique mathématique et de l'astronomie. Cependant on inscrira les notations de classification et les titres des mémoires sur des sujets exclus, si ces memoires se trouvent dans des journaux presque exclusivement mathématiques.

— — — — — — — — — — — — —

5. Les deux parties dont se composent les tomes annuels de la Revue paraîtront en général le 1 janvier et le 1 juillet. La première partie contiendra l'analyse des travaux publiés depuis le 1 mars jusqu'au 1 octobre de l'année précé-

dente; la seconde partie contiendra celle des travaux parus depuis le 1 octobre de l'année précédente jusqu'au 1 mars de l'année courante. Les mémoires y seront rangés d'après leur ordre dans les journaux, les journaux d'après l'ordre alphabétique des différents pays.

6. Pour faciliter les recherches, chaque partie contiendra trois tables, une table des journaux, une table des notations de classification et une table des auteurs.

— — — — — — — — — — — — —

La rédaction de la Revue a été confiée à MM. P. H. Schoute, D. J. Korteweg, J. C. Kluyver, W. Kapteyn et P. Zeeman avec la collaboration de MM. C. van Aller, F. de Boer, J. Cardinaal, D. Coelingh, R. J. Escher, W. Mantel, P. Molenbroek, P. van Mourik, M. C. Paraira, A. E. Rahusen, G. Schouten, J. W. Tesch, J. Versluys, J. de Vries et Mlle A. G. Wijthoff. Le prix de l'abonnement annuel est de 8·50 fr.

Dans le cahier paru sont analysés 56 différents recueils, dont 4 ont été publiés en Amérique, 3 en Belgique, 1 en Danemark, 10 en l'Allemagne, 10 en France, 11 en Angleterre, 6 en Italie, 2 en Néerlande, 1 en Norvège, 4 en Autriche, 1 en Portugal, 1 en Finlande et 2 en Suède. Outre ces recuils, la rédaction indique 64 autres, dont il sera rendu compte dans les cahiers suivants. Nous espérons que la liste de recueils sera bientôt complétée, de manière qu'elle embrasse au moins quelques journaux publiés en langue russe et quelques recueils parus en Suisse. En même temps nous nous permettons de demander à la rédaction s'il n'est pas possible d'ajouter aussi dans chaque cahier une liste des ouvrages mathématiques récents publiés en dehors des recueils périodiques.

Nous recommendons vivement la Revue semestrielle à nos lecteurs; comme nous l'avons déjà indiqué, elle ne fait pas double emploi avec le Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.

Abstraction faite de quelques errata sans importance, dont certains sont indiqués à la page 99 du cahier, l'exécution matérielle de la Revue est très soignée.

Stockholm. G. Eneström.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von || journal d'histoire des mathématiques publié par G. ENESTRÖM. Stockholm. 8°.

1892: 4. — [Analyse de l'année 1892:] *Venezia*, Istituto Veneto, Atti **4**$_7$, 1893, 403—409. (A. FAVARO.)

Физико-математическія науки въ ихъ настоящемъ и прошедшемъ. Журналъ издаваемый В. В. БОБЫНИНЫМЪ. Москва. 8°.

1891: 3—4. — Les sciences mathématiques dans leur état actuel et passé. Journal publié par V. V. BOBYNIN.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von M. CANTOR. Leipzig. 8°.

38 (1893): 1—2.

°**Apollonii Pergaei** quæ græce exstant cum commentariis antiquis. Edidit et latine interpretatus est J. L. HEIBERG. Volumen II. Lipsiæ 1893.

8°, 85 + 368 p. — [4·50 Mk.]

Beltrami, E., Enrico Betti.

Palermo, Circ. matem., Rendiconti **6**, 1892, 245—246. — Nécrologie. — [Traduite en espagnol:] El progreso matem. **3**, 1893, 30—32.

Besso, D., Sopra un opuscolo di Michelangelo Ricci.

Periodico di matem. **8**, 1893, 1—16.

Birkenmajer, L., Marcin Bylica z Olkusza oraz narzedzia astronomiczne, ktore zapisal uniwersytetowi Jagellonskiemu w roku 1493.

Krakow, Akad. umiej., Rozprawy **25**, 1892, 1—164. — MARTIN BYLICA d'Olkusz et les instruments astronomiques qu'il avait procurés à l'université de Krakow. — [Compte rendu en allemand:] *Krakow*, Akad. umiej., Bulletin 1892, 98—110.

Bobynin, V., Progrès successifs des sciences mathématiques chez les peuples de l'Europe.

Biblioth. Mathem. 1892, 110—114.

БОБЫНИНЪ, В. В., Изъ біографіи НИЛСА-ГЕНРИКА АБЕЛЯ.

Fiziko-matem. naouki **10** (1891), 1893, 78—94. — BOBYNIN, V. V., De la biographie de N.-H. ABEL. (Séjour à Paris; rétour à la Norwège.) — Cfr. Biblioth. Mathem. 1891, p. 93.

БОБЫНИНЪ, В. В., Очерки исторіи расвитія фисико-математическихъ зианій въ Россіи. Эпоха государственнаго содѣйствія развитію научныхъ знаній.

Fiziko-matem. naouki **9**, 1890, 23—47; **10**, 1891, 33—37, 65—77; **11**, 1892, 27—30. — BOBYNIN, V. V., Esquisses d'histoire du développement des connaissances mathématiques et physiques en Russie. Epoque de l'appui du gouvernement pour le développement des connaissances scientifiques.

БОБЫНИНЪ, В. В., Русская физико-математическая библіографія. **2**:4 [1792—1799]. Москва 1891—1893.
8°, (2) + 271 + (1) p. — BOBYNIN, V. V., Bibliographie russe des sciences mathématiques et physiques. Catalogue de livres et de mémoires des sciences mathématiques et physiques publiés en Russie depuis l'invention de l'imprimérie jusqu'à présent. — Appendice au journal »Fiziko-matematitcheskia naouki» **10** (1891).

Böcher, M., A bit of mathematical history.
New York, Mathem. soc., Bulletin **2**, 1893, 107—109. — Sur l'histoire des fonctions de BESSEL.

Favaro, A., Per il terzo centenario dalla inaugurazione dell' insegnamento di Galileo Galilei nello studio di Padova. Firenze 1892.
Folio, 29 p. + portr. + 25 facsim.

Favaro, A., Galileo Galilei ed il suo terzo centenario cattedratico nella università di Padova.
Natura ed arte (Milano) **1**, 1892, 297—321.

Favaro, A., Stemmi ed inscrizioni concernenti personaggi Galileiani nella università di Padova. Padova 1893.
8°, 15 p.

G[aldeano], Z. G. de, Notas que pueden servir para un artículo biográfico acerca de Gerono.
El progreso matem. **3**, 1893, 28—30.

Gerhardt, C. J., Leibniz und Pascal.
Berlin, Akad. d. Wissensch., Mittheilungen 1892, 505—520.

°**Graf, J. H.,** Das Leben und Wirken des Physikers und Astronomen Johann Jacob Huber aus Basel (1733—98). Bern 1892.
8°, 75 p. + portr. — [1 Mk.]

Hunrath, K., Zur Geschichte der Decimalbrüche.
Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 25—27.

Köpper, F. Th., Notizen über die Zahlwörter im Abacus des Boethius.
| *S:t Pétersbourg,* Acad. d. sc., Mélanges gréco-romains **6**, 1892. 18 p. — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **37**, 1892; Hist. Abth. 210—211. (CANTOR.)

Lampe, E., Die Entwickelung der Mathematik im Zusammenhange mit der Ausbreitung der Kultur. Rede zum Geburtfeste seiner Majestät des Kaisers und Königs Wilhelm II. in der Aula der königlichen technischen Hochschule zu Berlin am 26. Januar 1893. Berlin 1893.
8°, 26 p.

Lloyd Tanner, H. W., On the history of Arbogasts rule.
Messenger of mathem. **20**, 1890, 83—101.

Loria, G., Congetture e ricerche sull' aritmetica degli antichi Egiziani.
Biblioth. Mathem. 1892, 97—109.

Mackay, J. S., Historical notes on a geometrical problem and theorem.
Edinburgh, Mathem. soc., Proceedings **8**, 1890, 93—94.

Müller, F., Carl Heinrich Schellbach. Gedächtnisrede in der Aula des königlichen Friedrich Wilhelms Gymnasiums am 29. Oktober 1892. Berlin, Reimer 1893.
8°, 35 p.

Omaggi a Galileo Galilei per il terzo centenario dalla inaugurazione del suo insegnamento nel Bò pubblicati per cura della r. accademia di Padova. Padova 1892.
4°, 46 + (1) p. — Cette publication contient les notices suivantes relatives à l'histoire des mathématiques: A. Favaro, *Galileo Galilei e l'accademia di Padova* (p. 5—8); G. Eneström, *Remarque sur l'étude des écrits de Galilei en Suède au commencement du 17e siècle* (p. 26—27); A. Wolynski, *Carteggio Galileiano* (p. 44—46). — Parmi les autres contributions, celles de MM. P. Riccardi et E. Wohlwill se rapportent plus étroitement à l'histoire des mathématiques.

ПЕРГАМЕНТЪ, О., Галилео Галилей, его жизнъ и научная дѣятельность.
Vjestnik elem. matem. **13**, 1893, 177—184, 197—204. — Pergament, O., Galileo Galilei, sa vie et son action scientifique.

Pinto, L., Per Enrico Betti.
Napoli, Accad. d. sc. fis. e matem. 6_2, 1892, 143—144. — Nécrologie.

Schubert, H., The squaring of the circle.
Washington, Smithson. instit., Report 1890, 97—120. — Traduction de l'écrit indiqué à la Biblioth. Mathem. 1889, p. 61—62.

Segre, C., Riccardo de Paolis. Cenni biografici.
Palermo, Circ. matem., Rendiconti **6**, 1892, 208—224.

Studnicka, F. J., Johannes Marcus Marci a Cronland, sein Leben und gelehrtes Wirken. Festvortrag gehalten bei der am 31. Jänner 1891 stattgehabten Jahresversammlung der böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prag 1891.
8°, 32 p. — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **37**, 1892; Hist. Abth. 39.

Sturm, R., Heinrich Schröter.
Journ. für Mathem. **109**, 1892, 358—360. — Nécrologie.

Suter, H., Der V. Band des Katalogs der arabischen Bücher der vice königlichen Bibliothek in Kairo. Aus dem Arabischen übersetzt und mit Anmerkungen versehen.
Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 1—24, 41—57.

Wiedemann, Notiz über ein von Ibn al Haitam gelöstes arithmetisches Problem.
Erlangen, Phys.-med. Soc., Sitzungsber. **24**, 1892, 83.

Question 40 [sur le géomètre allemand Bürmann].
Biblioth. Mathem. 1892, 120. (G. Eneström.)

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Herausgegeben von E. LAMPE. Band 22 (1890). Berlin, Reimer 1893.
8°. — Les pages 1—60 contiennent un compte rendu des ouvrages d'histoire des mathématiques parus en 1890.

CANTOR, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Zweiter Band. Von 1200—1668. Zweiter Theil. Leipzig, Teubner 1892. 8°.
Mathesis 3_2, 1893, 16. (P. M.)

FAVARO, A., Nuovi studi Galileiani. Venezia 1891.
Zeitschr. für Mathem. **37**, 1892; Hist. Abth. 87—91. (CANTOR.)

LORIA, G., Nicola Fergola e la scuola di matematici che lo ebbe a duce. Genova 1892. 4°.
El progreso matem. **2**, 1892, 267—269. (Z. G. DE G.) — Zeitschr. für Mathem. **37**, 1892; Hist. Abth. 215—216. (CANTOR.) — Rivista di matem. **2**, 1892, 179—186. (E. PASCAL.) — [Réponse à la critique de M. E. PASCAL:] Rivista di matem. **3**, 1893, 6—15. (G. LORIA.) — Jorn. de sc. mathem. **11**, 1892, 59. (G. T.)

MÜLLER, F., Zeittafeln zur Geschichte der Mathematik, Physik und Astronomie bis zum Jahre 1500, mit Hinweis auf die Quellen-Literatur. Leipzig, Teubner 1892. 8°.
Biblioth. Mathem. 1892, 115—116. (G. ENESTRÖM.)

RUDIO, F., Über den Antheil der mathematischen Wissenschaften an der Kultur der Renaissance. Hamburg 1892. 8°.
Zeitschr. für Mathem. **37**, 1892; Hist. Abth. 213. (CANTOR.)

RUDIO, F., Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung. Deutsch herausgegeben und mit einer Übersicht über die Geschichte des Problems von der Quadratur des Zirkels von den ältesten Zeiten bis auf unsere Tage versehen. Leipzig, Teubner 1892. 8°.
Biblioth. Mathem. 1892, 116—117. (G. ENESTRÖM.)

WEISSENBORN, H., Zur Geschichte der Einführung der jetzigen Ziffern in Europa durch Gerbert. Berlin, Mayer & Müller 1892. 8°.
Zeitschr. für Mathem. **37**, 1892; Hist. Abth. 211—212. (CANTOR.)

[Listes d'ouvrages récemment publiés.]
Biblioth. Mathem. 1892, 117—120. — Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 39—40. — Fiziko-matem. naouki **10** (1891), 1893, 95—132.

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

41. Dans les recueils de récréations mathématiques publiés au 17e siècle on trouve la question suivante: »On veut ranger 15 chrétiens et 15 juifs de manière qu'il ne reste que des

chrétiens, si l'on écarte d'abord le neuvième homme, puis le neuvième homme à partir de l'homme éloigné, etc., jusqu'à ce que 15 hommes soient supprimés. Comment doit on s'y prendre à cet effet?»

Cette question a été mentionnée déjà en 1484 par CHUQUET; elle paraît avoir été publiée pour la première fois (comparez CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* **2**, 1892, p. 701—702) en 1518 par ELIAS LEVITA, qui l'attribue à ABRAHAM IBN ESRA († 1167; voir aussi STEINSCHNEIDER, *Abraham Ibn Esra;* Abhandl. zur Gesch. der Mathem. **3**, 1880, p. 123—124). D'autre part, d'après HEGESIPPUS (*De bello judaico* III: 16—18), la question semble tirer son origine de l'écrivain juif FLAVIUS JOSEPHUS († environ 100 après J. C.); aussi elle est appelée *Ludus Joseph* en 1539 par CARDANO (voir CANTOR, l. c. p. 460).

En Suède, la question est connue sous le nom de *jeu de S:t Pierre* (»Sankt Peders lek»); elle est rapportée dans un traité manuscrit d'arithmétique composé en 1601 par RIZANESANDER, et sa solution a été inscrite sur plusieurs bâtons runiques (*runstafvar*) faits en Suède au 17[e] siècle. Même en Japon la question n'est point inconnue (voir LE VALLOIS, *Les sciences exactes chez les Japonais;* Compte rendu du 1[er] congrès international des orientalistes **1** [Paris 1874], p. 289—299).

On demande une notice critique sur l'origine et sur l'histoire de la question qui vient d'être mentionnée.

(G. Eneström.)

Inhalt. — Table des matières.

STOCKHOLM, TRYCKT I CENTRAL-TRYCKERIET, 1893.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK

JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON — PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1893. STOCKHOLM. N° 2.

NEUE FOLGE. 7. — NOUVELLE SÉRIE. 7.

BERLIN. MAYER & MÜLLER. Markgrafenstrasse 51.

Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr.

PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Die beiden Euclid-Ausgaben des Jahres 1482.

Von G. VALENTIN in Berlin.

M. CANTOR sagt in seinen *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* Bd. II (Leipzig 1892), S. 266, bei Besprechung der ersten EUCLID-Ausgaben: »Gleich im ersten Jahre 1482 sind zweierlei Ausgaben vorhanden, beide bei RATDOLT in Venedig gedruckt, unterschieden in den ersten Bogen, späterhin übereinstimmend. Es ist natürlich ganz unmöglich, zu entscheiden, ob man hier wirklich von zwei Ausgaben zu reden hat, oder ob nur die erste Lage noch einmal gedruckt worden ist, wofür wir allerdings einen Grund nicht abzusehen vermögen».

Die eine dieser Ausgaben, welche HAIN in seinem *Repertorium* unter N:o 6693 beschrieben hat,[1] ist alter Bestand der Kgl. Bibliothek zu Berlin, die andere Ausgabe[2] ist vor Kurzem ebenfalls in deren Besitz gelangt, und da meines Wissens eine Beschreibung der Verschiedenheiten in den beiden Drucken bisher noch nicht veröffentlicht worden ist, so will ich im Folgenden eine kurze Darstellung derselben geben. Dabei werde ich die von HAIN beschriebene *B*, die andere Ausgabe *A* nennen.

Beide Ausgaben enthalten *r* Bogen, von welchen der Bogen *a* quinarius, die Bogen *b* bis *r* quaterni sind. Vom Bogen *a* ist Bl. 1ª unbedruckt, Bl. 1ᵛ enthält die Dedication RATDOLTS an den Fürsten IOANNES MOCENICUS; vom Bogen *r* ist Bl. 8ª und 8ᵛ unbedruckt. In der Dedication und von Bogen *a* Bl. 10ª an bis zum Schluss des Bogens *r* Bl. 7ᵛ stimmen beide

Ausgaben im Text, in der Interpunctation, in den Abbreviaturen und in den Figuren vollständig überein, so dass auch namentlich der Schluss in beiden übereinstimmend lautet:

> Opus elementor*um* euclidis megarensis in geometri*am* art*em* In id quo*que* Campa- | ni *per*spicacissimi C*om*mentationes fini*unt*. Erhardus ratdolt Augustensis impressor | solertissimus. venetijs impressit. Anno salutis MCCCCLXXXIJ. Octauis Caleñ. | Iuñ. Lector. Vale.

Anders verhält es sich dagegen mit den Blättern 2 bis 9 des Bogens *a*. Schon der Eingang ist verschieden; in *A* heisst es:

> Preclarissim*um* opus elementor*um* Euclidis megar*en*sis ūna c*um* c*om*- | mentis Campani *per*spicacissimi in art*em* geometri*am* incipit felici*ter*.

in B:

> Preclarissimus liber elementorum Euclidis perspi- | cacissimi: in artem Geometrie incipit qu*am* foelicissime:

Die 16 Seiten der 8 Blätter schliessen übereinstimmend mit dem gleichen Worte, die einzelnen sich entsprechenden Zeilen dagegen nur selten, da in *B* häufig ganz andere Abbreviaturen gebraucht sind, wie in *A*. Der Text ist ungeändert geblieben, nur finde ich im Druck folgende Abweichungen, wobei ich die falsche Lesart mit cursiven Lettern wiedergebe und wenn in beiden Ausgaben derselbe Fehler ist, die richtige Lesart hinzusetze.

		A	*B*	Richtige Lesart
Bl. 2ᵛ Z.	26.	animi	*ainmi*	
	37.	Propositio. 1.	Propositio prima	
3ᵃ	9.	*linea*	linee	
	14.	*puncca*	puncta	
	18.	*hee*	he	
	26.	*collocauimus*	collocabimus	
	43.	*data*	date	
3ᵛ	8.	demantur de	*demantur*	
	17.	*in puncto*	in puncto. f.	
4ᵃ	4.	*equalis*	equalia	
	7.	*intellige*	intelligo	
	33.	due	*dne*	
	36.	*ila*	illa	

	A	B	Richtige Lesart
Bl. 4ᵛ Z. 4.	. b. d. et b. c.	*.b.d. et .b. d. et .b.c.*	
15.	*. b. e.*	*. b. e.*	. b. c.
5ᵃ 13, 14.	*pro- | ham*	14: protraham	
20.	*.d, b. c.*	.a. d. c.	
24.	*Tit*	25: Sit	
29.	*. c. b. d.*	. e. b. d.	
5ᵛ 26.	*. b: g. h.*	. b. g. h.	
28.	*. b. c. a.*	*.g. c. a.*	.g. a. c.
34.	*. e.*	*. e.*	.c.
6ᵃ 20, 21.	*mi | nor*	21: maior	
37.	circulum. k. h.	*. k. h.*	
6ᵛ 11.	*Propositio. 14.*	Propositio. 24	
29.	*quinti*	*qnte*	quintae
7ᵛ 3.	*. d. et .e. f.*	*. d. et .e. f.*	.c. d. et .e. f.
18.	*. a. b: et .c. d.*	. a. b. et .c. d.	
33, 34.	*Sint ergo in omnes super- | ficie vna*	Sint ergo omnes in super- | ficie vna	
34.	. a. b. et .c. d.	*. a. b. et :c. d.*	
8ᵃ 17.	*angulus*	angulus. a.	
9ᵃ 22.	*ipsi*	ipse [sc. superficies]	
26.	*constitute*	constituti [sc. trianguli]	
34.	*.c. f.*	*. c. f.*	.e. f.
9ᵛ 14.	*idem*	15: eidem [sc. triangulo]	
20.	Propositio. 40.	[fehlt]	
34.	Propositio. 41.	[fehlt]	

Die am Rande gegebenen Figuren zeigen endlich folgende Verschiedenheiten:

Bl. 2ᵃ. In *A* ist, entsprechend dem Texte, zuerst *Punctus,* dann *Linea* abgebildet, in *B* ist es umgekehrt; in *A* folgt dann *Linea curva* und *recta,* welche in *B* fehlen; in *A* ist in der Figur des Kreises ausser *Diameter* auch *Circumferentia* gedruckt, in *B* fehlt letzteres.

Bl. 2ᵛ. In *A* ist ausser *Parallele* und *Sil'is helmu(aym)* noch die Figur eines *Helmuaripha* gegeben, welche in *B* fehlt. Zur Erläuterung der *Petitiones* ist in *A* gezeichnet: 1) eine Gerade; 2) zwei rechtwinklig sich schneidende Linien; 3) drei concentrische Kreise; 4) zwei convergirende von einer dritten Geraden geschnittene Linien, bis zu ihrem Durchschnittspunkt verlängert.

In *B* dagegen fehlen die beiden ersten Figuren, die drei concentrischen Kreise sind grösser als in *A*; und endlich sind die beiden convergirenden Linien der 4. Figur nicht bis zu ihrem Durchschnitt verlängert, der hier rechts von der schneidenden Geraden liegen würde, während er in *A* links von derselben liegt.

Bl. 3^v. In *A* sind zu *Propositio 2* noch zwei Figuren für die Fälle beigedruckt, dass der gegebene Punkt erstens Endpunkt der gegebenen Linie ist und zweitens in der gegebenen Linie selbst liegt; beide Figuren fehlen in *B*.

Bl. 4^a. Die Figur zu *Propositio 5* des *A* ist in *B* auf Bl. 3^v.

Bl. 9^a. Die zu *Propositio 39* gehörige Figur ist in *A* in kleinerem Maasstabe als in *B*.

Eine fernere Verschiedenheit ist, dass in *B* oben am Rande von Bl. 2^a die Worte gedruckt sind: »De principijs per se notis: et primo de diffinitionibus earundem«, welche in *A* fehlen.

Als letzte Verschiedenheit der beiden Ausgaben ist zu erwähnen, dass in der ganzen Ausgabe *A* am Kopf jeder Seite von Bl. 2^v an »Liber I« (resp. II, III, u. s. w.) gedruckt ist, und zwar so, dass auf der linken Seite »Liber«, auf der rechten »I« (resp. II, III, u. s. w.) steht; dasselbe ist in *B* der Fall mit Ausnahme der Blätter 2 bis 9, so dass also auf Bl. 9^v (= Seite 18) das Wort »Liber« fehlt, auf der gegenüberstehenden Seite (Seite 19 = Bl. 10^a) dagegen »I« steht.

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich nun, dass die beiden Ausgaben in den Blättern 2—9 und nur in diesen verschieden sind; es scheint mir daher klar zu sein, dass man nicht von zwei verschiedenen Ausgaben des Jahres 1482 reden darf, sondern dass man es nur mit einer Ausgabe zu thun hat, von welcher während des Druckes aus irgend einem Grunde der erste Bogen neu gesetzt wurde. Was mag der Grund dafür gewesen sein? Sachlich unterscheiden sich die beiden Drucke im Wesentlichen nur darin, dass in *B* am Anfang der Name Campanus fortgelassen ist und einige Figuren in ihr fehlen, dagegen der Zusatz am Rande von Bl. 2^a »De principiis etc.« neu hinzugekommen ist. Diese Änderungen können aber schwerlich einen Grund abgegeben haben, den ersten Bogen ganz neu zu setzen. Zwei Erklärungen scheinen mir daher für den Neudruck nur übrig zu bleiben: entweder bemerkte man, nachdem eine Reihe von Abzügen gemacht war, die grosse Menge von Druckfehlern im ersten Bogen, oder es ist die Satzform desselben mitten im Druck durch einen unglückligen Zufall unbrauchbar geworden. Im ersten Falle würde sich aber Ratdolt wohl damit begnügt haben, nur die Fehler im ersten Satz zu verbessern, anstatt den

ganzen Bogen neu zu setzen. Nun folgt aber aus den vielfach veränderten Abbreviaturen unzweifelhaft, dass der erste Bogen ganz neu gesetzt ist und deshalb neige ich mich der Ansicht zu, dass die Form für den ersten Bogen während des Druckes verunglückt ist und RATDOLT sich desshalb genöthigt sah, den ersten Bogen noch eimal zu setzen. Hierbei mögen auch die Holzschnitte der drei concentrischen Kreise und der zwei convergirenden Linien auf Bl. 2ᵛ, sowie der zu *Propositio 39* gehörigen Figur beschädigt sein, so dass neue Holzschnitte dafür angefertigt werden mussten. Wäre der Satz der Druckfehler wegen erneuert worden, so würden wohl auch die als fehlerhaft erkannten Exemplare nicht in den Handel und somit auch nicht auf uns gekommen sein.

Eine zweite Frage welche sich aufdrängt ist die, welcher von den beiden Drucken ist der erste, welcher der zweite Satz? Einen überzeugenden Beweis zu liefern, halte ich nicht für möglich; wir sind hier, wie oben, auf Vermuthungen angewiesen und will ich im Folgenden kurz die Gründe angeben, aus denen ich die Ausgabe *B* für die spätere halte.

1) Von den 28 Druckfehlern der Blätter 2 bis 9 des *A* sind in *B* 22 beseitigt, 2 sind verändert aber nicht richtig und 4 sind stehen geblieben, dafür haben sich freilich 8 neue eingeschlichen. RATDOLT hat also den neuen Satz benutzt um den Text von einer Reihe von Druckfehlen zu befreien. Läge die Sache dagegen umgekehrt, so würden 22 neue Druckfehler neu hineingekommen sein; diese grosse Anzahl könnte aber nur durch die Schnelligkeit, mit welcher der Bogen neu gesetzt werden musste, erklärt werden, was meiner Meinung nach nicht angeht.

2) Der zweite Grund für meine Ansicht ist das Fehlen von Liber I am Kopfe jeder der neugedruckten 16 Seiten, denn es ist wahrscheinlicher, dass bei dem neuen Satz diese Bezeichnung vergessen worden ist, als dass ihr Fehlen einen Grund zu einem völlig neuen Satz mitabgegeben hat. Ein gleiches Vergessen erklärt das Fehlen des Wortes Circumferentia in der Figur des Kreises auf Bl. 2ᵃ in *B*.

3) Die Euklidischen Lehrsätze sind einzeln durch die Überschrift *Propositio 1* (bezw. 2, 3, u. s. w.) kenntlich gemacht; es würde der Gleichmässigkeit entsprechen, auch den Euclidischen Grundsätzen eine Überschrift zu geben; das hat man in der zweiten Ausgabe (*B*) nachgeholt, war aber genöthigt, sie an den Rand zu setzen, weil der Text der 16 Seiten des ersten Druckes wieder 16 Seiten, nicht mehr, nicht minder, des zweiten

Satzes ausfüllen musste. Aus diesem Grunde mussten schliesslich auf Bl. 9v auch die Überschriften *Propositio 40* und *Propositio 41* fortfallen; sie an den Rand zu setzen ging aber in diesem Falle nicht an, weil sonst die dazu gehörigen Figuren fortgelassen oder in verkleinertem Maasstabe hätten neu geschnitten werden müssen.

[1] Vergleiche auch KÄSTNER, *Geometriae Euclidis prima editio* (Lipsiae 1750) und WEISSENBORN, *Die Übersetzungen des Euklid durch Campano und Zamberti* (Halle 1882), S. 4 ff.

[2] Vergleiche CURTZE, in der Zeitschr. für Mathem. **19**, 1874, p. 80.

L'odierno indirizzo e gli attuali problemi della storia delle matematiche.

Di GINO LORIA a Genova.*

Nella stessa guisa che ogni popolo civile, non appena si sia assicurato uno stabile assetto politico, attende a che sia serbata memoria delle gesta compiute per conseguirlo, e con amorosa cura raccoglie i nomi di coloro che ne furono più efficaci fattori, quasi volesse dalle glorie del passato derivare gli auspici dell' avvenire; così ogni scienza, appena trascorso quel periodo di ricerca affannosa ed ininterrotta che la rese degna di tal nome, si dà premura di compilare gli annali delle imprese condotte a termine da chi con maggiore successo la coltivò o promosse. Le grandi opere storiche che è fama componessero i Peripatetici TEOFRASTO da Lesbo ed EUDEMO da Rodi stanno a dimostrare quanto di buon ora siasi sviluppato negli studiosi questo sentimento elevato di ben intesa riconoscenza verso coloro che li precedettero nell' arringo scientifico.

Come la storia civile e politica ebbe le sue scaturigini nell'epopea e soltanto dopo essersi purgata dagli ingredienti introdottivi dalle leggende popolari e dalla fantasia dei poeti assunse i lineamenti che oggi riteniamo come caratteristici di una vera storia; così la storia scientifica, prima di divenire ciò che essa è oggi, si presentò come una sequela di nomi d'autori e titoli di libri, lardellata di aneddoti più o meno interessanti e, quel che più monta, di autenticità in generale insostenibile.

Ma, mentre lo stadio epico — appartenendo ad un' epoca tanto remota ed essendo così schiettamente separato dagli stadi posteriori — non proietta alcuna luce sinistra sulle serietà degli intendimenti e il rigore dei metodi della storia politica; per converso, sono così vicini a noi i tempi nei quali si credeva (si vegga ad es. KÄSTNER) di scrivere la storia di una scienza quando si faceva un catalogo ragionato delle opere racchiuse in una ricca biblioteca, si narravano le circostanze in cui esse vennero acquistate e si dava qualche notizia intorno a chi le compose, che non deve essere cagione di meraviglia il constatare come molti pensino tuttora essere la storia della scienza immeritevole del nome di scienza, lo studio di essa di scarsa o

* Riassunto di una relazione letta dinnanzi al V Congresso storico italiano tenutosi in Genova nel settembre 1892.

nessuna utilità, indegno quindi di venire consigliato o incoraggiato. Ora, poichè nella continuità ininterrotta della storia il pensiero scientifico dell' oggi per ineluttabile necessità si lega al pensiero scientifico di ieri, e dal ritornare alle sue origini lontane o prossime arriva ad una migliore conoscenza di sè medesimo e ad un più sicuro procedere verso le inevitabili trasformazioni future, così io sono convinto sia urgente opporsi a che quell' opinione, basata su un' imperfetta cognizione del vero stato delle cose, si affermi e diffonda. Lo penso anche, perchè, a mio avviso, lo studio della storia della scienza esercita una salutare influenza sulla mente di ogni scienziato. Questi acquista col mezzo di essa serenità nell' accogliere ed imparzialità nel giudicare le nuove dottrine, dopo avere su mille esempi riscontrato come l'errore segni il cammino dall' ignoranza alla verità, e il paradosso dell' oggi possa divenire domani dogma scientifico; e si procurerà in tal modo un antidoto contro quell'avversione a tutto ciò che sa di nuovo, la quale può soffocare i più nobili tentativi di scoperta del vero. Egli diverrà indulgente verso le imprese più chimeriche, apprendendo quanto debba la chimica alla ricerca della pietra filosofale, la fisica a quella del moto perpetuo, l'astronomia allo studio dell' influenza dei corpi celesti sui destini dell' uomo; sarà guardingo prima di condannare all' ostracismo i lavori meno perfetti, percorrendo opere che, come l'Ottica di NEWTON, sono sempre degne di ammirazione e di studio per quanto abbiano siccome canoni fondamentali delle proposizioni oggi inammissibili; egli si corazzerà infine contro il pericolo di ritenere assolutamente indispensabile per una fertile indagine della verità quell' immenso arsenale di strumenti dei quali ogni giorno egli si serve, quando apprenderà gl'ingegnosi espedienti usati in passato per sopperire alla loro mancanza.

Tuttavia se, per queste ragioni ed altre molte che il desiderio di esser breve mi persuade a passare sotto silenzio, ritengo ingiusto il severo giudizio che molti sulla storia della scienza pronunciano, sono costretto ad ammettere essere esso, in parte almeno, giustificato dal modo con cui essa veniva intesa e trattata in epoche non molto discoste da noi. Ed invero, sino a poco tempo addietro, si dimenticava essere la storia tanto racconto di effetti quanto ricerca di cause, epperò si riguardava essere còmpito esclusivo dello storico l'ammassare il più gran numero di notizie bibliografiche, e il diminuire l'aridità di una tale raccolta con particolari relativi alla vita dei singoli autori; unica preoccupazione dello storico era quella di rendere

l'esposizione gradita al gran pubblico, ed intelligibile anche per coloro che non erano versati nella scienza di cui egli scriveva i fasti. Oggi all' opposto si tende ad espellere dalla storia di qualsivoglia dottrina tutto che rifletta esclusivamente la vita privata dei cultori di essa, per tener conto soltanto delle circostanze atte ad illuminare l'origine e l'evoluzione successiva delle loro idee e, più generalmente, l'ambiente intellettuale nel quale essi operarono; per compenso si esaminano con occhio di lince tutte le produzioni superstiti, per iscoprirne l'orditura e constatarne le più importanti conseguenze e determinare quindi le successive fasi di sviluppo di ogni teoria ed i loro scambievoli rapporti, in base alle quali desumere il modo in cui lo spirito umano procede dalle tenebre alla luce. In una parola, alla biografia degli scienziati si sostituisce la storia delle idee, e il desiderio di dilettare un pubblico numeroso si surroga coll' intendimento di completare l'istruzione necessaria a chiunque voglia coltivare con successo una data disciplina.

Ora siccome in ragion diretta della serietà degli ideali di chi proponesi di studiare un determinato tema, crescono gli ostacoli che si frappongono al conseguimento dell' intento, così il condurre oggi a buon termine una ricerca storica esige non di rado degli sforzi intellettuali comparabili a quelli necessari per compiere certe investigazioni scientifiche; tanto più che le difficoltà da sormontare sono di natura differente a norma del periodo storico che si studia. E così colui che esamina i fatti accaduti nelle antiche età deve, più che in qualunque altra circostanza, tenere presente il primo dei cardini posti da CARTESIO al sano filosofare, quella cioè di *non accettare mai per vera cosa alcuna che non si conosca ad evidenza esser tale;* armarsi in conseguenza, non di un cieco pironismo, ma di un scetticismo illuminato, a fine di ascrivere fra i veri soltanto quei fatti su cui non può nascere discussione. Orbene, per raggiungere tale certezza è quasi sempre necessario passare attraverso una lunga trafila di testimonianze intermedie; per avere piena conoscenza di una dottrina non basta attingere alle opere di un autore e de' suoi contemporanei, ma bisogna spesso percorrere la letteratura di parecchi secoli e chiedere informazioni a coloro che poterono valersi dei manoscritti originali; di ogni documento fa d'uopo dimostrare l'autenticità, di ogni autore bisogna indagare i procedimenti per discernere le citazioni di prima da quelle di seconda mano; ciascuna fonte secondaria deve venire minutamente discussa; per ogni tradizione conviene indagare il modo di formazione e la via per la quale giunse

fino a noi; nè si deve dimenticare la determinazione dell' ordine in cui si succedettero le varie ricerche e dell' età relativa de' vari autori, per non essere trascinati a giudizi tanto erronei quanto sarebbero quelli che farebbe un individuo incapace di percepire giustamente il rilievò degli oggetti e ignaro di tale imperfezione del suo organo visivo. Ma sgraziatamente, anche attenendosi a tutte queste regole, anche usando tutte le cautele immaginabili, non si arriva sempre a conseguenze che tutti ritengono per vere; spesso *si sente* di aver raggiunto la verità, ma si è tormentati dalla persuasione di essere incapaci di trasfondere in altri il proprio convincimento; donde deriva che certe questioni ricevettero parecchie soluzioni fra loro contradditorie eppure egualmente verosimili, fra le quali ciascuno è libero di scegliere quella che maggiormente lo soddisfa.

Alle investigazioni concernenti le origini di un' antica dottrina, le quali formano le delizie dello storico propriamente detto, fanno splendido riscontro quelle, che esercitano la più grande attrazione sullo scienziato di professione, aventi per iscopo la ricostruzione di un edificio scientifico del quale siasi conservato un solo frammento, ricostruzione analoga a quella (che l'anatomia comparata rese possibile) di un animale del quale ci siano presentate alcune membra. Tali lavori di divinazione possono essere condotti con metodo uniforme e guidare a risultati la cui verosimiglianza confini con la certezza, nelle matematiche, ove le varie proposizioni sono siffattamente collegate fra loro che non si può conoscerne una senza essere in possesso anche delle precedenti; ed in fatto molte delle notizie che abbiamo intorno alla geometria greca prima di EUCLIDE sono il frutto di una rigorosa applicazione di tale procedimento.

Passando dalla contemplazione delle splendide produzioni del genio greco, all' esame dei contributi arrecati dall' età di mezzo alle nostre cognizioni positive, saremo dolorosamente impressionati dall' assenza quasi totale di pensatori originali; troveremo in regola dei commentatori, non degli autori; proveremo quindi una sensazione non dissimile da quella che avverte chi passa da un luogo sfarzosamente illuminato ad uno avvolto in una fitta tenebra: e se un accurato esame ci farà scorgere nell' ampia oscurità qualche punto brillante, a cui curiosamente ci avviciniamo, che cosa troveremo? tranne rarissime eccezioni, non una fiamma che avviva e riscalda, ma un pallido fuoco fatuo, ultimo derivato dei prodotti di altri tempi che l'ambiente mefitico conduce alla decomposizione.

Perciò nello studio delle opere medioevali si va incontro,

più che in qualunque analoga circostanza, al grave pericolo di smarrire la diritta via e seppellire quelle opere sotto il più profondo disprezzo. Per evitarlo fa mestieri rievocare il mezzo intellettuale nel quale esse furono pensate e scritte, rendersi esatto conto delle condizioni in cui versavano i loro autori in un tempo nel quale, secondo la geniale congettura di un grande poeta, l'architettura sacra era così sviluppata ed ardita perchè rappresentava l'unico campo in cui poteva liberamente estrinsecarsi l'umano intelletto. Tale rievocazione riesce senza dubbio sommamente difficile a noi che viviamo in una epoca in cui la scienza impera come sovrana assoluta; ove però perveniamo a trasportarci col pensiero in quell' epoca, il disprezzo nel quale saremmo tentati di tenere quanto allora venne intrapreso, trasformasi ben presto in ammirazione verso coloro che curarono a che la face della scienza non si spegnesse del tutto; e lo fecero, non già colla fiducia di ritrarne onore e fama, ma colla prospettiva di essere tenuti in conto di maghi o di allucinati; non già colla speranza di raggiungere una onorata fama, ma disposti ad essere in conseguenza tratti sulla via che conduce alla tortura od al rogo.

Nelle ricerche storiche riferentisi alla vita intellettuale del medio evo spesso accade di trovarsi di fronte ad errori assai gravi in cui incorsero gli studiosi di quel tempo, errori per ognuno dei quali si ripresenta la questione se sia debito dello storico il registrare, assieme agli sforzi coronati da buon successo, i tentativi falliti. A me sembra che sia dovere della storia della scienza l'indagare quali idee furono fertili di conseguenze degne di nota, l'assegnare ad esse un posto stabile nel nostro patrimonio scientifico e constatare il naufragio di quelle che non furono abbastanza robuste da poter navigare nel mare procelloso di una critica acuta e rigorosa. In conseguenza, se da un lato credo sarebbe ingiustizia passare sotto silenzio quei conati, infruttuosi bensì, ma in cui esistono germi che diedero in altre circostanze frutti sani e succosi, o quelli che servono a indicare una certa vita intellettuale in un' epoca di letargo; se inoltre credo assai utile porre allo scoperto l'errore che s'annida in certi pseudo-ragionamenti; per converso il serbare memoria di certi grossolani paralogismi, che sembrano quasi prodotti dall' avere i loro autori di deliberato proposito chiuso gli occhi dinanzi alla luce del vero, è a mio credere dannoso forse o per lo meno inutile: e mi sembra indegno della scienza e della storia seguire il consiglio di chi (Montucla) vorrebbe, quasi per rappresaglia, tradurre come malfattori dinnanzi alla posterità le persone che i fatti dimostrarono intellettualmente degradate.

L'eterno oblìo non è forse la sorte che ragionevolmente spetta a coloro che con mezzi illeciti tentarono di elevarsi più di quanto avevano diritto? e d'altronde l'oscurità non è forse condanna abbastanza grave per chi volle brillare ad ogni costo?

Il constatare ora come una gran parte delle questioni che s'incontrano studiando la storia scientifica antica e medioevale, abbiano le loro analoghe nella storia moderna di soluzione estremamente più facile, può far credere che la bisogna di chi indaga le vicende della scienza in tempi a noi vicini sia assai agevole. Ma che ciò non sia si riconosce osservando come alle difficoltà che presenta l'investigazione dello stato della scienza in epoche da noi lontane, altre non meno gravi subentrino passando a tempi più vicini, prodotte dall' ingente produzione intellettuale e dalla maggiore varietà ed elevatezza di concetti su cui essa aggirasi. Sicchè lo storico coscienzioso deve disporre di un' accuratezza infinita per procurarsi un completo materiale di studio, di una vasta coltura scientifica che gli consenta di intendere le opere che deve esaminare, e di un non comune acume critico per valutare il valore di quelle opere, e cioè il valore intrinseco, il valore rispetto all' epoca in cui furono composte, il valore riguardo alle conseguenze che ebbero. Quì pertanto si manifesta più chiaramente la necessità di un mutamento nell' indirizzo delle ricerche storiche, fondato sulla divisione del lavoro; e mentre un tempo il MONTUCLA si illuse che un sol uomo potesse render conto di tutti i progressi che le matematiche, sia pure che applicate, fecero dalle origine fino a'giorni suoi, ora si è già riconosciuto indispensabile studiare a parte la storia della matematica pura e quella di ciascuna delle sue svariate applicazioni; anzi si va ognor più raffermando e diffondendo la convinzione che anche ciascuna di queste storie parziali non potrà mai raggiungere il desiderato grado di perfezione, se non allor quando si sarà ricchi di un buon numero di particolari monografie storiche su ogni ramo delle matematiche, scritte da persone aventi speciale competenza.

Altre difficoltà presenta la storia moderna, perchè si esige che essa porga particolari incomparabilmente più minuti dell' antica: si vuole che da essa vengano rivelati i fattori prossimi e remoti delle scoperte di maggiore rilievo, messi in luce i rapporti fra gli autori più noti, e che col suo mezzo vengano definitivamente risolte quelle spinose questioni di priorità che turbano quella bella concordia che d'ordinario regna fra gli scienziati. Per rispondere a tutte le domande che in conseguenza si affollano alla sua mente, lo storico si trova di sovente trasci-

nato a compiere delle scorrerie in campi estranei alla cerchia consueta de' suoi studi nell' intento di procurarsi il combustibile con cui fare un po' di luce, e spingersi perfino a indagare tanto le relazioni politiche, commerciali ed intellettuali fra popolo e popolo, quanto le condizioni interne di ogni paese.

Errerebbe chi credesse che il vasto programma dell' odierna storia scientifica, del quale ho dianzi indicati alcuni articoli, sia ancora tutto da svolgere. Al contrario, si è già percorso buon tratto di cammino verso la conoscenza di quanto accadde in passato, e con gioia posso constatare come il moto in avanti, lungi dall' arrestarsi, accenni a proseguire con velocità crescente ed invadere tutto il mondo civile.

L'angustia dello spazio mi costringe a tacere degli importanti documenti, di recente scoperti e pubblicati, che svelarono le cognizioni aritmetiche e geometriche possedute dai popoli che precorsero gli Europei nell' arduo cammino delle scienze. Ma non posso per converso lasciare inosservato come la storia della matematica greca abbia raggiunto in questo ultimo quarto di secolo una perfezione insperata; cosicchè, prescindendo da qualche nube (che forse non si giungerà mai a dissipare) ancora avvolgente alcuni metodi di ricerca e specialmente i procedimenti di calcolo numerico, si è in grado di delinearne i contorni e disegnarne con esattezza anche molti particolari. È forza e dovere riconoscere che ciò è stato reso possibile dal valido aiuto che i cultori della filologia classica volonterosamente offrirono ai matematici: essi, col preparare delle eccellenti edizioni critiche dei più eminenti scienziati greci, nelle quali sono indicati i passi di origine dubbia, le interpolazioni, le aggiunte di posteriori commentatori, in una parola facendo servire a nostro vantaggio gli attrezzi ed i metodi dell' esegesi e dell' ermeneutica moderne, ci posero in grado di accertare la genuinità di alcuni testi, di migliorarne altri e di ricostruirne altri ancora.

Quanto alla storia della matematica presso i Romani, dopo il bel lavoro di Maurizio Cantor, ben poco ci resta a fare; d'altronde l'epoca in cui essi dominarono è una delle più sterili in produzioni scientifiche, tanto che si sarebbe tentati di giudicare quei nostri lontani progenitori come incapaci a piegare il loro genio pratico alle astrazioni della scienza; si può tutt' al più far merito ad essi di avere fatto in principio del medio evo quello che alla fine fecero gli Arabi, di avere cioè conservata e trasmessa la tradizione del sapere greco.

Per quanto concerne la storia scientifica dell' età di mezzo furono già raccolti e sfruttati molti importanti materiali; molti,

ma non ancora a sufficienza. E per rendere meno imperfetta la nostra conoscenza di quell' epoca la generalità dei matematici deve rivolgersi per aiuto agli orientalisti, la cui collaborazione sembra indispensabile per determinare con esattezza quanto fecero gli Arabi, sia di originale, sia per tramandarci le produzioni dell'antica Grecia; si rivolgono agli eruditi di professione per ottenere vengano tolti dagli archivi, decifrati e pubblicati quei preziosi manoscritti a cui troppo spesso si tributa un culto simile a quello degli Egiziani per le mummie schierate nei sotterranei.

Finalmente per quanto concerne la storia scientifica moderna, siamo giunti recentemente in possesso del secondo volume dell' opera magistrale dell' illustre capo della scuola storica tedesca, volume che ci abilita a giudicare quanto i matematici fecero prima dell' invenzione del calcolo infinitesimale. Inoltre di quei tempi e dei tempi posteriori altre scritture sono capaci di porgere ampie sebbene non complete notizie. Esse però non hanno il potere di sconsigliare dal portare a compimento, cambiandone forse il piano e le tendenze, la grande impresa a cui si accinse GUGLIELMO LIBRI scrivendo l'*Histoire des sciences mathématiques en Italie;* il lasciarla più a lungo nello stato frammentario nel quale attualmente si trova potrebbe ingenerare la falsa opinione che, spento GALILEO e dispersa la sua scuola, l'Italia sia stata, sino ai nostri tempi, sterile in matematici originali.

Intanto mi sia concesso esprimere il desiderio che queste pagine abbiano in primo luogo la virtù, se non di svelare agli spregianti o incuriosi la grandezza della storia della scienza, almeno di ricordare le belle parole di LEIBNIZ: *La verità è più diffusa di quanto si pensi; ma è spessissimo nascosta, avvolta, affievolita, mutilata, corrotta da aggiunte. Col rilevare le traccie di verità presso gli antichi ed i predecessori si caverà il diamante dalla sabbia, la luce dalle tenebre, e si riuscirà a formare una filosofia perenne.* E in secondo luogo quello di attrarre l'attenzione degli eruditi sul campo vasto e fertile in utili risultati che loro offre la storia della scienza; di scuoterli dall' indifferenza che molti affettano per essa, convincendoli esser dessa un elemento integrante della conoscenza di qualunque popolo, di qualunque secolo; di indurli quindi a prestare il loro valido aiuto agli scienziati titubanti nell' interpretare gli antichi testi; in una parola di stringere un' alleanza fra gli scienziati ed i cultori delle discipline storiche e filologiche, senza della quale sembra vana la speranza che la storia delle matematiche compia in avvenire dei progressi comparabili a quelli che incessantemente vanno facendo gli altri rami dello scibile.

Ancora sul teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche.

Di Gino Loria a Genova.

Nel presentare al r. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti il vol. V (nuova serie) delle Bibliotheca Mathematica, il prof. Favaro notava, a proposito dell' *Esame di alcune ricerche concernenti l'esistenza di radici nelle equazioni algebriche* ivi contenuto (p. 99—112), che io avrei potuto forse fare a quel lavoro delle nuove aggiunte »pescando nelle famose *Riviste di giornali* del Bellavitis».[1] Sembrommi quindi doveroso di seguire il consiglio implicitamente contenuto in questa osservazione; ed ora mi gode l'animo nell' asserive che, avendo percorsa attentamente la completa e variopinta collezione delle prelodate *Riviste,* trovai in un solo punto di esse fatto un cenno rapidissimo del teorema su cui erigesi la teoria delle equazioni algebriche. Alludo a quel passo della *Settima rivista*[2] ove il celebre inventore del metodo delle equipollenze discorre della dimostrazione del Foscolo (n. 36),[3] per segnalare i punti di contatto che essa manifesta con una esposta assai prima dal Bellavitis stesso nel § 15 del *Saggio sull' algebra degli immaginarii.*[4]

Forse non mi sarei deciso a far noto questo piccolo risultato di quella modesta ricerca bibliografica, ove non avessi così rinvenuta l'occasione desiderata per dare notizia di alcune importanti investigazioni[5] che vennero ad accrescere in modo notevole la letteratura dell' argomento in questione.

Fra esse meritano il posto d'onore quelle di Weierstrass,[6] le quali in sostanza arrivano a trasformare in argomentazione rigorosa e concludente uno pseudo-ragionamento antichissimo, il cui punto debole non era sfuggito a Gauss. Infatti il grande analista di Berlino si propone di dimostrare che, posto

$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)=x^n+\sum_\nu(x_1\ldots x_n)_\nu x^{n-\nu},$$

ove ν quì ed in seguito assume successivamente tutti i valori interi da 1 a n, e supposte date n costanti arbitrarie $C_1, C_2, \ldots, C_n$, esistono sempre n altre quantità $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soddisfacenti le n equazioni seguenti

$$\text{(S)} \qquad (x_1\ldots x_n)_\nu=C_\nu,$$

tali, cioè, che, posto

$$f(x) = x^n + C_1 x^{n-1} + \ldots + C_n$$

risulti identicamente

$$f(x) = \prod_\nu (x - x_\nu).$$

A tale scopo egli insegna un algoritmo con cui, date le C, si possono determinare le quantità $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soddisfacenti il sistema (S), senza, ben inteso, presuppore nota prima l'esistenza di tali quantità. In questo metodo di calcolo si ammette essere differente da o il discriminante di $f(x)$ e noto un sistema di n quantità $a_1, a_2, \ldots, a_n$ soddisfacenti le condizioni

$$\text{(C)} \qquad | C_\nu - (a_1 a_2 \ldots a_n)_\nu | < d_0 ,$$

ove d_0 è un numero positivo soggetto a certe limitazioni che per brevità quì si tacciono; da esso sistema se ne deducono successivamente altri $a'_\nu, a''_\nu, \ldots$, mediante le equazioni

$$a'_\nu = a_\nu - \frac{f(a_\nu)}{\prod_\mu (a_\nu - a_\mu)}, \qquad a''_\nu = a'_\nu - \frac{f(a'_\nu)}{\prod_\mu (a'_\nu - a'_\mu)}, \ \ldots \quad \text{ove } \mu \gtrless \nu .$$

Le quantità $a_\nu^{(\lambda)}$ ($\lambda = 0, 1, 2, \ldots$) così definite sono tutte finite. Se si pone $A_\nu^{(\lambda)} = (a_1^{(\lambda)} \ldots a_n^{(\lambda)})_\nu$ e si chiama $\varepsilon^{(\lambda)} d_0$, per un certo valore di λ, la massima fra le quantità $| C_\nu - A_\nu^{(\lambda)} |$, si avrà $\varepsilon^{(\lambda)} < (\varepsilon)^{2^\lambda}$. Finalmente se si designa con $\varphi_\lambda(x)$ il prodotto $\prod_\nu (x - a_\nu^{(\lambda)})$ e con $\psi_\lambda(x)$ la differenza $f(x) - \varphi_\lambda(x)$, le n quantità

$$(*) \qquad x_\nu = a_\nu - \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{f(a_\nu^{(\lambda)})}{\varphi'_\lambda(a_\nu^{(\lambda)})},$$

queste soddisfaranno il sistema (S). Tutto dunque è ora ridotto ad assodare la esistenza delle quantità $a_1, a_2, \ldots, a_n$ soddisfacenti le condizioni (C): ciò vien fatto dal WEIERSTRASS nel terzo § della sua memoria, servendosi di due proposizioni che, a mò di lemmi, egli premise nel secondo. Per una prossima scrittura egli riserba l'esposizione di complementi al suo notevolissimo ragionamento (a dimostrarne l'importanza basta segnalare le formole (*), le quali dànno esplicitamente tutte le varie radici della equazione proposta), dopo averne con una semplice os-

servazione estesa la portata sino ad includere il caso in cui il discriminante di $f(x)$ sia nullo.

Le altre indagini su cui credo opportuno di fissare l'attenzione degli algebristi sono dovute al MERTENS[7] e rappresentano uno svolgimento ulteriore dei concetti che governano le anteriori pubblicazioni del medesimo autore sullo stesso tema (n. 74). Come le antiche, le nuove indagini sono di quelle che è impossibile riassumere; ci limitiamo pertanto alla seguente notizia. Quando un' equazione algebrica ad un' incognita $f(z)=0$ non possiede alcuna radice (reale o complessa) razionale, in generale ad essa non si può soddisfare che adoperando un procedimento di approssimazione continua illimitata; laonde dimostrare il teorema fondamentale dell' algebra non può significare altro che scoprire un modo per determinare successivamente dei valori razionali di $z=x+iy$ che rendano $|f(z)|$, funzione continua e sempre positiva delle variabili reali x e y, minore di qualsia numero positivo dato; e (supposto ancora che $f(z)$ e $f'(z)$ siano funzioni fra loro prime) a tale scopo è sufficiente sapere determinare, mediante un numero finito di tentativi, un valore a partir dal quale la notissima regola di NEWTON rappresenti un vero metodo di approssimazione. Gli è quello in cui mirano ed a cui giungono le argomentazioni del MERTENS.

Mi sia lecito di lamentare da ultimo che anche nel più pregevole trattato d'algebra che — per quanto a me consta — vide la luce in questi ultimi tempi,[8] il teorema fondamentale venga dimostrato con qual ragionamento incompleto,[9] che è oggi a cognizione di tutti per opera del *Cours d'algèbre supérieure* di J. A. SERRET.

[1] A. FAVARO, *Sulla Bibliotheca mathematica di Gustavo Eneström.* Atti del r. istituto Veneto **3**$_7$, 1892, p. 643.

[2] Atti dell' i. r. Istituto Veneto **10**$_3$, 1865, p. 136—137.

[3] I numeri in parentesi servono di richiami all' Elenco con cui si chiude il mio articolo precitato.

[4] Memorie dell' i. r. Istituto Veneto **4**, 1852, p. 263.

[5] Escludo quelle di E. AMIGUES e P. MANSION di cui fa cenno il T. XXII (p. 107) del Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.

[6] Furono annunziate all' Accademia di Berlino nel 1859 (v. Monatsberichte p. 758) e di nuovo nel 1868 (v. Monatsberichte p. 428); vennero ad essa poi presentate il 21 Febbrajo 1889 ed inserite nel resoconto della seduta del 17 Dicembre 1891, sotto il titolo *Neuer Beweis des Satzes*

dass jede ganze rationale Function einer Veränderlichen dargestellt werden kann als ein Product aus linearen Functionen derselben Veränderlichen.

[7] *Der Fundamentalsatz der Algebra.* Sitzungsberichte der k. Akad. d. Wiss. in Wien (Math.-naturv. Classe) **101**, 1892, p. 415—424; e Monatshefte für Mathem. und Phys. (Wien) **3**, 1892, p. 293—308.

[8] G. CHRYSTAL, *Algebra, an elementary text-book.* Part I. Second Edition. Edinburgh 1889.

[9] Cfr. Bibliotheca Mathematica 1891, p. 101.

Mathematische Werke in hebräischen Übersetzungen.

Notiz von M. STEINSCHNEIDER in Berlin.

Ich beabsichtige in dieser Zeitschrift eine chronologische Übersicht der mathematischen Studien der Juden seit dem 10. Jahrhundert zu geben; einen wichtigen *Teil* der betreffenden Literatur bilden hebräische *Übersetzungen* aus verschiedenen Sprachen, welche ich in einer Monographie behandelt habe. Da ich auf letztere öfter werde Bezug nehmen müssen, so mag die nachfolgende Notiz darüber als *Vorläufer* der, im nächsten Hefte beginnenden Übersicht angesehen werden.

Im Jahre 1880 stellte die »Académie française» als Preisaufgabe eine vollständige Bibliographie der hebräischen Übersetzungen des Mittelalters ohne Unterschied des Inhaltes und der Sprache der Originale. Mein Memoire in französicher Sprache hatte das Glück, im Jahre 1884 den Preis zu erlangen. Es sind darin nicht bloss die Übersetzungen, sondern auch die Commentare und Compendien etc. erschöpfend behandelt. Ich habe es vorgezogen, meine Untersuchungen in deutscher Sprache zu veröffentlichen, und das betreffende Werk ist so weit gediehen, dass die 8 Register, welche die Titel, die Namen und Sachen und die angeführten Handschriften umfassen, auf Seite 1086 abschliessen. Wenn diese Zeilen in die Hände der Leser gelangen, ist auch die kurze Vorrede abgedruckt, und das fertige Werk in 2 Bänden erschienen.* Wenn auch anzunehmen ist, dass diejenigen Gelehrten welche sich mit Geschichte der Mathematik beschäftigen, bei dem Zusammenhange der Geschichte der Wissenschaften überhaupt, sich für verschiedene Partien des Werkes interessiren könnten, welches nicht bloss die hebräischen Übersetzungen vollständig aufzählt, sondern auch die Autoren und Werke selbst zum Gegenstand der Forschung macht; so scheint es mir doch aus dem oben angegebenen Grunde angemessen, die Leser der Bibliotheca Mathematica durch die folgenden Zeilen mit dem Inhalte des Abschnittes »Mathematik» (S. 501—650) genauer bekannt zu machen.

* Das Werk (in 300 Exemplaren gedruckt) ist, zum Preise von 30 Mk. direct von dem Bibliographischen Bureau in Berlin oder durch jede Buchhandlung zu beziehen. Um das Publikum in Stand zu setzen, den Inhalt und Umfang des Werkes zu beurtheilen, habe ich von der speciellen »Übersicht» eine Anzahl von Exemplaren, gewissermassen als Prospect, drucken lassen, welcher auf Verlangen gratis zu beziehen ist.

Im Allgemeinen sei bemerkt, dass das Werk in 5 Abschnitte zerfällt; vorangeht: »Allgemeines» (Encyklopaedik und dergl.). Abschn. I: Philosophie; II: Mathematik; III: Medicin; IV: Verschiedenes; V: die Juden als Dolmetscher. Jeder der Abschnitte I—IV zerfällt in IV Kapitel: Griechen, Araber, Juden, Christen; die Paragraphen laufen von 1—590 fort; jeder Artikel beginnt mit Angaben über Zeit und Vaterland des Verfassers unter Anführung der besten Quellen. Die hebräischen Übersetzungen, welche nicht direct aus den Originalen geflossen sind, werden auf ihre Mittelquelle zurückgeführt. Es handelt sich überwiegend um mss., welche vollständig aufgezählt sind.

Der Abschnitt Mathematik beginnt mit Vorbemerkungen zu Kapitel I: Griechen § 309. Es folgen (in alphabetischer Reihe) ARCHIMEDES, von der Sphäre und dem Cylinder, *de mensura circuli* § 310. AUTOLYKOS, von der Sphäre in Bewegung 311. EUKLID, Elemente 312—313, arabische und andere Commentare 314; *Data,* Optik, Buch der Spiegel 316. EUTOCIUS, Commentar zu ARCHIMEDES 317. HERMES, über die Fixsterne 318. MENELAOS, *Sphaerica* 319. NIKOMACHOS, Arithmetik 320. PTOLOMÄUS, 321; *Almagest* 322—324, *Quadripartitum* 325, *Centiloquium* 326—328, *Planisphaerium* 329, 330, Astrolab 331, 332, Hypothesen 333. Einleitung (GEMINUS) 334, Verschiedenes 335. THEODOSIUS, *Sphaerica* 336.

II. Kapitel: Araber. IBN AFLA'H, Astronomie 337, Sector des MENELAOS 338. ALBUBATER 339. AVERROËS, kurzer *Almagest* 340. BATTANI, Astronomie 340ᵇ. BITRODJI, Astronomie 341. COSTA BEN LUCA, *Globus* 342. FERGANI, Astronomie 343, Compendien und Commentare 344. AL-'HASSAR, Rechenkunst 345. IBN AL-HEITHAM, *de Imaginibus* 346, Astronomie 347—349. KABISI (ALCABITIUS), Astrologie 350. AL-KINDI, Nativitäten, Regen, Ursachen des Regens 351. KUSCHJAR, Tabellen 352. ABU MA'ASCHAR, Einleitung in die Astrologie 353—354. AL-MATANI (MUTHANNA), Gründe der Tafeln des KHOWAREZMI 356. IBN MU'ADS, Sonnenfinsternisse, Morgenröte 357. MUHAMMED BEN MUHAMMED, Bogenquadrant 358. OMAR BEN MUHAMMED, Astronomisches Compendium 359. IBN ABI'L RIDJAL, Astrologie 360—361. IBN AL-SAFFAR, Astrolab 362. IBN AL-'SAM'H, Cylinder und Kegel 363. SCHODJA, Algebra 364—367. THABIT BEN KORRA, *Figura sector* 368. ZARKALI, *Safi'ha* (Scheibe) 369—371. — Anonyme Schriften 372, 373.

III. Kapitel: Juden. JAKOB AL-CORSONO, Astrolab; JOSEF ISRAELI, Compendium der Astronomie seines Vaters 374. JOSEF IBN NA'HMIAS, Licht der Welt (Astronomie) 375. JOSEF IBN

WAKKAR, astronomische Tabellen 376. MAIMONIDES, Chronologie 377. MASCHALLAH 378, astrologische Fragen, Eklipsen 379. SAHL BEN BISCHR 380—381, astrologische Urteile 382. — Anhang: JAKOB BEN MACHIR (PROPHATIUS), *Quadrans novus* 383—386. JAKOB POËL, astronomische Tafeln 387.

IV. Kapitel: Christen. ALFONS X, astronomische Tafeln 388. (St. ARCHANGEL 389). ALFONSO, Quadratur des Zirkels 391. BARTOLOMEO DEI MANFREDI, Celidario 392. BIANCHINI, *Tabularum canones* 393, 394. CHRYSOCOCCA, persische Tafeln 395, 396. DARDI aus Pisa,[1] 194 Probleme aus den Beziehungen der 5 numerischen Quantitäten 397. GERARD VON SABBIONETTA 398, *Theorica planetarum* 399. HERMANNUS CONTRACTUS, *de mensura astrolabii* 400. JOHANNES VON GMUND, Aspecte der Sterne 401. JOHANNES DE SAXONIA, *Canones, Mutatio aëris* (?) 402. LUCA PACIUOLO, *Summa de Arithmetica* etc. 403. PEDRO IV, astronomische Tafeln 404. ALESS. PICCOLOMINI, *La spera del mondo, theoriche* 404^b. PURBACH, *Theorica planetarum* 405. REGIOMONTANUS, Ephemeriden 406. SACROBOSCO, *Sphaera mundi* 407—411. — Anonyme Schriften: Pariser Tafeln, Quadrant, Eklipsen, geometrische Probleme, astrologisches Fragment 412.

Von der gesammten hier behandelten Literatur ist fast gar Nichts gedruckt. Zwei Übersetzungen von SACROBOSCO's *Sphaera* erschienen Offenbach 1720, 4°, eine Abhandlung über den jüdischen Kalender von MAIMONIDES, aus dem Arabischen, Frankfurt a. M. 1849 (näheres im *Catal. Bodl.* p. 2254 und 1917). Hingegen sind *Hunderte* von Mss. in aller Welt zerstreut, deren bekannte Beschreibungen vielfach einer kritischen Zurechtstellung bedurften.

[1] Über diesen Autor (ms. Paris 1029) habe ich keine Nachricht auffinden können.

Sopra un codice ebraico contenente alcuni scritti matematici ed astronomici.

Nota di P. RICCARDI a Modena.

Nelle mie indagini intorno ai codici Euclidei mi è occorso di consultare un codice miscellaneo di proprietà privata, il quale per la sua importanza merita una particolareggiata descrizione.

Esso consta di un volume rilegato in cartapecora, delle dimensioni nei fogli di milimetri 245 × 182, composto di 147 carte in 4°; cioè car. numerate 1, ..., 66, due car. senza numeri, car. 77 numerate 67, ..., 143, e due car. bianche nel fine, senza numerazione. Le car. 1ª, 8ª e 9ª, 16ª e 17ª, 25ª e 26ª, 34ª e 35ª, 42ª e 43ª, 50ª e 51ª, 58ª e 59ª, 66ª, 67ª, 68ª e 69ª, 76ª e 77ª, 84ª e 85ª, 92ª e 93ª, 100ª e 101ª, 109ª e 110ª, 118ª e 119ª, 126ª e 127ª, 134ª e 135ª, 142ª e 143ª sono membranacee e le altre tutte bombicine con marca di fabbrica.

È scritto in carattere ebraico nitidissimo, quasi uniforme e presumibilmente della stessa mano; ed è corredato di figure geometriche ed astronomiche ben disegnate, interposte al testo. Come ammanuense vi è indicato MORDECHAI FINZI da Mantova, il quale afferma di averlo trascritto nel periodo dal 1441 al 1456.[1]

Contiene i seguenti scritti.

I. Da car. num. 1 *verso* a car. 67 *v*°. I primi sette libri degli Elementi di EUCLIDE tradotti dall' arabo in ebraico dal Rabbino JAHAKOV BEN MACHIR, nato a Cordova verso la fine del secolo XII, ed appartenente alla celebre famiglia dei Tibboniadi, valenti volgarizzatori di opere arabe.[2]

Al testo dei primi libri degli Elementi, preceduto da una breve prefazione del traduttore, sono intercalate le figure geometriche rispondenti al testo Euclideo secondo la versione dall' arabo attribuita al CAMPANO.

II. Da car. 68 *recto* a car. 83 *verso:*

L'astrolabio di ABRAHAM ABEN EZRA.

In una nota illustrativa dell' ammanuense si legge: »Tutto questo è detto in modo approssimativo; ed eccoti un' altra lezione sullo stesso soggetto, tratta da un' altra spiegazione dell' astrolabio fatta dal dotto Rabbino ABRAHAM ABEN-EZRA, nell' anno 4906» (dell' era ebraica, corrispondente al 1146 dell' era volgare).

Vi sono intercalate alcune altre note dell' ammanuense, precedute sempre dalla locuzione: »Dice MORDECHAI FINZI ec.»

Nell' ultima di queste note si legge: »Quì finisce la spiegazione dell' astrolabio del dotto Rabbino ABRAHAM ABEN-EZRA del suo secondo esemplare».

Segue nel fine una nota del figlio del traduttore, sul modo di determinare le distanze e le altitudini, preceduta dalle parole dell' ammanuense: »Dice EMANUEL figlio di JAHAKOV ec.»

III. Da car. 84 *recto* a car. 104 *recto*. L'astrolabio di TOLOMEO.

a) Indice dei 40 capitoli componenti l'opera di TOLOMEO sugli strumenti (sic) dell' Astrolabio.

Nel fine dell' indice trovasi la nota dell' ammanuense: »Quì finisce la descrizione dell' astrolabio, tradotta dall' arabo in ebraico dal dotto Rabbino JAHAKOV figlio del dotto stimato Rabbino MACHIR di felice memoria.»

b) Modo di costruire l'astrolabio secondo il sistema di TOLOMEO (ricavato dal libro sui sette climi dello stesso astronomo).

L'ammanuense intercala al testo del summenzionato trattato (car. 97 *v*°—100 *r*°) parecchie sue note illustrative, facendole precedere dalla solita locuzione: »Dice MORDECHAI FINZI ec.»

A car. 99 *v*° trovasi la figura dell' astrolabio ben disegnata.

In altra notarella, scritta in carattere più minuto, si legge: »L'ho scritto io (intendasi il codice) MORDECHAI FINZI e l'ho corretto tutto, meno l'ultimo capitolo, nel mese di Scevat [Gennajo-Febbrajo] anno 201» [cioè 5201 dell' era ebraica, corrispondente all' anno 1441 dell' e. v.].

IV. Da car. 104 *v*° a car. 123 *v*°. Epistola sul modo di costruire la tavola detta *Zeppichà*, di ABU ISAC IBN ALZRACALA.[8]

Indice dei capitoli del trattato, cui fa seguito la nota dell' ammanuense: »Prima di cominciare a spiegare i summenzionati capitoli parve bene a me, MORDECHAI FINZI, di descrivere la tavola che vi va unita, e di chiarirla secondo mi venne fatto di comprendere dalle spiegazioni avute oralmente dal dotto maestro BARTOLOMEO DALL' OROLOGIO, abitante quì in Mantova, da me consultato e che mi fu largo di aiuto.»

Nel margine poi della pagina num. 105 *v*° si trova una nota del traduttore, scritta in carattere minutissimo, nella quale dà la descrizione della tavola *Zeppichà*.

V. Da car. 124 *r*° a car. 142 *r*°. Trattato della sfera celeste composto da COSTA figlio di LUCA, per HASMON ABDALAH IBN JACHIA.

Prefazione, indice dei 65 capitoli dei quali si compone il trattato, e nel fine del trattato la nota: »E finito il trattato della composizione della sfera celeste di Costa figlio di Luca. Lo tradusse il dotto Rabbino Jahakov, figlio di Machir, figlio di Tibbon. La traduzione fu terminata nell' anno 5016 della creazione» (corrispondente al 1256 dell' e. v.).

Segue nel fine la nota dell' ammanuense:

»Terminai di scriverlo io Mordechai Finzi, oggi mercoledì 10 Agosto 5216 della creazione (an. 1456 dell' e. v.) quì in Mantova, ed è libro assai corretto».

VI. Da car. 139 *v*° a car. 141 *v*°.

Modo di costruire il Mappamondo. (Anonimo).

VII. Da car. 142 *r*° a car. 143 *r*°.

Modo di costruire la meridiana. (Anonimo).

Da quanto ho esposto si comprende che Mordechai Finzi, cui è dovuta la trascrizione del codice, non era solo un accurato scrivano, ma un istruito ammanuense e conscienzioso postillatore; e che a vantaggio della storia della scienza codesto codice, tradotto in lingua più conosciuta, forse meriterebbe di essere pubblicato.

[1] Debbo alla cortesia del dotto sig[r] Salomone Jona, Rabbino maggiore in Modena, la traduzione italiana degli squarci del testo che mi occorrevano per compilare questa recensione.

[2] V. nel catalogo del Pasini: *Codices manuscripti bibl. R. Taurinensis* ec. (Taurini, 1749, T. I, p. 3, col. 1ª, e p. 25 col. 2ª) la descrizione di preziosi codici ebraici degli Elementi di Euclide tradotti dall' arabo da Mose figlio del R. Samuele, figlio di Giuda, figlio di Tibbon. E similmente si consulti il catalogo degli Assemani: *Codices manuscripti biblioth. apost. vaticanae* (Romae 1756). Cfr. cod. CCXC, CCCXXXVIII, e CCCC.

[3] Nel British Museum esiste un ms. di Abu Ishac Ibrahim ibn al Zarcilah al Tulaitili, intitolato: *Liber operationis per planam tabulam astronomicam, compositam ad dispositionem siderum et inveniendam aequationem prout figura celestis postulet.* Cfr. Houzeau et Lancaster, *Bibliographie générale de l'astronomie,* t. I, par. I, p. 475.

RECENSIONEN. — ANALYSES.

A. Rebière. MATHÉMATIQUES ET MATHÉMATICIENS. PENSÉES ET CURIOSITÉS. Deuxième édition, revue et augmentée. Paris, Nony 1893. 8°, 4 + II + 566 p.

Ce livre se compose de quatre parties, dont la première se rapporte à la philosophie et à l'histoire des mathématiques, la deuxième contient des variétés et des anecdotes sur les mathématiciens, et la troisième est un recueil de paradoxes et de singularités mathématiques; dans la quatrième partie l'auteur a réuni un certain nombre de problèmes curieux, et à la fin il donne une liste bibliographique d'ouvrages sur la philosophie, l'histoire, les applications, l'enseignement et les curiosités des mathématiques.

Dans un journal consacré à l'histoire des mathématiques, le livre de M. REBIÈRE peut être mentionné pour deux raisons. D'une part, il contient, outre une esquisse de l'histoire des mathématiques, beaucoup de notices détachées sur le même sujet; d'autre part, on y trouve un recueil de matériaux pour l'histoire des opinions sur les mathématiques.

Quant à l'esquisse de l'histoire des mathématiques, elle n'embrasse que six pages (p. 119—124); l'auteur y a divisé le développement des mathématiques en sept périodes qu'il caractérise succinctement, et il ajoute quelques mots sur chacun des mathématiciens suivants: THALES, PYTHAGORAS, PLATON, EUKLIDES, ARCHIMEDES, APOLLONIOS, HIPPARCHOS, PTOLEMÆUS, DIOFANTOS, PAPPOS, GERBERT, LEONARDO PISANO, LUCAS PACIOLI, COPERNICUS, CARDANO, VIÈTE, NEPER, HARRIOT, GALILEI, KEPLER, DESCARTES, FERMAT, PASCAL, HUYGENS, NEWTON, LEIBNIZ, EULER, D'ALEMBERT, LAGRANGE, MONGE, LAPLACE, CARNOT, GAUSS, PONCELET, CAUCHY, JACOBI, CHASLES. Les indications sont parfois un peu superficielles; en voici deux exemples: »DIOPHANTE (350 ans ap. J.-C.) surnommé le Père de l'algèbre, crée enfin cette nouvelle branche dans ses *Arithmétiques*«; ... »MONGE (1746—1818) fonde la géométrie descriptive, si utile aux ingénieurs«.

Parmi les nombreuses notices historiques disséminées dans le livre de M. REBIÈRE, nous nous permettons d'indiquer ci-dessous quelques-unes qui méritent d'être complétées ou corrigées pour une troisième édition.

P. 124, 130. CHASLES est mort le 18 déc. 1880 (non 1876).

P. 140. L'auteur comprend l'*Histoire des sciences mathématiques* de M. MARIE parmi les ouvrages les plus importants

et les plus remarquables; cette indication aura peut-être besoin d'être un peu modifiée.

P. 142. M. REBIÈRE mentionne les principaux journaux mathématiques publiés actuellement en France; il serait à propos de donner aussi une liste des principaux journaux mathématiques étrangers.

P. 273—275. La liste des mathématiciennes décédées peut être complétée par les noms MARIA CUNITZ (mort en 1664) et MARIA MITCHELL (1818—1889), professeur d'astronomie à Vassar College (New York, U. S. A.). Parmi les nombreuses mathématiciennes vivantes, il convient de signaler aussi CHARLOTTE ANGAS SCOTT, professeur à Bryn Mawr College (Pennsylvania, U. S. A.).

P. 301. Le premier traité d'arithmétique qui a été imprimé n'est pas celui de BORGO (Venezia 1484), comme l'indique M. REBIÈRE. En effet on connaît un traité d'arithmétique imprimé à Treviso en 1478, et deux traités parus à Bamberg respectivement en 1482 et en 1483.

P. 319. La notice sur les dimensions de la grande pyramide, probablement tirée de l'ouvrage connu de PIAZZI-SMYTH, n'a guère de fondement réel.

P. 416. L'auteur dit: »FERMAT affirme, sans démonstration, qu'au-dessus du cube, la somme des puissances semblables de deux nombres n'est jamais la puissance semblable d'un troisième nombre«. Ici il faut mettre *carré* au lieu de *cube;* FERMAT savait très bien que l'équation $x^n + y^n = z^n$ est impossible pour $n = 3$.

P. 443. Parmi les savants qui ont fait des recherches sur les propriétés géométriques des alvéoles des abeilles, on peut signaler aussi F. W. HULTMAN (1868), K. MÜLLENHOFF (1883) et H. HENNESSY (1885).

Nous avons déjà fait observer que le livre de M. REBIÈRE, contient des matériaux pour l'histoire des opinions sur les mathématiques. En effet, l'auteur a réuni un grand nombre de citations empruntées non seulement aux mathématiciens, mais aussi aux poètes, aux philosophes, aux hommes politiques aux orateurs sacrés, etc., et se rapportant toutes aux mathématiques. Ces citations ne sont pas toujours flatteuses; écoutons par exemple ce que dit CONDILLAC (p. 351): »Le géomètre avance de supposition en supposition, et retournant sa pensée sous mille formes, c'est en répétant sans cesse *le même est le même,* qu'il opère tous ses prodiges.« Ce jugement peu favorable me rappelle quelques mots de l'amiral JURIEN DE LA GRAVIÈRE,

non cités par M. REBIÈRE, et que je me permets de rapporter ci-dessous:

> Les géomètres ont, plus que d'autres, besoin d'être jugés par leurs pairs: la géométrie, en effet, est un arcane. Elle tient ses assises à part, décerne ses prix sans phrase et, contemplant avec une juste fierté l'univers soumis en ses plus intimes profondeurs aux lois dont elle a saisi l'enchaînement, se refugie, calme et impossible, dans sa royauté silencieuse. C'est bien une royauté, en effet, et une royauté absolue qu'exerce cette science maîtresse qui ne connaît pas le doute comme ses soeurs et n'a jamais, depuis le temps d'EUCLIDE, bâti sur le sable. Ajoutous que, par son exemple, la géométrie a influé sur la direction imprimée à toutes les branches des connaissances humaines. (Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **101**, 1885, p. 1307.)

La lecture des aphorismes sur les mathématiques reproduits par M. REBIÈRE est souvent très instructive; en les comparant on trouve parfois la même pensée exprimée par plusieurs personnes. On pourrait donc se proposer comme un problème historique d'étudier le développement d'une certaine pensée à travers les âges. Prenons pour exemple la sentence de M[me] DE STAËL (p. 162): »Rien n'est moins applicable à la vie qu'un raisonnement mathématique«. Sans doute cette pensée a été rendue un très grand nombre de fois depuis l'antiquité jusqu'à nos jours; en voici la dernière forme que je connaisse: »Les mathématiques donneront une fausse précision, une rigeur apparente, qui masque la faiblesse des raisonnements, une raideur inflexible qui multiplie les erreurs, les rend irréparables, et empêche la juste notion des choses. Helas! qu'il y a peu de mathématiques dans les choses de la vie: elles sont complexes, changeantes, faites de finesses, de sous-entendus, de détails, et impossibles à exprimer par une formule« (voir l'article de M. CHANDOS: *A propos de l'école polytechnique;* Revue scientifique **39**, 1887, p. 563).

La classification des morceaux choisis par M REBIÈRE n'est pas toujours satisfaisante. Dans la préface à la nouvelle édition il dit que les sujets analogues y ont été mieux groupés et réliés que dans la première édition, mais sans doute il reste encore des améliorations à faire à ce point de vue. Ainsi le problème des parapluies rapporté aux pages 401—402 est au fond identique avec le problème sur les chameaux à la page 482, et la démonstration de NICOLE, qu'il y a sur le globe au

moins deux hommes ayant le même nombre de cheveux, est mentionnée deux fois (p. 233—234, p. 482—483).

Afin que les lecteurs puissent retrouver sans difficulté les différents sujets traités dans le livre, M. REBIÈRE y a ajouté, outre la table des matières, un index ou table alphabétique comprenant les noms de choses et ceux de personnes.

Par ce qui précède, on voit que l'ouvrage dont nous avons rendu compte contient beaucoup qui puisse intéresser vivement les étudiants de l'histoire des mathématiques, et pour cette raison nous nous permettons de le recommander aux lecteurs de la Bibliotheca Mathematica.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von || journal d'histoire des mathématiques publié par G. ENESTRÖM. Stockholm. 8°.
1893: 1.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von M. CANTOR. Leipzig. 8°.
38 (1893): 3.

Ball, W. W. R., A short account of the history of mathematics. Second edition. London, Macmillan 1893.
8°, XXIV + 520 p. — [10 sh.]

Besthorn, R. O. et Heiberg, J. L., Codex Leidensis 399, 1. Euclidis Elementa ex interpretatione Al-Hadschdschadschii cum commentariis Al-Narizii. Arabice et latine ediderunt notisque instruxerunt. I: 1. Hauniæ 1893.
8°, (4) + 88 p.

Bobynin, V., Sur la propagation des signes numériques cunéiformes.
Biblioth. Mathem. 1893, 18—20.

Cantor, M., Ein historischer Papyrus in griechischer Sprache.
Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 81—87. — Sur le papyrus d'Akhmîm.

Craig, T., Some of the developments in the theory of ordinary differential equations between 1878 and 1893.
New York, Mathem. soc., Bulletin **2**, 1893, 119—134.

Dickstein, S., Sur les découvertes mathématiques de Wronski.
Biblioth. Mathem. 1893, 9—14.

Echols, W. H., Wronski's expansion.
New York, Mathem. soc., Bulletin **2**, 1893, 178—184. — Sur la loi suprême de WRONSKI.

El »Tratado sobre los cuerpos flottantes« de Arquímedes.
La controversia (Madrid) **7**, 1893, 280.

Favaro, A., Intorno ad una pretesa seconda edizione dell' Algebra di Rafael Bombelli.
Biblioth. Mathem. 1893, 15—17.

Favaro, A., Serie ottava di scampoli Galileiani.
Padova, Accad. d. sc., Atti e memorie **9**, 1893, 9—48.

Favaro, A., Sopra un capitolo attribuito a Galileo Galilei.
Venezia, Istituto Veneto, Atti $\mathbf{4}_7$, 1893, 725—730.

Favaro, A., Gli oppositori di Galileo. II. Liberto Froidemont.
Venezia, Istituto Veneto, Atti $\mathbf{4}_7$, 1893, 731—745.

Gebbia, M., Guiseppe Albeggiani.
Palermo, Circolo matem., Rendiconti **7**, 1893, 39—47. — Nécrologie.

°**Gerland, E.**, Geschichte der Physik. Leipzig 1892.
8°, 356 p. — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 62. (CANTOR.)

Gram, J. P., Essai sur la restitution du calcul de Léonard de Pise sur l'équation $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$.
| *Kjöbenhavn*, Vidensk. Selskab, Oversigt 1893. 11 p.

Homén, Th., Galileo Galilei.
Finsk tidskrift (Helsingfors) **34**, 1893, 81—102.

Hyde, E. W., The evolution of algebra.
American association, Proceedings 1891, 51—65.

Index du répertoire bibliographique des sciences mathématiques, publié par la commission permanente du répertoire. Paris, Gauthier-Villars 1893.
8°, XIV + 80 p. — [2 fr.]

Loria, G., L'odierno indirizzo e gli attuali problemi della storia delle scienze esatte. Relazione fatta al quinto congresso storico italiano addì 22 settembre 1892. Genova 1893.
8°, 17 p.

Loria, G., Della varia fortuna di Euclide in relazione con i problemi dell' insegnamento geometrico elementare.
Periodico di matem. **8**, 1893, 81—113.

Loria, G., Intorno a la vita e le opere di Gaetano Giorgini.
| Giornale di matem. **31**, 1893. 8 p.

Macfarlane, A., The imaginary of algebra.
American association, Proceedings 1892, 33—55. — Mémoire en grande partie historique.

Mackay, J. S., Matthew Stewart's theorem.
Edinburgh, Mathem. soc., Proceedings **10**, 1892, 90—94. — [Résumé:] Mathesis $\mathbf{3}_2$, 1893, 63—64.

Mansion, P., Notice sur les travaux scientifiques de Louis-Philippe Gilbert. Paris, Gauthier-Villars 1893.
8°, 86 p. + portr.

Mc Clintock, E., On the early history of the non-euclidian geometry.
New York, Mathem. soc., Bulletin **2**, 1893, 144—147.

Meyer, F., Bericht über den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie.
Deutsche Mathematiker-Vereinigung, Jahresbericht **1**, 1892, 79—289.

ПЕРГАМЕНТЪ, О., Галилео Галилей, его жизнъ и научная дѣятельностъ.
Vjestnik elem. matem. **13**, 1893, 217—222, 248—254. — PERGAMENT, O., GALILEO GALILEI, sa vie et son action scientifique. (Fin.)

Pressland, A. J., On the history and degree of certain geometrical approximations.
Edinburgh, Mathem. soc., Proceedings **10**, 1892, 23—34.

Rebière, A., Mathématiques et mathématiciens. Pensées et curiosités. Deuxième édition, revue et augmentée. Paris, Nony 1893.
8°, (4) + II + 566 p. — [5 fr.]

Reyes Prosper, V., La lógica simbolica en Italia.
El progreso matem. **3**, 1893, 41—42.

СУВОРОВЪ, Ѳ. М., В. Г. Имшенецкій.
Kazan, Fiz.-matem. obchtch., Izviestia $\mathbf{2}_2$, 1892, B: 15—18. — SOUVOROFF, TH. M., V. G. Imchenetskij. (Nécrologie.)

Sturm, R., Heinrich Schröter.
| Chronik der Universität zu Breslau für 1891—92. 10 p. — Nécrologie.

Suter, H., Zur Geschichte der Trigonometrie.
Biblioth. Mathem. 1893, 1—8.

Tannery, P., La correspondance de Descartes dans les inédits du fonds Libri étudiée pour l'histoire des mathématiques. Paris, Gauthier-Villars 1893.
8°, VII + 94 + (1) p. — [2 fr.] — Réimpression d'une série d'articles publiés dans le Bulletin des sciences mathématiques $\mathbf{15}_2$ (1891) et $\mathbf{16}_2$ (1892).

Tannery, P., Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne.
Bordeaux, Soc. d. sc., Mémoires $\mathbf{1}_4$, 1893. VIII + 370 p.

°**Théon de Smyrne**, Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon, traduite pour la première fois du grec en français par J. DUPUIS. Paris, Hachette 1892.
8°, 28 + 404 p. — [7·50 fr.]

Weissenborn, H., Über den von Gerbert angeführten Joseph Sapiens oder Joseph Ispanus.
Biblioth. Mathem. 1893, 21—23.

Zanotti Bianco, O., Sulla scoperta del potenziale.
Rivista di matem. **3**, 1893, 56—60. — [Résumé:] Nature (London) **47**, 1893, 510. — [Remarque:] Nature (London) **47**, 1893, 510. (E. J. ROUTH.)

Zeuthen, H. G., Note sur l'histoire des mathématiques.
| *Kjöbenhavn,* Vidensk. Selskab, Oversigt 1893. 17 p.

Question 41 [sur une récréation mathématique].
Biblioth. Mathem. 1893, 31—32. (G. ENESTRÖM.)

DIOPHANTI ALEXANDRINI Opera omnia cum graecis commentariis. Edidit et latine interpretatus est P. TANNERY. Volumen I. DIOPHANTI quae exstant omnia continens. Leipzig, Teubner 1893. 8°.
Biblioth. Mathem. 1893, 24—25. (G. ENESTRÖM.)

MUIR, TH., The theory of determinants in the historical order of its development. Part I. Determinants in general. London, Macmillan 1890. 8°.
Nature **45**, 1892, 481—482. (P. A. M.)

MÜLLER, F., Zeittafeln zur Geschichte der Mathematik, Physik und Astronomie bis zum Jahre 1500, mit Hinweis auf die Quellen-Literatur. Leipzig, Teubner 1892. 8°.
Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 63—64. (CANTOR.) — Mathesis 3_2, 1893, 66.

Revue semestrielle des publications mathématiques rédigée sous les auspices de la société mathématique d'Amsterdam. I: 1. Amsterdam 1893. 8°.
Biblioth. Mathem. 1893, 25—27. (G. ENESTRÖM.) — Mathesis 3_2, 1893, 92. (P. M. et J. N.) — *New York,* Mathem. soc., Bulletin **2**, 1893, 190—192. (A. ZIWET.) — *Venezia,* Istituto Veneto, Atti 4_7, 1893, 829—837. (A. FAVARO.)

RUDIO, F., Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung. Deutsch herausgegeben und mit einer Übersicht über die Geschichte des Problems von der Quadratur des Zirkels von den ältesten Zeiten bis auf unsere Tage versehen. Leipzig, Teubner 1892. 8°.
Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 64—65. (CANTOR.)

WEISSENBORN, H., Zur Geschichte der Einführung der jetzigen Ziffern in Europa durch Gerbert. Eine Studie. Berlin, Mayer & Müller 1892. 8°.
Bullet. des sc. mathém. 17_2, 1893, 47—50. (P. TANNERY.)

[Listes d'ouvrages récemment publiés.]
Biblioth. Mathem. 1893, 28—31. — Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 79—80, 119—120.

Osservazione intorno alla nota del prof. A. Favaro sull' Algebra del Bombelli.

A rettificazione di quanto afferma l'egregio mio collega ed amico prof. FAVARO (Biblioth. mathem. 1893, p. 15) intorno alla mia opinione che le due pubblicazioni dell' *Algebra* del BOMBELLI fatte nel 1572 e 1579 costituissero due distinte edizioni dell' opera stessa, faccio osservare che al seguito di quanto ne scrisse il GHERARDI espressi già nell' *Appendice* (serie II, col. 96) della mia *Biblioteca matematica italiana* l'avviso che gli esemplari della pretesa 2ª edizione non siano che copie della 1ª, alle quali venne sostituito il frontispizio con la data posteriore e la dedicatoria. (P. Riccardi.)

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

42. Plusieurs auteurs ont proposé, pour l'ajustement d'une série de valeurs observées, la formule

$$u'_x = \frac{17}{35} u_x + \frac{12}{35}(u_{x+1} + u_{x-1}) - \frac{3}{35}(u_{x+2} + u_{x-2})$$
$$= u_x - \frac{3}{35} \Delta^4 u_{x-2},$$

où u_{x-2}, u_{x-1}, u_x, u_{x+1}, u_{x+2}, sont cinq termes successifs de la série, et u'_x est la valeur ajustée de u_x. On demande une notice historique, aussi complète que possible, sur cette formule. (G. Eneström.)

Inhalt. — Table des matières.

STOCKHOLM, TRYCKT I CENTRAL-TRYCKERIET, 1893.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK — HERAUSGEGEBEN VON

JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES — PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1893. STOCKHOLM. N° 3.

NEUE FOLGE. 7. BERLIN. MAYER & MÜLLER. Markgrafenstrasse 51.

Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr.

NOUVELLE SÉRIE. 7. PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Die Mathematik bei den Juden.

Von MORITZ STEINSCHNEIDER in Berlin.

1. Allgemeines.

Als ich in den Jahren 1844—1847 die Materialien für den Artikel »Jüdische Literatur» in der *Realencyclopädie* von ERSCH und GRUBER sammelte, fand ich für Mathematische Wissenschaften (§ 20 u. 30) keinerlei Hilfsmittel von einigem Belang. Nur Einzelnes konnte ich in der englischen Übersetzung (*Jewish Literature,* London 1857; der ungenannte Übersetzer ist WILLIAM SPOTTISWOODE) aus bodleianischen Büchern und Manuscripten berichtigen oder hinzufügen. Seit jener Zeit sind wenige hiehergehörende Abhandlungen und Notizen erschienen: im Ganzen fehlt es noch an einer Monographie eines Fachmannes für das bedeutende Material. Allerdings müsste der Bearbeiter einer solchen auseinanderliegende Kenntnisse und Mittel vereinigen. Die betreffende Literatur umfasst Schriften in orientalischen und occidentalischen Sprachen, liegt meistens in Handschriften, grossenteils in Übersetzungen, die eventuell mit Rücksicht auf ihre Originale zu prüfen und zu beurteilen sind. Welche Aussicht auf Veröffentlichung und Verbreitung ermutigt zu einer solchen anstrengenden, langwierigen Arbeit? Und doch ist sie ein wohlbegründetes Desideratum; das lehren uns die Resultate ausgeführter Untersuchungen, wie zum Beispiel betreffs der Übersetzungen (vergl. Biblioth. Mathem. 1893, S. 51).

»Wenn du die Arbeit nicht ausführen kannst, so ist das kein Grund, dich ihr gänzlich zu entziehen», lehrt der Talmud. So erachte ich es, ohne Fachkenner zu sein, für meine Aufgabe, meine Aufzeichnungen im Laufe eines halben Jahrhunderts in chronologischer Ordnung als Material für fachmännische Bearbeitung niederzulegen. Sie betreffen hauptsächlich die Kenntnis der Bücher und Manuscripte in allen Sprachen, welche von Juden verfasst oder übersetzt sind.

2. Grenzen.

Die Grenze, welche ich der eigentlichen, möglichst genauen und vollständigen Zusammenstellung gesetzt habe, beruht auf einer Eigentümlichkeit der jüdischen Literatur, welche in neuerer Zeit vielfach geschildert worden, auch für den Titel des Buches »*Jewish Literature from the eighth . . . century*» maassgebend war, und hier in Kürze erledigt werden muss. Das eigentliche Judentum, im Gegensatze zum alten Hebräertum, gestaltete sich in den Kämpfen während des 2. Tempels, insbesondere in den letzten vergeblichen Auflehnungen gegen die Römerherrschaft unter HADRIAN (130). Von da an sind die Juden eine Nation »in partibus» wie ZUNZ sie sinnig bezeichnet. Der Geist ist nicht bloss *räumlich* anderswo magnetisch angezogen, auch *zeitlich;* Vergangenheit (Bibelstudium) und Zukunft (Eschatologie) verdrängen die Sorgen um die Gegenwart, nach den Worten des Talmuds: »man lässt das Leben der Stunde bei Seite und befasst sich mit dem der Ewigkeit». Unter den Eigentümlichkeiten der Literatur kommt hier nur eine einzige aber hochbedeutende in Betracht. Das Studium des Gesetzes erzeugt eine in Schulen fortgepflanzte Autorität (Tradition, hebr. *Kabbala,* ein Namen, welchen im XIII. Jahrhundert eine dem Judentum fremde Theosophie sich missbräuchlich anmaasste). Die Tradition leitet ihren Ursprung von einem sogenannten *mündlichen* Gesetze (»Lehre Mosis vom Sinai») her; dennoch wurde die Codification dieser Erweiterung des schriftlichen Gesetzes, die sich zuletzt bis zum offnen Widerspruch gegen letzteres erhebt, streng verboten; Mündliches sollte nur mündlich fortgepflanzt werden. Allein das Leben tötet Alles, was Menschen aufbauen, um dem Laufe des Lebens Grenzen zu setzen. Auch die mündliche Lehre wurde codificirt und die Inconsequenz mit der Verdrehung eines Bibelverses (Ps. 119, 16) gerechtfertigt. Das geschah aber erst nach Jahrhunderten, und die eigentliche Schriftstellerei, als selbstbewusste, den Stoff nach freier Wahl und mit Sinn für die Formenschönheit bildende Kunst, wurde

auf lange Zeit verdrängt. Die herrschende Art der Compilationen liess mitunter die Autorität für's Einzelne nicht zum rechten Ausdrucke kommen, so dass man oft nicht weiss, wo die Rede des Einen aufhört, die des Gegners beginne! Dazu noch die weithergeholten Deutungen der alten Documente, die Verbindung zufälliger Nebendinge, an welche sich Abschweifungen knüpfen. Dieses »Ein und All», dessen Ausläufer man noch in den gelehrten Abhandlungen des jüngst verstorbenen PAULUS (als Jude: SELIG) CASSEL bedauert, erschwert ganz besonders das Studium der *Geschichte* irgend eines Gegenstandes in jener *Collectivliteratur,* welche man *Mischna, Gemara, Talmud, Midrasch,* u. s. w. nennt, teilweise noch in späteren, ohne strenge Zucht der Methode verfassten, hebräischen Schriften. Es hat für den Historiker stets etwas Missliches aus einer Sammlung von Ansichten und zufälligen Äusserungen, die Jahrhunderte aus einander liegen und oft ganz gelegentlich vorkommen, eine Entwicklung zu construiren, die so leicht dem *circulus vitiosus* anheimfällt. Dem Mathematiker vom Fach ist dergleichen naturgemäss zuwider, und der Laie erkennt nlcht die Bedeutung mancher hingeworfenen Bemerkung.

So liegt denn ein weites Terrain vor uns, welches erst, man möchte sagen *geologisch* zu analysiren ist. Es ist allerdings viel bequemer *das* Geschichte, welches *die* Geschichte sondern soll, als ein Ganzes anzusehen; man spricht von *Talmud* oder den *Rabbinen,* die zu Hunderten existirten, und fertigt damit die verschiedenartigen Erscheinungen beinahe eines Jahrtausends oder noch mehr ab. — Dieses Gebiet wird hier nur als *Einleitung* behandelt, die Zeit von 1801—40 nur als *Anhang,* weil mir die Literatur nicht genug bekannt ist. — Ehe wir die Literatur verzeichnen, ist noch eine innere Seite des ganzen Thema's zu beleuchten.

3. Motive.

Wenn man bei den Juden irgend eine geistige Thätigkeit gewahrte, die nicht direct mit der Bibel zusammenhing, oder zusammenzuhängen schien, so glaubte man dieselbe auf die Beschäftigung zurückführen zu müssen, welche ihnen im Mittelalter (allerdings nur in gewissen Gegenden) ganz besonders in späterem Mittelalter, das für die Juden bis in die neueste Zeit hineinreicht, allein gestattet wurde: Handel, Wucher und Heilkunst. Selbst der unbefangene Historiker G. LIBRI (*Histoire des sciences mathématiques* I, 153; cf. II, 265) knüpft die literarische Vermittlung der Juden an ihre Handelsreisen. Der

deutsche Literaturhistoriker GRÄSSE hat sich nicht entblödet, die Mathematik bei den Juden, von der er Nichts gelesen hat und Nichts verstanden hätte, auf Handel und Wucher zurückzuführen. Ein ähnlicher Gedanke schwebte noch WEISSENBORN[1] vor, als er in dem, von GERBERT angeführten »JOSEPHUS *sapiens*» oder »*hispanus*» nach vergeblichem Umhersuchen auf einen jüdischen »Handelsmann» geriet, den er allerdings nicht nachweisen konnte. Es ist aber höchste Zeit, derartigen unklaren Vorstellungen und Hypothesen vom Standpunkte der wirklichen Literatur aus ein Ende zu machen. Es wird sich zeigen, dass die Juden ihre Studien vorzugsweise der *Astronomie* und der engverwandten Astrologie, ferner der Geometrie, Algebra, allerdings auch der Arithmetik, zuwandten. Wann haben Handelsleute und Wucherer irgend einer Nation zu den schwierigsten Problemen der Mathematik sich je verstiegen?! Die wahren Motive sind in den Schriften selbst gegeben, und wenn die besondere Neigung und Befähigung der Juden für Mathematik in ihrer äusseren Geschichte einen Grund oder Antrieb zu suchen hat, so führt uns schon der gänzliche Mangel an Schriften über *Mechanik* auf die rechte Fährte. Menschen, die vom öffentlichen Leben ausgeschlossen sind, teilweise vom socialen (letzteres auch durch gewisse Ceremonialgesetze), wenden sich naturgemäss mehr *abstracten* Gegenständen zu; bis heute beschäftigen sich russische Juden gern mit Erfindung von Rechenmaschinen, und in der brotlosen Kunst des Schachspiels, also der abstracten Combination, zählt noch die neueste Zeit nicht wenige jüdische Matadore.[2]

Dass schliesst aber nicht aus, dass einzelne Disciplinen oder besondere Themen von alter Zeit her durch eigentümliche, religiöse und practische Verhältnisse in einem höheren Grade gefördert worden. So zum Beispiel war für Bibelerklärer ein geometrisches Problem geboten in dem sogenannten »Meer Salomo's» (1 Kön. 7, 26);[3] man erinnert sich dabei an das berühmte griechische Problem der Verdopplung des Altars, angeblich von PLATO gelöst. — Eine bedeutende Anregung zur Beobachtung des Mondlaufes und dann der Himmelsbewegungen überhaupt bot der hebräische *Kalender*, der noch heute jüdische Federn beschäftigt. Der Kern der Frage führte auch zu einer Controverse mit und unter Christen. Das Passah (Osterfest) soll in einem Mondjahre stets am 15. des *Frühlings*monats (Nisan) gefeiert werden, was in einer noch nicht genau ermittelten Zeit zur Annahme des METON'schen Cyclus von 19 Jahren mit 7 Schaltmonaten führte.[4]

Die weitere Entwicklung des Kalenders gehört in eine

spätere Zeit und wird an der betreffenden Stelle zur Sprache kommen; hier galt es nur ihn als Motiv hinzustellen. Die Feststellung und Verkündigung des Neumondes geschah ohne Zweifel sehr lange nach Zeugenaussagen; als aber die Berechnung zu Ansehn gelangte, vindicirte man ihrer Autorität auch ein höheres Alter — dergleichen findet sich überall — man ging so weit, in der »Einsicht in die Zeiten», welche das 1 Buch Chron. (12, 32) an den Söhnen ISACHAR's rühmt, die Kalender- und Sternenkunde zu sehen.[5] Ein anderes Motiv war die Beobachtung des Sonnenuntergangs für den Anfang von Sabbat und Fasttagen, für Datirung von Ereignissen und Documenten. — Ein anderweitiges Motiv für Geometrie war das, wovon diese Wissenschaft selbst ihren Namen erhielt, das Messen von Erdflächen, Äckern und dergl. Das Verbot der Saatenmengung (Levit. 19, 19; Deuteron. 22, 9) führte schon die Lehrer der Mischna (Tractat Kil'ajim 1, 3) auf geometrische Betrachtungen des »Beetes» (*Aruga*). Es mag hier gelegentlich bemerkt werden, dass die Abhängigkeit der römischen *Agrimensoren* von Ägypten — welche CANTOR in seiner berühmten Monographie aufgestellt hat, — im Midrasch in seiner eigentümlichen Weise ausgedrückt scheint, es habe ESAU (sinnbildlich für Rom) das »Groma» aus Egypten geholt.[6] — Untergeordneter Art sind die beliebten Wort- und Zahlspielereien, welche sich im Hebräischen um so enger verbinden, als die Buchstaben selbst bekanntlich auch *Zahlzeichen* (Ziffern) sind, wie im Griechischen und fast in derselben Reihenfolge. Nur für 100—400 galten ursprünglich die letzten Buchstaben. Ich weiss nicht, zu welcher Zeit die 5 *Endbuchstaben* für 500—900 eingeführt worden, welche allerdings selten angewendet werden (s. oben Anm. 5). Sie sind erwähnt in einer mystischen Auslegung der Buchstaben, welche wahrscheinlich von JEHUDA B. SALOMO aus Toledo (in Toscana 1259) herrührt,[7] auf welchen wir noch zurückkommen. Buchstaben für Zahlzeichen mit *Positionswert* werden wir zuerst bei ABRAHAM IBN ESRA (XII. Jahrh.) finden. Derselbe hat in seinem Buche der Zahl bereits einen hebräischen Namen (*Galgal*, Rad) für *Null* neben ספרא (*Sifra*), welches auch in einem Manuscript des Vereins *Talmud Thora* in Rom vorkommt, wovon später die Rede sein wird; ELIA MISRACHI (Buch der Zahl, fol. 5) erklärt das Wort *Sifra* ausdrücklich für arabisch.[8] ABRAHAM B. CHIJJA (um 1116—1136) kennt nur 9 Zahlzeichen.[9]

Kehren wir nach dieser kurzen Abschweifung zu ihrem Ausgangspunkte zurück. Die Deutung biblischer Wörter durch die Anwendung des *Zahlwertes* der Buchstaben wird vielleicht

schon in der Mischna mit einem Worte bezeichnet, welches man bisher »*Geometria*» las, aber nicht erklären konnte. MICHAEL SACHS sieht in jenem Worte eine Corruption von γραμματεια, d. h. Auflösung der Wörter in Buchstaben; dann muss die weitere Verwertung der Buchstaben als Ziffern eine jüngere Verengung des Begriffes sein.[10] Zu dieser Art von Spielerei gehört eine Bemerkung in dem ziemlich jungen Midrasch zu Exodus (Cap. 15, f. 100, col. 2, Ed. 1732) über den Vers in Num. 23, 9, wo das Wort הן (siehe) aus den 2 Buchstaben besteht, welche als Ziffern 5 und 50 bedeuten, isolirte Zahlen, die sich im Decadenssystem nicht paaren, um 10 zu bilden, wie 1 + 9, 2 + 8, 3 + 7, 4 + 6. Hier ist wahrscheinlich eine Spur griechischer Arithmetik.

Es genügt an dieser Stelle auf einige besondere Motive hinzuweisen; andere werden sich gelegentlich aus Inhalt und Behandlung der Schriften selbst ergeben. Im Allgemeinen ist aber auf die *Bedeutung des Forschens und Wissens* hinzuweisen, welche bei den Juden allmälig von dem Studium der Bibel auf das Studium überhaupt überging und ebenfalls in dem engen Spielraum für den Ehrgeiz eine mächtige Stütze erhielt.

Gegenüber den eigentlichen religiösen und geschichtlichen Förderungen der Beschäftigung mit der Mathematik steht die Aufgabe zu erforschen, in wie weit mathematische Begriffe, Lehrsätze und Anschauungen in *das religiöse Denken und Handeln* der Juden eingedrungen sind. Dieses, meines Wissens hier zuerst präcisirte Thema ist natürlich nur wegen seiner Verwandtschaft mit dem unsrigen angedeutet und mit Angabe weniger Beispiele für uns erledigt. Wie ès scheint, hat die in Persien herrschende Teilung der Grössen in Sechzigstel (Sexagesimalsystem), bekanntlich in der Zeitteilung noch immer nicht ganz vom Decadenssystem überwunden, sich in die jüdische Gesetzkunde und Legende eingeschlichen.[11] Die Astrologie drang selbst in die Gebete ein.[12]

[1] H. WEISSENBORN, *Zur Geschichte der Einführung der jetzigen Ziffern* etc. (Berlin 1892); S. 24 wird mein Einwand auf einen Grund zurückgeführt, der auch für mich nicht entscheidend gewesen wäre. — Bei dieser Gelegenheit möchte ich neuerdings Nichtorientalisten vor dem Vertrauen zu CASIRI warnen, welchen Herr WEISSENBORN (S. 83) nicht genügend benützt glaubt.

[2] S. mein: *Schach bei den Juden,* in VAN DER LINDE, *Geschichte des Schach* (Berlin 1873; I, 194).

[3] B. ZUCKERMANN, *Das jüdische Maassystem in seinen Beziehungen zum griechischen und römischen* (Breslau 1867), S. 3; *Das Mathematische im Talmud* (1878; s. unten) S. 23; *Hebr. Bibliogr.* XV, 127; vgl. HERZFELD, *Metrolog. Voruntersuch.* II, 8—11.

[4] Die Nachrichten in AL-BIRUNI's (BÉRUNI bei SACHAU) Chronologie sind wegen ihres hohen Alters wichtig, aber noch nicht beachtet. — S. unten § 4, C).

[5] SAADIA GAON (gest. 941) hat jedenfalls aus diesem Vers die Zeitrechnung bewiesen (*Ozar Nechmad,* herausg. v. BLUMENFELD, Wien 1863, IV, 27); eine junge Quelle (ms. Hamburg n. 294 meines Catalogs) findet in dem hebr. Worte *Ittim* die Zahl 1080 (indem das Schlussmem 600 bedeutet; wie alt ist diese Anwendung der Endbuchstaben für 500—900?), also die Zahl der Stundenteile, nach welchen das Sonnenjahr berechnet wird. Dass ISACHAR in einer Himmelfahrt diese Stundenteilung mitgebracht, erzählt schon die Baraita des SAMUEL JARCHINAI (s. unten § 7), wenn man dem Citat eines Anonymus trauen darf, der noch zu ermitteln ist; ZUNZ (*Hebr. Bibliogr.* V, 19; *Gesamm. Schriften* III, 248) citirt ABR. SACUT f. 40 (eigentl. 39), ed. Cracau (s. auch ed. London, S. 46), welcher kurz vorher angegeben, dass seit PTOLEMAEUS 1370 Jahre verflossen sind. SACUT hat das wohl in einem älteren Buch *Ibronot* gelesen; ich finde es vollständig in dem anonymen Kalenderwerk bei MÜNSTERUS, *Calend.* p. 56. — Christliche Quellen über die 1080 Teile hat B. BONCOMPAGNI in seiner Abhandlung über ein altes Rechenbuch sehr fleissig gesammelt (*Intorno ad un trattato d'aritmetica stampato nel 1478;* Atti dell' accad. pontif. dei Nuovi Lincei **16**, 1862—1863); vgl. ABRAHAM B. CHIJJA, *ha-Ibbur* (hebr.) S. 37. — Auch ABRAHAM, der Patriarch, soll in Aegypten »in cathedra» Astronomie gelehrt haben (SACUT f. 135[b] Crac., 233 Lond.; vgl. B. BEER, *Das Leben Abrahams,* S. 25, 207; cf. PETR. APPIANUS bei D. GANS, Chron. zu 1906). — Christliche Quellen legen dem KAINAN BEN ARPAKHSCHAD astronomische Kenntniss bei (WOLF, *B. H.* I, n. 1885; vgl. *Hebr. Bibliogr.* III, 119, IV, 22).

[6] *Hebr. Bibliogr.* XIX, 76.

[7] *Hebr. Bibliogr.* VI, 52 zu ms. Almanzi 283, wo als Autor: MOSES B. JEHUDA.

[8] Die Ableitung des Namens *Zero* vom arab. *Sir* (*estremità*) (S. CUSA, im *Archivio storico siciliano* I, 19) ist nicht wahrscheinlich.

[9] *Hebr. Bibliogr.* XVII, 88.

[10] J. LEVY, *Neuhebr. Wörterb.* I, 324 giebt keine Begriffsentwickelung.

[11] Im Gesetz im Aufgehen von Unerlaubtem in 60-facher Quantität; s. *Hebr. Bibliogr.* XVII, 92 A. 2.

[12] Zum Beispiel Planetenbeherrschung der Tage im Gebetbuche aus dem XV. Jahrh. (*Catal. Bodl.* p. 357, n. 2384; auch im span. Ritus ed. 1581, f. 81^b; vgl. ms. Schönblum 67). Der Zodiak spielt eine Rolle in den Gebeten um Regen und Thau an 2 Festen. In dem Hymnus, anf. *As be-'hot'enu* (Span. Rit. ed. 1581 f. 331) klagen die Sternbilder. Vgl. auch M. SACHS, *Die relig. Poesie d. Juden* etc. S. 229 die Schilderung des Universums, welche auch v. HUMBOLDT im *Kosmos* erwähnt ist.

Miscellen zur Geschichte der Mathematik.

Von MORITZ STEINSCHNEIDER in Berlin.

12. Kurze Bemerkungen zur Beschreibung eines hebräischen Manuscripts von Herrn P. Riccardi.[1]

Der Copist MORDECHAI FINZI war ein Mathematiker von Fach, wahrscheinlich auch Übersetzer, wie ich in meinem Werke über die hebräischen Übersetzungen[2] angebe; Näheres verspare ich für den Artikel: »Mathematik bei den Juden» *suo loco*.

I. Der Übersetzer JAKOB BEN MACHIR ist nicht in Cordova geboren; übrigens s. *H. Übs.* 506.

II. Die Recension vom J. 1148 ist miserabel gedruckt: Königsberg 1845; es giebt auch eine Nebenrecension; s. mein: *Abraham ibn Esra* in Supplement zur hist.-liter. Abtheilung der Zeitschr. für Mathem. **25**, 1880, S. 125.

Der Verfasser der Schlussbemerkung soll ein Sohn des Übersetzers sein — von welchem Nichts bekannt ist. Offenbar ist hier eine inconsequente Confusion mit dem »ammanuense» EMANUEL BEN JAKOB und eine irrtümliche Conjectur zu berichtigen. IMMANUEL BEN JAKOB ist nicht ein Sohn JAKOBS BEN MACHIR, sondern ein späterer sehr bekannter Autor (um 1365), auf welchen ich ebenfalls in dem unter der Feder befindlichen Artikel zurückkomme. Er hat gleichfalls eine Schrift über das Astrolab verfasst, wovon mss. in Paris und London; es handelt sich wohl in unserem ms. um Höhe und Entfernung der *Sterne*, und wäre ms. De Rossi 336[b], in Parma zu vergleichen.

III. a) ist von dem Araber IBN AL-'SAFFAR; s. *H. Übs.* S. 580 und 581.

b) wird dem PTOLEMAEUS nicht streng genommen beigelegt, aber von einem »*Buche*» der 7 Klimata als Quelle ist nicht die Rede; ein solches wird auch sonst nicht erwähnt; s. *H. Übs.* S. 537.

IV. Die Scheibe des ZARKALI darf nicht »*Zeppichà*» umschrieben werden, sondern lautet *Safi'ha;* die Lateiner schreiben »*Safeha, Saphea*» und dergl.; daher emendire ich (*H. Übs.* S. XXX zu S. 628) den Titel: »conclusiones *sophiae*» von GUILELMUS BADECOMIUS *Anglus* (um 1420) bei allen Bibliographen[3] in »*sapheae*». Über ZARKALI s. meine *Études* (Rome 1884) und *H. Übs.* S. 592; BARTOLOMEO DEGLI OROLOGI(?) ist identisch mit »DEI MANFREDI»; s. *H. Übs.* S. 626.

V. Muss heissen: »Trattato del globo» und in letzt. Zeile »Hasmon» lies »ABU'L HASSAN»; s. *H. Übs.* S. 552.

VI. »Modo ... *Mappamondo*» scheint nicht richtig; es scheint vielmehr identisch mit dem, anderswo auf COSTA folgenden Stücke über Anfertigung des *Globus* (*H. Übs.* S. 553).

Sollte Jemand Etwas aus dem wertvollen ms. bearbeiten wollen, so wird er die, in meinem Werke angegebenen mss. möglichst benützen müssen.

[1] P. RICCARDI, *Sopra un codice ebraico contenente alcuni scritti matematici ed astronomici.* Biblioth. Mathem. 1893, 54—56.

[2] Ich verweise, der Kürze halber, darauf mit der Abbreviatur »*H. Übs.*».

[3] LELAND, *De scriptoribus Britannicis* (Oxoniae 1709) Cap. 309, p. 428, eben so wie Io. BALEUS, *Scriptores Britannici* (Basil. 1559), VII, 67, p. 559, und Io. PITS, *Relationes de rebus Anglicis* (Parisiis 1619) p. 608; letztere beiden citirt FABRICIUS, *Bibliotheca latina medii aevi* sub voce *Guilelmus.*

Nota storica sulla variazione delle latitudini.

Di OTTAVIO ZANOTTI BIANCO a Torino.

EULERO fu il primo a dimostrare che le latitudine dei luoghi terrestri potevano essere variabili, in causa di uno spostamento del polo alla superficie terrestre. Dopo di lui LEGENDRE giunse a risultati analoghi. Ma di LEGENDRE, i molti astronomi che si sono in questi ultimi tempi occupati della variabilità e variazione delle latitudini, o ignorarono o tacquero. Due soli, per quanto io so, e questi sono Italiani, ne fanno menzione; essi sono i signori NOBILE[1] ed ANGELITTI,[2] astronomi all' Osservatorio di Capodimonte in Napoli. I due astronomi napoletani attinsero le loro informazioni, studiando i lavori dell' astronomo C. BRIOSCHI, primo direttore dell' osservatorio di Napoli. Il BRIOSCHI misurò la latitudine di Capodimonte e pubblicò i suoi lavori in un' opera intitolata: Commentarij astronomici della Specola Reale di Napoli.

Nel volume primo, parte seconda, pag. 165 si trova quanto riguarda la variabilità della latitudine. Ecco il passo.

Invariabilità della latitudine.

L'insigne geometra LEGENDRE nei suoi *Exercices de calcul intégral* ec. ec. (Tom. II, p. 363) applicando alla Terra le teorie generali del moto di rotazione, propende a credere che l'asse di rotazione della medesima sia soggetto ad una specie di nutazione, o piuttosto variazione intrinseca, dipendente dalle circostanze primitive del moto medesimo, le quali è ben poco probabile che siano state tali da far coincidere quell' asse con uno degli assi principali, o vero da qualche grande catastrofe avvenuta nel decorso de' secoli, che possa averne alterata la coincidenza perfetta, se mai prima esisteva, ed assegna anche presso a poco il periodo di tale nutazione di giorni 300 o 320. In conseguenza di queste congetture la latitudine sarebbe variabile (ciò che da qualcheduno anche in altri tempi fu opinato, senza però assegnarne positivamente alcuna causa), e quella da noi poco fa trovata non dovrebbe considerarsi che come un medio corrispondente alla totalità delle osservazioni impiegate, siccome si è praticato finora. Prima adunque di progredire ad altro argomento, sarà utile di esaminare siffatto punto, e vedere se le nostre osservazioni indichino la

necessità di tener conto della congetturata variabilità della latitudine, o pure se si può continuare a considerarla come costante.

A tale oggetto paragoneremo fra loro le latitudini date dalle distanze dal zenit della Polare e della Spica etc. etc. (Vedasi il riassunto di questi confronti che dà il Dr. Angelitti a pag. 108 della sua memoria citata alla nota [1]).

Le seguenti parole chiudono il paragrafo.

»La latitudine potrebbe anche essere variabile indipendentemente dalle circostanze primitive del moto di rotazione della Terra, se la direzione della gravità fosse soggetta a mutazioni, in conseguenza del traslocamento di grandi masse nell' interno od alla superficie della medesima, ma secondo le osservazioni più esatte, pare che tale variazione, se mai esiste, non sia sensibile nel giro di qualche anno, e forse nemmeno di qualche secolo».

È curioso l'avvertire come Brioschi non nomini Eulero; giova però notare che neppure Legendre lo nomina, nel capitolo ove tratta dell' argomento; solo nella prefazione al tomo secondo dei suoi *Exercices de calcul intégral* (edizione del 1817) lo cita genericamente.

Non sappiamo poi a chi alluda Brioschi quando scrive a proposito della variabilità delle latitudini: »ciò *che da qualcuno anche in altri tempi fu opinato, senza però assegnarne positivamente una causa*». Non si allude certo ad Eulero, perchè egli non solo assegnò la causa ma ne diede la teoria.

Il tomo VII del Bulletin astronomique (1890) nelle pagine 449—452 contiene una bibliografia che porta questo titolo: *Rotation d'un corps de forme variable. — Variation de la latitude ou de la verticale. — Influence des phenomènes géologiques, des marées, etc.* In questa bibliografia mancano per tacere di molti altri i nomi di Eulero, Legendre, Brioschi, Angelitti.

Assai probabilmente la frase di Brioschi si riferisce a quei matematici, Witzel, Reisel, Faber, Cassini (Gian Domenico), Bode, Zach ed altri, che prima di lui ebbero a considerare la variabilità delle latitudini. Anche questi nomi mancano nella citata bibliografia del Bulletin astronomique.

Ecco ora i brani principali che si trovano in Legendre concernente la variabilità della latitudine (*Exercices de calcul intégral,* tomo II, 1817, p. 363).

»Remarque sur le mouvement de l'axe de la Terre».

67. Comme il est infiniment probable que l'axe de rotation

primitif de la Terre n'a pas coïncidé exactement avec un axe principal, ou du moins que ces deux axes se sont séparés par quelque variation arrivée à la surface ou à l'intérieur du globe, il est à présumer que les inégalités qu'on vient de calculer ont lieu effectivement dans le mouvement de rotation de la Terre. Mais comme elles sont extrémement peu sensibles et que la quantité ε beaucoup plus grande que a' ne pèut monter tout au plus qu'à quelques secondes, ce n'est que par une longue suite d'observations très délicates qu'on pourra s'assurer de leur existence.»

Segue un breve calcolo, dopo il quale si legge quanto segue.

»D'où il suit que la distance du zenith au pole variera pour un lieu quelconque depuis[3] $p-\frac{A+C}{B+C}\varepsilon$, jusqu'à $p+\frac{A+C}{B+C}\varepsilon$. Donc si par des observations exactes de la hauteur du pole dégagées de la réfraction, de l'aberration et des nutations dues aux causes externes, on trouve que cette hauteur n'est pas constante, ce sera une preuve qu'il y a un mouvement naturel dans l'axe terrestre, mouvement dont la cause est dans la Terre même et qui doit être distinguée de la nutation causée par l'attraction de la lune et des planètes. C'est peut-être par ce mouvement qu'on pourrait expliquer la petite différence que des observateurs exacts ont trouvée dans l'obliquité de l'ecliptique déduite des solstices d'hiver et l'obliquité déduite des solstices d'été».

»On peut remarquer que depuis la plus grande jusqu'à la plus petite hauteur du pole, pour un lieu quelconque, la Terre fait une demi-revolution autour de son axe principal. Le nombre des jours écoulés dans cet intervalle est donc d'après nos formules $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{B+A}{B-A}\cdot\frac{C+A}{C-A}}$ ou $\frac{1}{2}\frac{C+A}{C-A}$, si l'on admet, ce qui est fort vraisemblable, que C diffère beaucoup moins de B que de A. D'un autre côté il paraît, par le phénomène de la précession des équinoxes, que la valeur de $\frac{C}{A}$ est comprise entre $\frac{302}{300}$ et $\frac{322}{320}$; donc le temps dont il s'agit est d'environ 150 ou 160 jours. Ces résultats auraient encore lieu, quand même on aurait exactement $B=C$, ce qui est le cas de l'art. 13.»

[1] NOBILE, *Terza determinazione della latitudine geografica del R. Osservatorio di Capodimonte* (Napoli 1883) pag. 5. Questo

valente astronomo italiano ha con una serie di profonde memorie e discussioni di sue osservazioni, contribuito largamente e potentemente allo studio delle variazioni delle latitudini, a cui con lavori di grandissima importanza attesero, pure in Italia, gli astronomi SCHIAPARELLI, FERGOLA, ANGELITTI, PORRO.

[2] ANGELITTI, *Distanze zenitali circummeridiane di alcune stelle principali osservate nell' anno 1821 dal'astronomo Carlo Brioschi* (Napoli 1889) p. 108.

[3] A, B, C sono tre integrali (p. 317 del volume citato nel testo) a mezzo dei quali i momenti d'inerzia del corpo rispetto ai suoi tre assi principali sono dati rispettivamente da $B+C$, $A+C$, $A+B$. ε è l'angolo fatto dall' asse di massimo momento (di stabile rotazione) coll' asse di rotazione iniziale (d'istantanea rotazione).

Un nuovo documento relativo alla logistica greco-egiziana.

Di GINO LORIA a Genova.

ERODOTO e PLATONE[1] assicurano che nell' antico Egitto il calcolo numerico era cosa generalmente conosciuta e l'aritmetica pratica uno dei temi svolti nel più elementare insegnamento. Ma l'aritmetica che aveva corso sulle rive del Nilo aveva una fisonomia spiccatamente caratteristica specialmente per l'uso (che, da un certo punto di vista, potrebbe riattaccarsi alla rappresentazione dei numeri reali in frazioni continue ordinarie) di frazioni (»fondamentali» cioè) aventi per numeratori l'unità;[2] nè essa perdette i propri lineamenti quando, subendo l'influenza degli abitatori dell' Ellade, divenne quella che noi chiamiamo *logistica greco-egiziana,*[3] e nella quale si incontrano ed hanno capitale importanza dei problemi che la nostra aritmetica ignora o di cui sdegna di occuparsi, problemi che sono per la maggior parte difficili e suscettibili di infinite soluzioni.

I documenti sui quali si fonda la nostra conoscenza dell'aritmetica pratica che i Greci ereditarono dagli Egiziani sono: il Papiro Rhind (scritto circa 1700 anni a. C.), le *Opere* superstiti di ERONE d'Alessandria (I Sec. a C.)[4] è le Lettere scritte nel 1341 dallo Smirnese NICOLA ARTASVADE detto il RHABDAS.[5] Queste ultime, a differenza delle altre citate scritture, somministrano ampi schiarimenti non soltanto intorno ai metodi, adoperati dai Greci per risolvere i problemi di algebra elementare, ma eziandio sui modi in cui si eseguivano le operazioni aritmetiche (sino all' estrazione della radice quadrata inclusivamente) sui numeri interi e frazionarii. Sfortunatamente però queste lettere, malgrado preziose doti di cui riboccano, porgono ben poco ajuto a chi voglia ricostruire la tecnica aritmetica greco-egiziana; gli è che desse furono scritte in un momento in cui, non incontrandosi più alcun ostacolo al concepire e trattare le frazioni più generali, non era più esclusivo l'uso delle frazioni fondamentali; anzi, quando si vede il RHABDAS restringersi ad usare le anzidette frazioni nell' enunciare le questioni e formularne le risposte, si sarebbe tentati di credere che egli di malavoglia si addattasse alle consuetudini avite.

In tale stato di cose è pertanto di inestimabile valore l'acquisto del nuovo documento il cui esame è lo scopo precipuo del presente scritto. È il *Papiro matematico d'Akhmîm*[6] le cui interpretazione e pubblicazione sono dovute ad uno dei membri della missione archeologica francese al Cairo.[7]

Il nuovo papiro per la forma in cui è redatto si avvicina tanto a quello di cui l'EISENLOHR rivelò il contenuto, quanto a quello (scritto in Egitto fra il 193 ed il 165 a. C.) che LETRONNE decifrò e chiamò *Didascalie céleste de Leptine* e che BRUNET DE PRESLE pubblicò intitolandolo *Art d'Eudoxe:*[8] giacchè se questo venne con ragione assomigliato ad un quaderno scolastico, il nuovo papiro apparve al suo editore come »le cahier net et soigné d'un élève moyen». Esso venne scritto (in greco) fra il VII e l'VIII secolo dell'èra nostra da un cristiano, ma è probabilmente la copia di altro più antico che, per l'epoca a cui appartiene, s'interporrebbe certamente fra il papiro Rhind e le lettere del RHABDAS (forse anzi fra quello e le opere di ERONE). Non rappresenta probabilmente lo stato di perfezione massima a cui giunsero i metodi egiziani, è tuttavia sintomo di una scienza più progredita di quella che viene attestata dal papiro Rhind, non foss' altro sembra che quando venne compilato si fosse più prossimi ad emanciparsi dall' impiego costante di frazioni fondamentali[9] e per fermo si era così progrediti nella teoria della divisibilità da essere in grado (non solo di distinguere, come AHMES, i numeri pari dai dispari, ma anche) di assegnare i vari modi di decomporre un intero in due fattori.

Il papiro di cui il sig. BAILLET arrichì la letteratura storica è oggi il più antico documento sull' insegnamento dell' aritmetica pratica presso i Greci; tuttavia non è ancora sufficiente a colmare le lacune che presenta la collezione delle nostre cognizioni su questo argomento, perchè (a somiglianza del Papiro Rhind) contiene delle tabelle numeriche di cui ignoriamo il metodo di costruzione e dei problemi aritmetici di cui viene dogmaticamente esposta la soluzione.[10] Rimandando alla pubblicazione originale chi desiderasse leggere una particolareggiata descrizione del nuovo papiro, vederne anche la riproduzione fotolitografica, conoscere il modo con cui venne scoperto e venire istruito intorno alle questioni paleografiche e filologiche[11] a cui esso dà luogo, noi, colla scorta dell' eccellente commento fatto del prelodato editore, tenteremo di determinare il valore del nuovo documento confrontandolo con i congeneri.[12]

Le tavole numeriche che dicemmo esistere nel papiro

d'Akhmîm hanno uno scopo identico a quello della tabella con cui comincia il papiro Rhind e di cui recentemente ci occupammo;[13] esse possono anzi qualificarsi siccome un ulteriore svolgimento di questa.[14] Esse infatti porgono da principio la decomposizione in frazioni fondamentali dei numeri della forma $\frac{2}{3} \cdot 10^k \cdot l$ e $\frac{1}{m} \cdot 10^k \cdot l$ ove k prende successivamente i valori $0, 1, 2, 3$, l i valori $1, 2, \ldots, 9$ e m i valori $3, 4, \ldots, 10$. Sembra che il calcolatore, arrivato a questo punto, siasi finalmente accorto di sobbarcarsi ad un lavoro assai più esteso di quanto fosse strettamente necessario, dal momento che dalla decomposizione in frazioni fondamentali di un numero si deducono subito le decomposizioni dei numeri frazionari i cui numeratori sono congrui al numeratore di quello rispetto al comune denominatore; perciò nella parte rimanente delle tabelle egli si limita a registrare le decomposizioni delle frazioni $\frac{1}{m} n$, ove m prende successivamente i valori $11, 12, \ldots, 20$ ed in corrispondenza n successivamente i valori $1, 2, \ldots, m$.

Nei casi in cui il numero delle parti in cui deve scomporsi il numero considerato sia non grande od eguale col prodotto di pochi numeri piccoli, la scomposizione riesce agevole per chiunque, senza possedere estese cognizioni aritmetiche, abbia una certa famigliarità con i numeri, onde non è difficile immaginare in qual modo l'abbia eseguita l'autore (o gli autori?) del papiro d'Akhmîm. In molti altri casi meno semplici essa viene operata in modo tale da porgere delle novelle conferme alle nostre congetture sul concetto che servì di guida nella costruzione delle tabelle consegnate nel papiro Rhind.[15] In altri casi si esegue spezzando il numero frazionario proposto in parti facilmente decomponibili in fondamentali applicando il precitato concetto. L'esame di altre decomposizioni induce finalmente ad ammettere che tale concetto sia stato svolto ed ampliato in due differenti direzioni: seguendo l'una o l'altra si giunge ad un procedimento di calcolo nel quale si tenta di sottrarre dalla frazione data $\frac{n}{m}$ tante frazioni della forma $\frac{1}{km}$ finchè si arrivi a $\frac{2}{3}$ o ad una frazione di cui lo spezzamento sia già noto oppure immediatamente assegnabile. Il lettore propenso a giudicare verosimili le nostre supposizioni precedenti, non farà certo il viso dell' arme a queste aggiunte, la prima delle quali anzi non presenta nulla di essen-

zialmente nuovo vista la posizione eccezionale della frazione $\frac{2}{3}$ nel sistema egiziano e la seconda si offre spontanea a chi avverta le relazioni che intercedono fra certe decomposizioni;[16] tanto più che delle traccie di queste generalizzazioni esistono nello stesso *Manuale del calcolatore egiziano* (e nelle *Collezioni eroniane;* cfr più avanti) come emerge dalla seguente tabella in cui sono riunite alcune relazioni rilevate da AHMES nel risolvere i problemi da lui trattati:[17]

$\frac{5}{7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}$	$\frac{5}{13}=\frac{1}{3}+\frac{1}{26}+\frac{1}{78}$	$\frac{9}{32}=\frac{1}{4}+\frac{1}{32}$
$\frac{6}{7}=\frac{2}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{21}$	$\frac{9}{13}=\frac{2}{3}+\frac{1}{39}$	$\frac{15}{53}=\frac{1}{4}+\frac{1}{53}+\frac{1}{106}+\frac{1}{212}$
$\frac{7}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$	$\frac{7}{22}=\frac{1}{6}+\frac{1}{11}+\frac{1}{22}+\frac{1}{66}$	$\frac{44}{63}=\frac{2}{3}+\frac{1}{42}+\frac{1}{126}$
$\frac{5}{9}=\frac{1}{2}+\frac{1}{18}$	$\frac{18}{25}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{50}$	$\frac{56}{73}=\frac{2}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{2190}$.
$\frac{8}{9}=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$	$\frac{5}{27}=\frac{1}{6}+\frac{1}{54}$	

Le tavole con cui comincia il papiro d'Akhmîm non si possono in alcun modo designare come rappresentanti la totalità delle decomposizioni note a chi le ha redatte; a dimostrarlo basti dire che durante un calcolo viene usata la decomposizione $\frac{5}{11}=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{99}$ a preferenza della $\frac{5}{11}=\frac{1}{3}+\frac{1}{11}+\frac{1}{33}$ in esse tavole contenuta e che vengono citate come note le relazioni

$$\frac{11}{120}=\frac{1}{15}+\frac{1}{40}, \qquad \frac{155}{3080}=\frac{1}{55}+\frac{1}{56}+\frac{1}{70}$$

e la seguente complicatissima

$$\frac{1}{110}\left(60+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}\right)=\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{20}+\frac{1}{22}+\frac{1}{30}+\frac{1}{33}+\frac{1}{40}+\frac{1}{44}+\frac{1}{50}+\frac{1}{55}$$
$$+\frac{1}{60}+\frac{1}{66}+\frac{1}{70}+\frac{1}{77}+\frac{1}{88}+\frac{1}{90}+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}+\frac{1}{110}.$$

L'accordo fra i due papiri è frequente ma non senza eccezioni: esso ha luogo nelle decomposizioni di $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{2}{11}$, $\frac{5}{13}$, $\frac{9}{13}$, $\frac{2}{17}$ ed è percepibile in quelle (che il nuovo papiro insegna) di $\frac{8}{11}$ e $\frac{12}{19}$; ma esso non si riscontra nelle decomposizioni di $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{2}{13}$, $\frac{2}{19}$.

E siccome per formarsi un concetto almeno approssimato delle successive fasi di sviluppo della logistica greco-egiziana ci sembra di capitale importanza il seguire l'evoluzione successiva che subì la collezione degli spezzamenti in fondamentali delle frazioni che fondamentali non sono, così crediamo prezzo dell'opera l'istituire un confronto anche fra quanto è racchiuso nel papiro di Akhmîm e i risultati aritmetici sparsi nelle opere che

vanno sotto il nome di Erone. Questi risultati si possono riassumere nel quadro seguente.

$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$

$\frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}$

$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$

$\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$

$\frac{4}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{14}$

$\frac{5}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} = \frac{2}{3} + \frac{1}{21}$

$\frac{6}{7} = \frac{2}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{21} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{42}$

$\frac{2}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$

$\frac{4}{9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$

$\frac{7}{9} = \frac{2}{3} + \frac{1}{9}$

$\frac{8}{9} = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$

$\frac{7}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$

$\frac{6}{11} = \frac{1}{2} + \frac{1}{22}$

$\frac{9}{11} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{22} + \frac{1}{44}$

$\frac{7}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12}$

$\frac{11}{12} = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$

$\frac{4}{13} = \frac{1}{4} + \frac{1}{26} + \frac{1}{52}$

$\frac{5}{13} = \frac{1}{3} + \frac{1}{26} + \frac{1}{78}$

$\frac{8}{13} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{26}$

$\frac{9}{13} = \frac{2}{3} + \frac{1}{39}$

$\frac{10}{13} = \frac{2}{3} + \frac{1}{13} + \frac{1}{39}$

$\frac{12}{13} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{13} + \frac{1}{78}$

$\frac{3}{14} = \frac{1}{7} + \frac{1}{14}$

$\frac{9}{14} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7}$

$\frac{11}{14} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$

$\frac{11}{18} = \frac{1}{2} + \frac{1}{9}$

$\frac{3}{20} = \frac{1}{8} + \frac{1}{40}$

$\frac{5}{21} = \frac{1}{6} + \frac{1}{14} = \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{42}$

$\frac{11}{21} = \frac{1}{2} + \frac{1}{42} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{21}$

$\frac{13}{21} = \frac{1}{2} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21}$

$\frac{16}{21} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21}$

$\frac{2}{25} = \frac{1}{15} + \frac{1}{75}$

$\frac{6}{25} = \frac{1}{5} + \frac{1}{25}$

$\frac{8}{25} = \frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{50}$

$\frac{12}{25} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{200}$

$\frac{16}{25} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{25}$

$\frac{21}{26} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{26} + \frac{1}{52}$

$\frac{4}{27} = \frac{1}{9} + \frac{1}{27}$

$\frac{25}{28} = \frac{2}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{21} + \frac{1}{28}$

$\frac{11}{30} = \frac{1}{3} + \frac{1}{30}$

$\frac{13}{30} = \frac{1}{3} + \frac{1}{10}$

$\frac{17}{30} = \frac{1}{2} + \frac{1}{15}$

$\frac{20}{33} = \frac{1}{2} + \frac{1}{11} + \frac{1}{66}$

$\frac{23}{33} = \frac{2}{3} + \frac{1}{33}$

$\frac{19}{35} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15}$

$\frac{31}{36} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$

$\frac{19}{50} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{200}$

$\frac{31}{50} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{50}$

$\frac{39}{50} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{40} + \frac{1}{200}$

$\frac{19}{51} = \frac{1}{3} + \frac{1}{34} + \frac{1}{102}$

$\frac{31}{51} = \frac{1}{2} + \frac{1}{17} + \frac{1}{34} + \frac{1}{51}$

$\frac{35}{51} = \frac{2}{3} + \frac{1}{51}$

$\frac{39}{51} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{68}$

$\frac{41}{51} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{51} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68}$

$\frac{35}{66} = \frac{1}{2} + \frac{1}{33}$

$\frac{37}{84} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{42}$

$\frac{71}{84} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{84}$

$\frac{61}{90} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{90}$

$\frac{17}{112} = \frac{1}{7} + \frac{1}{112}$

$\frac{73}{112} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{112}$

$\frac{104}{125} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{50} + \frac{1}{125} + \frac{1}{250}$

$\frac{101}{132} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{66}$

$\frac{57}{175} = \frac{1}{4} + \frac{1}{25} + \frac{1}{28}$

$\frac{116}{175} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{50}$

$\frac{163}{224} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{112} + \frac{1}{224}$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{112}$

$= \frac{2}{3} + \frac{1}{21} + \frac{1}{112} + \frac{1}{224}$.[18]

Orbene il confronto fra questo quadro ed il papiro pubblicato dal Sig. BAILLET dimostra che i due scritti si trovano d'accordo negli spezzamenti delle frazioni

$$\tfrac{2}{5},\ \tfrac{3}{5},\ \tfrac{4}{5},\ \tfrac{5}{6},\ \tfrac{4}{7},\ \tfrac{5}{7},\ \tfrac{6}{7},\ \tfrac{2}{9},\ \tfrac{4}{9},\ \tfrac{7}{9},\ \tfrac{7}{10},\ \tfrac{6}{11},\ \tfrac{9}{11},\ \tfrac{7}{12},\ \tfrac{11}{12},\ \tfrac{4}{13},\ \tfrac{5}{13},\ \tfrac{8}{13},$$
$$\tfrac{9}{13},\ \tfrac{12}{13},\ \tfrac{11}{14} \text{ e } \tfrac{39}{51}=\tfrac{13}{17};$$

mentre l'accordo non si verifica nei sei casi seguenti che segnaliamo al lettore come prove della superiorità dei risultati eroniani in semplicità ed eleganza:

$$\tfrac{8}{9}=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{18} \qquad \tfrac{3}{14}=\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{70} \qquad \tfrac{11}{18}=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{36}$$
$$\tfrac{10}{13}=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{52} \qquad \tfrac{9}{14}=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{56} \qquad \tfrac{8}{20}=\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{20}.$$ [19]

Sebbene, come già avertimmo, sia dogmatica la forma prescelta da chi scrisse il nuovo come l'antico papiro, pure un accurato esame dei calcoli eseguiti nel corso dei problemi di cui consta il papiro d'Akhmîm permise al Sig. BAILLET di projettare qualche raggio di luce sull' antica tecnica aritmetica. Così egli ha avvertito che, per risolvere la questione di dividere un numero per un altro maggiore, viene spesso applicato un procedimento uniforme del quale il lettore potrà formarsi un' immagine sufficientemente chiara notando attentamente i vari momenti del seguente calcolo:

$$\frac{239}{6460}=\frac{239}{76\times 85}=\frac{1}{85}+\frac{239-76}{6460}=\frac{1}{85}+\frac{163}{98\times 95}=\frac{1}{85}+\frac{1}{95}+\frac{163-68}{68\times 95}$$
$$=\frac{1}{85}+\frac{1}{95}+\frac{1}{68}.$$

E quando si tratta di decomporre in due fondamentali una frazione del tipo $\frac{a}{bc}$ ove $b+c$ sia un multiplo di a serve la formola

$$\frac{a}{bc}=\frac{1}{b\frac{b+c}{a}}+\frac{1}{c\frac{b+c}{a}};$$ [20]

che se l'anzidetta condizione non è soddisfatta si tenta di sottrarre dalla frazione $\frac{a}{bc}$ tante frazioni fondamentali finchè

nella frazione residua $\frac{a'}{b'+c'}$ sia $b'+c'$ multiplo di a'; oppure si osserva essere

$$\frac{a}{bc} = \frac{1}{b\frac{b+mc}{ma}} + \frac{1}{c\frac{b+mc}{a}}$$

e si sceglie m per modo che sia $b+mc$ multiplo di ma: se ad es. è $b=b_1b_2$ e si prende $m=b_2$, risulterà la formula

$$\frac{a}{bc} = \frac{1}{b_1b_2\frac{b_1+c}{a}} + \frac{1}{cb_2\frac{b_1+c}{a}}$$

che condurrà alla decomposizione voluta ogni qualvolta $b_2(b_1+c)$ sarà un multiplo di a. Il costruttore (od i costruttori?) delle tavole del papiro d'Akhmîm sembra usufruire promiscuamente di questi artifici (non omettendo di ridurre ai loro minimi termini le frazioni succettibili di tale riduzione) nell' intento di giungere per la via più breve e meno disagiosa al risultato più elegante o conveniente. E si avverta che tali artifici o analoghi espedienti entrano in gioco, non soltanto per surrogare una frazione con la somma di più altre, ma anche quando si tratti di combinare mediante una delle prime quattro operazioni aritmetiche due o più frazioni o numeri frazionari.

Le operazioni aritmetiche di cui sopra, o sono lo scopo dei problemi contenuti nel papiro Akhmîm oppure fungono da ausiliari nelle soluzioni di quelli fra essi (analoghi ai problemi del Papiro Rhind) ove fa mestieri dividere un dato numero in parti proporzionali a numeri dati[21] o determinare una incognita x in base a condizioni che si traducono in un' equazione della forma

$$x - \frac{x}{a} - \frac{1}{b}\left(x - \frac{x}{a}\right) - \frac{1}{c}\left[x - \frac{x}{a} - \frac{1}{b}\left(x - \frac{x}{a}\right)\right] - \ldots = k,$$

o si riferiscono ad calcolo d'interessi, alla regola del tre o alla determinazione di volume.[22] Sfortuna volle che di questi ultimi, uno soltanto (e precisamente il primo della collezione) ci pervenisse con un enunciato completo sulla cui interpretazione non può cadere dubbio di sorta. Esso non somiglia ad alcuna delle questioni risolte da AHMES, avendo per iscopo la ricerca della capacità V di una cisterna tronco-conica di cui si conoscono le

periferie p_s e p_i delle basi (superiore ed inferiore) e l'altezza. E chiaro che l'espressione esatta di V è

$$V = \frac{h}{12\pi}(p_s^2 + p_s p_i + p_i^2);$$

invece il calcolatore egiziano applica una regola equivalente alla formola

$$V = \frac{h}{36}\left(\frac{p_s + p_i}{2}\right)^2,$$

la quale non si può giustificare neppure considerandola come approssimativa e prendendo in conseguenza l'antico valore $\pi = 3$, a meno che non si ammetta col sig. BAILLET[23] si sia usata una espressione approssimativa di V di cui gli scritti eroniani offrono delle applicazioni[24] e poi ad un certo punto del calcolo sia stato fatto tacitamente un cambiamento di unità di misura.

L'angustia dello spazio non ci consente di aggiungere altro intorno al nuovo documento che viene ad arrichire in modo così notevole le notizie sicure intorno all' antica logistica greco-egiziana; ma il fin quì detto è a parer nostro sufficiente a dimostrare come non fossero infondate le speranze che i cultori delle matematiche riponevano nello studio degli antichi papiri: una nuova volta è dimostrato che ogniqualvolta uno di questi monumenti scritti è decifrato e spiegato, viene sollevato un lembo di quel fitto velo che tuttora avvolge la misteriosa terra de' Faraoni.

[1] In due passi ricordati da M. CANTOR a p. 20 dei *Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker* (Halle 1863).

[2] È fatta un eccezione a favore della frazione $\frac{2}{3}$, della quale però non era ignota la decomponibilità in $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$.

[3] In un importante passo di PLATONE (sul quale P. TANNERY rivolse l'attenzione degli storici nell' Introduzione al lavoro citato nella nota seguente) si scorge la schietta distinzione che si faceva ai suoi tempi fra i metodi di calcolo greci e gli egiziani.

[4] Cfr. P. TANNERY, *L'arithmétique des Grecs dans Héron d'Alexandrie* (Mém. de la société des sciences de Bordeaux **4**$_2$, 1882, p. 161—194) e *Questions héroniennes* (Bulletin des sciences mathém. **8**$_2$, 1884).

[5] P. TANNERY, *Notice sur les deux lettres arithmétiques de Nicolas Rhabdas* (Notices et extraits de la Bibliothèque nationale, **32**: 1, Paris 1886, p. 121—252).

[6] Così denominato perchè venne scoperto nell' alto Egitto, entro la necropoli di Akhmîm (l'antica Panopoli). Ora è conservato nel Museo di Gizeh.

[7] Mémoires publiés par les membres de la mission archéologique française au Caire sous la direction de M. U. BURIANT. T. IX. I Fascicule, Paris 1892. J. BAILLET, *Le papyrus mathématique d'Akhmîm,* p. 1—89 con 8 tavole in fototipia.

[8] Notices et extraits des manuscrits etc. T. **18**, II Partie, p. 25 e seg.

[9] Cfr. BAILLET, l. c., p. 37.

[10] Si potrebbe dubitare di quest' analogia di forma fra i due documenti percorrendo la traduzione del Papiro Rhind fatta dall' EISENLOHR ove la parola »Vorschrift« s'incontra ad ogni piè sospinto. Ma »Vorschrift« è per l'EISENLOHR equivalente ad una parola che L. RODET (Journal asiatique $\mathbf{18}_7$, 1881, p. 191), E. & V. REVILLOUT (v. la Nota *Sur l'équerre égyptienne et son emploi dans le papyrus mathématique* inserita a pag. 304—314 del T. II, 1882, della Revue égyptologique) tradussero per »articolo«; d'altronde che la parola »Vorschrift« porgesse un' idea del contenuto del Papiro anzidetto difforme dal vero era già stato avvertito da M. CANTOR (*Vorlesungen,* T. I, p. 20).

[11] Perciò passeremo sotto silenzio un' espressione singolare (v. BAILLET, l. c., p. 17—20) la cui interpretazione non influisce in alcun modo sul significato matematico del Papiro.

[12] Nella trascrizione delle tavole in cifre arabiche incorsero alcune sviste che non è inutile segnalare:

p. 23:	$\frac{1}{3}\,400 = 133\,\frac{2}{3}$	invece	di	$133\,\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{3}\,500 = 166\,\frac{1}{3}$	»	»	$166\,\frac{2}{3}$
	$\frac{1}{7}\,80 = 11\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{42}$	»	»	$11\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{14}\,\frac{1}{42}$
p. 27:	$\frac{1}{7}\,100 = 14\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{18}$	»	»	$14\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{28}$
	$\frac{1}{7}\,4000 = 571\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{42}$	»	»	$571\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{42}$
	$\frac{1}{8}\,700 = 86\,\frac{1}{2}$	»	»	$87\,\frac{1}{2}$.

[13] *Congetture e ricerche sull' aritmetica degli antichi Egiziani.* Biblioth. mathem. $\mathbf{6}_2$, 1892, 97—109. — Colgo con piacere quest' occasione per rilevare che non esiste fra il Prof. FAVARO e me quella divergenza di opinioni che egli credette additare in una sua recente pubblicazione (Atti del R. Istituto Veneto $\mathbf{4}_7$, 1893, p. 407—408).

[14] Nella nota intitolata *Ein mathematischer Papyrus in griechischer Sprache* (Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. p. 81—87) M. CANTOR segnalò delle analogie fra esse ed il *Calcolo di Vittorio.*

[15] E qui, a complemento delle nostre anteriori ricerche e congetture, osserveremo come il primo germe del concetto da noi ritenuto per fondamento delle decomposizioni riportate da AHMES esista forse nel loro sistema di misure di capacità. Essi infatti avevano per misura fondamentale la *bescha* di cui consideravano i multipli secondo 10 e 100 e le frazioni di denominatori 2, 4, ..., 64; la 320 parte della *bescha* era una nuova unità, il *ro*, di cui venivano considerati tutti i summultipli. Perciò gli Egiziani, quando avevano una frazione di *bescha*, cercavano quali e quante delle frazioni $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{64}$ fossero in essa contenute, cioè *sottraevano da quella frazione di bescha tanti termini della serie* $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{64}$ *finchè ottenessero un resto minore di* $\frac{1}{64}$; *questo multiplicavano per 320 e riducevano il risultato in interi e frazioni di ro* (cfr. EISENLOHR, *Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter*, 2[e] Aufl. [1891], p. 96—98, 191—192 e problemi 82—85). Orbene, la sottrazione indicata nelle precedenti parole sottosegnate non è forse analoga a quella di $\frac{n}{m}$ di tante frazioni del tipo $\frac{1}{mx}$ che noi supporremmo ajutare nella decomposizione delle frazioni qualunque in fondamentali?

[16] Queste relazioni si rilevano con una semplice ispezione del papiro Akhmîm.

[17] Val la pena di notare che nel papiro Rhind s'incontrano anche le seguenti espressioni di frazioni fondamentali come somme di altre:

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{192} \qquad \frac{1}{9}=\frac{1}{12}+\frac{1}{36}$$
$$\frac{1}{7}=\frac{1}{14}+\frac{1}{21}+\frac{1}{42} \qquad \frac{1}{81}=\frac{1}{108}+\frac{1}{324}.$$

[18] Inoltre in ERONE si trova la formola seguente

$$\frac{327}{512}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{73};$$

essa è evidentemente approssimata; la formola esatta sarebbe

$$\frac{327}{512}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{73+\frac{1}{7}}.$$

[19] Del resto la superiorità del formulario eroniano su quello racchiuso nel papiro di cui ci stiamo occupando è confermata dall' osservazione che delle frazioni $\frac{4}{5}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}, \frac{7}{12}, \frac{11}{12}$,

$\frac{5}{21}$ e $\frac{11}{21}$ vengono indicate due differenti decomposizioni in fondamentali e tre ne vengono suggerite per la frazione $\frac{163}{224}$.

20 Supposto $a=2$ e $b=5$, $c=7$, oppure $b=13$, $c=7$ si ottengono da questa le due formole

$$\frac{2}{35}=\frac{1}{30}+\frac{1}{42}, \qquad \frac{2}{91}=\frac{1}{70}+\frac{1}{130}$$

che, come si sa, nel papiro Rhind formano un gruppo isolato.

21 Ossia risolvere dei sistemi del tipo seguente

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\ldots, \qquad x+y+z+\ldots=s.$$

22 È noto che questa classe di problemi diede origine ad una discussione fra L. Rodet da un lato (*Journal asiatique* **18**$_7$, 1881, p. 184—232, 390—459), M. Cantor, A. Eisenlohr, Eugenio e Vittorio Revillout (*Revue égyptologique*, T. II, 1881, p. 287—303) dell' altro. Non è questo il momento di entrare in merito della questione; osservo soltanto che le idee del Rodet sembrano condivise dal sig. G. Milhaud (v. *Leçons sur les origines de la science grecque*, Paris 1893, p. 91 e seg.), ed aggiungo essere generalmente errata la seguente proposizione che il Rodet per ben tre volte ripete (l. c., p. 395, 399 e 424): »Toutes les fois qu'on fait subir à différentes quantités une même opération arithmétique, les résultats obtenus sont proportionels aux quantités dont on est parti». Se ciò fosse vero si avrebbe, qualunque fossero i numeri a e b, $\frac{f(a)}{f(b)}=\frac{a}{b}$, f rappresentando un' operazione aritmetica o un complesso di tali operazioni. Ora da tale eguaglianza emerge che $\frac{f(x)}{x}$ ha un valore costante k; allora si deduce $f(x)=kx$, onde quella proposizione vale soltanto se l'operazione è una semplice moltiplicazione, nel qual caso essa è di verità intuitiva ed è appunto in quest' unico caso che viene applicata da Ahmes.

23 Op. cit. p. 35.

24 Il lettore a cui non è ignoto il papiro Rhind ricorderà che ostacoli somiglianti presenti l'interpretazione di alcuni calcoli ivi eseguiti per risolvere certe questioni di geometria metrica: v. Eisenlohr, l. c., p. 76—77 e 86—91.

RECENSIONEN. — ANALYSES.

W. W. R. Ball. A SHORT ACCOUNT OF THE HISTORY OF MATHEMATICS. Second edition. London, Macmillan 1893. In-8°, XXIV + 520 p.

La première édition de cet ouvrage a paru en 1888, et elle a été analysée par M. LORIA dans la Bibliotheca Mathematica 1889, p. 56—58. A la fin de cette analyse nous nous permîmes d'exprimer le désir que M. BALL entreprît une révision complète de son ouvrage afin que les erreurs qui s'y étaient glissées malgré lui fussent corrigées. Maintenant nous sommes bien content de pouvoir constater que, dans la nouvelle édition, M. BALL a introduit un grand nombre de corrections; néanmoins, on trouve aisément qu'il y a encore certaines rectifications à faire pour la troisième édition. Ci-dessous nous nous permettons de signaler quelques-uns des passages où des modifications nous semblent nécessaires.

P. 127: »There are no Greek abaci now in existence». Dès en 1863, M. CANTOR appelait l'attention (*Mathematische Beiträge zum Culturleben der Völker,* p. 132) sur un grand *abacus* en marbre, trouvé en 1846 à Salamis, et il donnait une description détaillée de cet *abacus.*

P. 170: »GEBER IBN APHLA seems to have discovered the theorem that the sines of the angles of a spherical triangle are proportional to the sines of the opposite sides». M. SUTER (*Zur Geschichte der Trigonometrie;* Biblioth. Mathem. 1893, p. 7) a fait observer que ce théorème doit avoir été connu par plusieurs mathématiciens antérieurs à DSCHABIR BEN AFLAH.

P. 177. Le petit traité: *De similibus arcubus* n'a pas pour auteur JORDANUS, mais AHMED BEN JUSUF (voir STEINSCHNEIDER, Biblioth. Mathem. 1888, p. 114).

P. 256. WILLEBRORD SNELL naquit 1581, non 1591 (voir VAN GEER, *Notice sur la vie et les travaux de W. Snellius;* Arch. néerl. d. sc. exactes **18**, 1883, 453—468).

P. 277: »I think also that DESCARTES was the first to realize that his letters might represent any quantities, positive or negative». Autant que je sache, DESCARTES n'a pas employé des lettres (sans signe) pour désigner indifféremment des quantités positives ou des quantités négatives (voir p. ex. *La géométrie,* éd. HERMANN [1886] p. 76—79; cf. MANSION, Biblioth. Mathem. 1888, 63—64).

P. 349, 354. La *Methodus differentialis* n'a pas été publiée pour la première fois en 1736, mais déjà en 1711; STIRLING l'a

commentée en 1719 (*Methodus differentialis Newtoniana illustrata;* Philos. Trans. 1719, 1050—1070). On y lit (p. 1052): Anno vero 1711. tandem prodiit, inter alios ejusdem Authoris tractatus, ipsa Methodus Differentialis plenius quam ante exposita, cum fundamento ejus demonstrato.

P. 377, 389. »NICOLE was the first to publish a systematic treatise on finite differences. TAYLOR ... had been led to give a sketch of the subject in his *Methodus.* — TAYLOR ... is usually recognized as the creator of the theory of finite differences». Dans mon mémoire: *Differenskalkylens historia.* I. (Upsala universitets årsskrift 1878), j'ai démontré que TAYLOR est le véritable inventeur de la théorie des différences finies; NICOLE n'a que donné une exposition de la partie la plus élémentaire de cette théorie. Le »well-arranged *book*» publié par NICOLE en 1717, dont parle M. BALL, est un petit traité inséré dans les Mémoires de l'académie des sciences de Paris et contenant 13 pages in-4°.

Le style de M. BALL est en général soigné, mais parfois on trouve dans son livre des expressions plus ou moins inexactes. Ainsi p. ex. le *Triparty* de CHUQUET est appelé (p. 210) »a *small* treatise» (il contient environ 200 pages imprimées in-4°), et le traité *De triangulis* de REGIOMONTANUS est dit (p. 206) »printed in five *volumes*»; de même, M. BALL indique (p. 167) que la *Scientia stellarum* d'ALBATEGNI fut »published by REGIOMONTANUS at Nuremberg in 1537» (REGIOMONTANUS mourut déjà en 1476, et c'était MELANCHTON qui publia le traité d'après le manuscrit laissé par REGIOMONTANUS). — Parmi les fautes de plume nous signalons »Maralois» (p. 238, 512) au lieu de MAROLOIS.

Les nombreuses citations d'écrits historiques et biographiques insérées dans l'ouvrage de M. BALL seront sans doute très utiles pour les lecteurs auxquels il s'adresse en premier lieu. Ces citations montrent aussi que M. BALL poursuit lui-même avec ardeur son étude de l'histoire des mathématiques; nous regrettons seulement qu'il n'ait pas jugé convenable de signaler aucun des importants écrits de M. LORIA (p. ex. à la page 450 la monographie: *Die hauptsächlichsten Theorien der Geometrie in ihrer früheren und heutigen Entwickelung* [1888]).

Stockholm. G. ENESTRÖM.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von || journal d'histoire des mathématiques publié par G. Eneström. Stockholm. 8°.

1893: 2. — [Analyse de l'année 1892:] Fiziko-matem. naouki **12**, 1893, 63—68. (V. Bobynin.)

Физико-математическія науки въ ихъ настоящемъ и прошедшемъ. Журналъ издаваемый В. В. Бобынинымъ. Москва. 8°.

1892: 2; 1893: 1. — Les sciences mathématiques dans leur état actuel et passé. Journal publié par V. V. Bobynin.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von M. Cantor. Leipzig. 8°.

38 (1893): 4—5. — [Analyse de l'année 1891:] Fiziko-matem. naouki **11** (1892), 1893, 84—88.

Baillet, J., Le papyrus mathématique d'Akhmîm.

Mémoires publiés par les membres de la mission archéologique française au Caire **9**, 1892, 1—89 + 8 pl.

Berthold, G., Notizen zur Geschichte der Physik.

Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 121—125.

Bertrand, J., Michel Chasles.

Revue scientifique **50**, 1892, 801—807.

БОБЫНИНЪ, В. В., Очерки исторіи расвитія физико-математическихъ знаній въ Россіи. Эпоха государственнаго содѣйствія развитію научныхъ знаній.

Fiziko-matem. naouki **11** (1892), 1893, 67—83. — Bobynin, V. V., Esquisses d'histoire du développement des connaissances mathématiques et physiques en Russie. Epoque de l'appui du gouvernement pour le développement des connaissances scientifiques.

БОБЫНИНЪ, В. В., Преподаванiе ариѳметики въ индусскихъ школахъ.

Fiziko-matem. naouki **12**, 1893, 58—62. — Bobynin, V. V., L'enseignement de l'arithmétique dans les écoles indiennes.

Cantoni, G., Sul valore filosofico degli scritti di Galileo Galilei.

Roma, Accad. d. Lincei, Rendiconti 1_5: 2, 405—410.

°**Cleomedes**, De motu circulari corporum caelestium libri duo. Ad novorum codicum fidem edidit et latina interpretatione instruxit H. Ziegler. Leipzig, Teubner 1891.

8°, VI + 258 p. — [2·70 Mk.]

Favaro, A., Delle case abitate da Galileo Galilei in Padova.

Padova, Accad. d. sc., Atti e memorie **9**, 1893, 225—268.

Galdeano, Z. G. de, Ernesto Eduardo Kummer. Necrologia.

El progreso matem. **3**, 1893, 234—236.

Galilei, G., Opere. Edizione nazionale sotto gli auspicii di sua maestà il re d'Italia. Volume III. Parte prima. Firenze 1892.
4°, 399 p. — Edition publiée sous la direction de M. A. FAVARO.

°**Goldbeck, E.**, Descartes' mathematisches Wissenschaftsideal. Berlin 1893.
8°, 42 p. — [1·20 Mk.]

Heppel, G., The use of history in teaching mathematics.
Association for the improvement of geometrical teaching, Report **19**, 1893, 19—32.

Hultsch, F., Die Näherungswerte irrationaler Quadratwurzeln bei Archimedes.
Göttingen, Gesellsch. d. Wissensch., Nachrichten 1893, 367—428 + 2 pl.

Huygens, Chr., Oeuvres complètes publiées par la société hollandaise des sciences. Tome cinquième. Correspondance 1664—1665. La Haye, Nijhoff 1893.
4°, 625 p. + 3 pl.

°**Jamblichus**, De communi mathematica scientia liber. Ad fidem codicis Florentini edidit N. FESTA. Leipzig, Teubner 1891.
8°, X + 153 p. — [1·80 Mk.]

Karagiannides, A., Die Nichteuklidische Geometrie vom Alterthum bis zur Gegenwart. Eine historisch-kritische Studie. Berlin, Mayer & Müller 1893.
8°, (2) + 44 p. — [1·60 Mk.]

Lampe, E., Ernst Eduard Kummer. Nachruf.
Naturwissenschaftliche Rundschau (Braunschweig) **8**, 1893, 361—364.

Loria, G., L'odierno indirizzo e gli attuali problemi della storia delle matematiche.
Biblioth. Mathem. 1893, 39—46. — Résumé d'un discours prononcé en 1892 au congrès historique italien (cf. ci-dessus p. 61).

Loria, G., Ancora sul teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche.
Biblioth. Mathem. 1893, 47—50. — Rivista di matem. **3**, 1893, 105—108.

Loria, G., Le scienze esatte nell' antica Grecia. Libro I. I geometri greci precursori di Euclide.
Modena, Accad. d. sc., Memorie $\mathbf{10}_2$, 1893. 168 p. + 2 pl.

Mittag-Leffler, G., Sophie Kovalevsky.
Acta Mathem. **16**, 1893, 385—392 + portrait.

°**Obenrauch**, Monge, der Begründer der darstellenden Geometrie. Eine historische Studie. I. Brünn 1893.
8°. — [1·50 Mk.]

Ovidio, E. d', Sopra alcune classi di sizigie binarie.
Torino, Accad. d. sc., Atti **28**, 1893. 8 p. — Note historique.

Riccardi, P., Sopra un codice ebraico contenente alcuni scritti matematici ed astronomici.
Biblioth. Mathem. 1893, 54—56.

Riccardi, P., Osservazione intorno alla nota del prof. A. Favaro sull' Algebra del Bombelli.
Biblioth. Mathem. 1893, 64.

Ritter, F., François Viète, inventeur de l'algèbre moderne.
Association française pour l'avancement des sciences (congrès de Pau) 1892, t. II, 17—25.

Ritter, F., L'algèbre nouvelle de François Viète.
Association française pour l'avancement des sciences (congrès de Pau) 1892, t. II, 177—182.

Ritter, F., La trigonométrie de François Viète.
Association française pour l'avancement des sciences (congrès de Pau) 1892, t. II, 208—212.

РОЗЕНБЕРГЕРЪ, Ф., Очеркъ исторіи физики. III: 1. Переводъ подъ ред. И. Сѣченова. Санктъ-Петербургъ 1892.
8°, 326 p. — Rosenberger, F., Aperçu de l'histoire de la physique. III: 1. Traduction rédigée par I. Sjetchenoff.

Steinschneider, M., Mathematische Werke in hebräischen Übersetzungen.
Biblioth. Mathem. 1893, 51—53.

°**Sterner, M.,** Principielle Darstellung des Rechenunterrichtes auf historischer Grundlage. I. Geschichte der Rechenkunst. München 1891.
8°, XII + 533 p. — [6 M.]

Studnicka, F. J., Algorismus prosaycus Magistri Christiani anno fere 1400 scriptus. Prag 1893.
8°, 17 p. — [0·50 Mk.] — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 198—199. (Cantor.)

Suter, H., Der V. Band des Katalogs der arabischen Bücher der vice-königlichen Bibliothek in Kairo. Aus dem Arabischen übersetzt und mit Anmerkungen versehen. (Schluss.)
Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 161—184.

Suter, H., Nachtrag zu meiner Übersetzung des Mathematiker-Verzeichnisses im Fihrist des Ibn Abî Ja'kûb an-Nadim.
Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 126—127.

Valentin, G., Die beiden Euclid-Ausgaben des Jahres 1482.
Biblioth. Mathem. 1893, 33—38.

Zanotti Bianco, O., Sulla scoperta del potenziale.
Rivista di matem. **3**, 1893, 114.

Question 42 [sur une formule pour l'ajustement d'une série de valeurs observées].
Biblioth. Mathem. 1893, 64. (G. Eneström.)

Ball, W. W. R., Mathematical recreations and problems of past and present times. London, Macmillan 1892. 8°.
New York, Mathem. soc., Bulletin **2**, 1892, 37—46. (J. E. Oliver.) — Mathesis 3_2, 1893, 65—66.

BURKHARDT, H., Bernhard Riemann. Vortrag, bei der am 20. Juli 1891 vom mathematischen Verein zu Göttingen veranstalteten Feier der 25. Wiederkehr seines Todestages. Göttingen 1892. 8°.
Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 66. (CANTOR.)

CANTOR, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Zweiter Band. Von 1200—1668. Zweiter Theil. Leipzig, Teubner 1892. 8°.
Bullet. des sc. mathém. $\mathbf{17}_2$, 1893, 57—65. (P. TANNERY.)

FAVARO, A., Per il terzo centenario dalla inaugurazione dell' insegnamento di Galileo Galilei nello studio di Padova. Firenze 1892.
Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 197—198. (CANTOR.)

GRAF, J. H., Das Leben und Wirken des Physikers und Astronomen Johann Jacob Huber aus Basel (1733—98). Bern 1892. 8°.
Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 63. (CANTOR.)

LAMPE, E., Die Entwickelung der Mathematik im Zusammenhange mit der Ausbreitung der Kultur. Rede. Berlin 1893. 8°.
El progreso matem. **3**, 1893, 64. — Jornal de sc. mathem. **9**, 1893, 126. (G. T.)

MEYER, F., Bericht über den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie. (Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung **1**, 1892.)
Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 141—144. (H. BURKHARDT.)

MÜLLER, F., Zeittafeln zur Geschichte der Mathematik, Physik und Astronomie bis zum Jahre 1500, mit Hinweis auf die Quellen-Literatur. Leipzig, Teubner 1892. 8°.
Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{17}_2$, 1893, 108—110. (P. TANNERY.)

Omaggi a Galileo Galilei per il terzo centenario dalla inaugurazione del suo insegnamento nel Bò pubblicati per cura della R. Accademia di Padova. Padova 1892. 4°.
Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 197—198. (CANTOR.)

REBIÈRE, A., Mathématiques et mathématiciens. Pensées et curiosités. Deuxième édition, revue et augmentée. Paris, Nony 1893. 8°.
Biblioth. Mathem. 1893, 57—60. (G. ENESTRÖM.) — Mathesis $\mathbf{3}_2$, 1893, 132—133. (P. M.)

Mathematisches Abhandlungsregister. 1892. Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni.
Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 149—160.

[Listes d'ouvrages récemment publiés.]
Biblioth. Mathem. 1893, 60—63. — Fiziko-matem. naouki **11** (1892), 1893, 89—112; **12**, 1893, 69—80. — Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 146—148, 199—200.

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

43. Dans son ouvrage *Mathématiques et mathématiciens* (2e éd., Paris 1893, p. 273—274), M. A. Rebière a donné quelques petites notices sur les mathématiciennes décédées; pour ce qui concerne les mathématiciennes vivantes, les matériaux semblent lui avoir manqué. Mais comme il est sans doute d'un certain intérêt d'apprendre quel rôle jouent actuellement les femmes dans le domaine des mathématiques, j'ai réuni tous les renseignements sur les mathématiciennes vivantes que j'ai pu trouver. Il est néanmoins à présumer que ces renseignements sont très incomplets et pour y remédier je me permets de faire appel aux lecteurs de la Bibliotheca Mathematica et aux mathématiciennes elles-mêmes. Pour chacune d'entre elles, je désire avoir une petite notice biographique et une liste des écrits qu'elle a publiés.

En ce moment j'ai des renseignements plus ou moins complets sur les mathématiciennes suivantes:

Amort, Anna (Jicin?, Bohème).
Blackwood, Elisabeth (London?).
Bortniker L. (Paris?).
Bouwmeester, S. (Rotterdam?).
Bryant, Sophia (London?).
Gaio, Olimpia (Firenze?).
de Haas, Carolina (Rotterdam).
Ladd-Franklin, Christine (Baltimore).
Marks, Sarah (London?).
Perrin, Emily (Cheltenham?, England).
Pompilianu, Mlle (Bukarest).
Prime, F. (Bruxelles).
Scott, Charlotte A. (Bryn Mawr, U. S. A).
Wijthoff, A. G. (Amsterdam).

(G. Eneström.)

Inhalt. — Table des matières.

STOCKHOLM, TRYCKT I CENTRAL-TRYCKERIET, 1893.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK | JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON | PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1893. STOCKHOLM. N° 4.

NEUE FOLGE. 7. | Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr. | NOUVELLE SÉRIE. 7.

BERLIN. MAYER & MÜLLER. Markgrafenstrasse 51. | PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Note sur la résolution géométrique d'une équation du 3e degré par Archimède.

Par H. G. ZEUTHEN à Kjöbenhavn.

On sait qu'ARCHIMÈDE, dans son second livre sur la sphère et le cylindre, réduit la question »de diviser une sphère par un plan en deux segments dont le rapport est donné» à la proportion suivante:

(1) $$DB^2 : DX^2 = XZ : TZ,$$

D, B, T et Z étant des points connus d'une droite et X un point inconnu qui doit se trouver sur le segment DB de la même droite.[1] Dans le manuscrit conservé par EUTOCIUS dont je vais parler, cette proportion est remplacée par l'égalité de deux parallèlépipèdes

(2) $$DB^2 . TZ = DX^2 . XZ.$$

L'une et l'autre de ces deux formes n'est que la représentation familière aux anciens de l'équation qu'en conservant la homogénéité nous écririons

(3) $$x^2(a-x) = b^2c$$

ou

(4) $$x^3 - ax^2 + b^2c = 0.$$

ARCHIMÈDE promet de résoudre »à la fin» cette équation; sa remarque que la question générale a un diorisme (c'est à

dire: condition de possibilité), qui n'entre pas en vigueur pour la question particulière sur la division de la sphère, montre bien qu'il veut traiter la question générale.

La résolution promise manque à la fin du livre qui nous est conservé, mais on admet assez généralement qu'un manuscrit trouvé par Eutocius[2] a contenu la véritable fin du livre. Malheureusement le texte trouvé était alors assez maltraité, et Eutocius ne nous en communique que sa propre réstitution; mais on voit, en tous cas, que la valeur de x a été déterminée comme abscisse d'un point d'intersection de la parabole

$$x^2 = \frac{b^2}{c} y$$

et de l'hyperbole

$$y(a-x) = ec,$$

et que le diorisme a dépendu du contact ayant lieu entre ces deux courbes, au point $x = \frac{2}{3} a$, dans le cas où $b^2 c = \frac{4}{27} a^3$; la condition d'intersection des deux courbes est $b^2 c < \frac{4}{27} a^3$.

Hésitant — de même que M. Cantor, qui en est un meilleur juge que moi — à regarder les raisons philologiques et historiques comme absolument décisives pour regarder le manuscrit comme une copie plus ou moins directe de la fin du livre d'Archimède, j'ai étudié, dans mon livre déjà cité, les raisons qu'on pourrait tirer de la connexion mathématique. Grace aux remarques déjà citées d'Archimède sur le diorisme de la question générale et aux remarques qu'on trouve ailleurs dans les oeuvres d'Archimède sur certaines autres questions qu'il se déclare capable de résoudre, j'ai constaté qu'Archimède devait être en possession de la résolution et du diorisme, non seulement de l'équation en question, mais aussi de celle que nous écririons

(5) $$x^3 + ax^2 - b^2 c = 0,$$

et qui ne différerait de celle à laquelle Archimède a réduit la division de la sphère que par l'ordre des points donnés D, B, T et Z. Vu que la résolution et la discussion communiquées par Eutocius correspondent exactement à ces exigences, et qu'elle a bien le caractère des mathématiques d'Archimède et de ses contemporains, il est peut-être rendu assez probable que la résolution d'Eutocius est en vérité celle qu'a donnée Archimède »à la fin» du livre. La seule doute qui me restât encore provenait du fait que déjà Dioclès, ne sachant rien sur

cette solution donnée à la fin, reproche à ARCHIMÈDE de s'être borné à réduire la question à une autre qu'il ne résout pas. Il serait donc possible que la promesse d'ARCHIMÈDE fût une interpolation au moyen de laquelle un éditeur aurait essayé d'expliquer cette omission d'une manière moins défavorable pour ARCHIMÈDE. Regardant comme certain qu'ARCHIMÈDE n'aurait été satisfait que d'une résolution complète du problème qu'il s'est posé, j'ai donc émis la conjecture qu'un travail antérieur de lui-même ou d'un autre — et alors probablement celui qu'a retrouvé EUTOCIUS — lui permettait de regarder comme connue la solution de l'équation cubique à laquelle il réduit ce problème. Alors sa réduction suffirait et serait analogue à celle du problème suivant du même livre, qu'il réduit à la construction bien connue des deux moyennes géométriques.

Cette conjecture deviendra superflue si l'on peut trouver des raisons particulières pour expliquer la place de la résolution de l'équation cubique *à la fin* du second livre sur la sphère et le cylindre. A cet effet, je me suis demandé les motifs qui auraient pu porter ARCHIMÈDE à remettre cette solution. Il y en a un qui se présente immédiatement: celui qu'elle demande l'usage des sections coniques et qu'elle diffère ainsi des autres recherches consignées dans ce livre. En considérant les propositions suivantes du livre j'en ai trouvé un autre qui rendrait encore plus naturelle la place de la solution. On verra en effet qu'au nombre des questions sur les segments de sphère qui occupent ARCHIMÈDE, il y en a une dont il commence à traiter à la fin du livre conservé mais dont la solution complète demande et la résolution et le diorisme de son équation cubique.

Selon un manuscrit arabe conservé,[3] le geomètre ALKÛHÎ commence un travail, auquel j'aurai à revenir toute à l'heure, par la remarque qu'il y a une lacune à combler dans le livre d'ARCHIMÈDE qui nous occupe. ALKÛHÎ a dit »qu'il y a là trois constructions qui rentrent dans la même catégorie, dont la première est celle d'un segment de sphère qui, de deux autres segments de sphères, est égal à l'un et semblable à l'autre. La seconde, celle d'un segment de sphère dont la surface est égale à celle d'un autre segment de sphère, et qui est semblable à un second segment de sphère. La troisième, celle d'un segment de sphère égal à un autre segment de sphère, et dont la surface est égale à celle d'un segment de sphère. ARCHIMÈDE — continue ALKÛHÎ — résolut les deux premiers problèmes (sphère et cylindre II, 5 et 6) sans s'occuper du troisième qui ne fut pas ajouté non plus aux deux autres par les geomètres qui lui succédèrent.»

Le passage cité ici montre que je ne suis pas le seul qui trouve que la question d'un segment de sphère dont le volume et la surface courbe sont donnés s'impose aux lecteurs du livre d'Archimède; mais Alkûhî a tort en niant nettement qu'Archimède s'en soit occupé. En effet, l'usage des géomètres grecs ne permettait pas même d'énoncer un problème qui devient impossible dans certaines conditions, sans y ajouter le diorisme, dont la *nécessité* devait être démontrée dans une proposition précédente. La résolution du problème devait servir de son côté à montrer la *suffisance* de la condition énoncée dans le diorisme.[4] Dans le cas actuel, le diorisme du problème de construire un segment de sphère égal à un segment donné, A, et ayant la même surface courbe qu'un autre, B, doit demander que le segment A ne soit pas plus grand qu'un hémisphère à la même surface courbe que le segment B. La nécessité de cette condition est démontrée dans la 9ème et dernière proposition du livre d'Archimède qui énonce que l'hémisphère est le plus grand des segments de sphère qui ont une surface courbe donnée.

De l'autre côté, les propositions énonçant des théorèmes de *maximum* ou de *minimum* sont toujours, dans la géométrie ancienne, suppléées par les problèmes conduisant aux constructions qui en démontrent la suffisance. Le théorème 20 du premier livre des éléments d'Euclide, qui énonce les conditions auxquelles doivent satisfaire les côtés d'un triangle, est suppléé par la construction d'un triangle à côtés donnés qui satisfont à ces conditions (22). Le théorème VI, 27 sur le parallélogramme maximum à un angle donné et à une somme donnée des côtés est suppléé par la construction VI, 28 du parallélogramme dont encore l'aire est donnée. Dans le 5me livre des Coniques Apollonius trouve les conditions auxquelles doit satisfaire un point d'où sortent des normales à une [partie bien déterminée d'une] conique avant d'en indiquer la construction;[5] et Apollonius nous apprend expressément dans la préface du 7me livre que les valeurs *maximae* et *minimae* qu'il y établit seront utiles aux diorismes des problèmes qu'il va résoudre dans le huitième livre, remarque qui a fait la base de la réstitution de ce livre par Halley.[6]

Suivant l'usage ordinaire des anciens, le 9me théorème du second livre sur la sphère et le cylindre demande donc un supplément contenant la construction dont ce théorème établit le diorisme.

Archimède a voué à ce théorème maximum un intérêt tout particulier; il suffit de rappeler à cet egard qu'en envoyant premièrement un faux résultat à Alexandrie, il réussit à con-

fondre les géomètres qui essayaient de s'approprier les propositions trouvées par lui en les démontrant.[7] Il n'aura donc pas, certainement, oublié son obligation de le suppléer par la résolution du problème qui s'y attache. Alors il aura eu à sa disposition les équations exprimant que le volume et l'aire courbe du segment ont des valeurs données:

$$(6) \qquad \left(\frac{3}{2}x-y\right)y^2=d^2f, \qquad xy=g^2,$$

où j'ai désigné par x et y le diamètre de la sphère et la hauteur du segment cherché, par d et f le rayon de la base et la hauteur du cône auquel le segment doit être égal, et par g le rayon du cercle auquel sa surface courbe doit être égale. Les différentes transformations exécutées par ARCHIMÈDE dans le même livre nous garantissent qu'il a bien été en état d'en déduire l'équation suivante:

$$(7) \qquad x^2\left(\frac{3}{2}g^4-d^2fx\right)=g^6,$$

ou bien l'équation (3) dont nous nous sommes déjà occupé

$$x^2(a-x)=b^2c,$$

où

$$a=\frac{3}{2}\frac{g^4}{d^4f}, \qquad b^2c=\frac{g^6}{d^2f},$$

exprimée, bien entendu, dans son langage géométrique ordinaire. De cette façon le problème sera réduit précisément à celui dont ARCHIMÈDE nous promet la résolution »à la fin», et il présente une véritable application du diorisme dont il parle aussi. On en déduit que la résolution sera possible si

$$g^3 \geqq \sqrt{2} \, . \, d^2f,$$

et que dans le cas limite $x=\sqrt{2}\, .\, g$, $y=\frac{g}{\sqrt{2}}$, ce qui correspond au cas où le segment est un hémisphère.

Selon nous, ARCHIMÈDE a donc remis la résolution à la fin, parce que le dernier problème dont il devait s'occuper — celui qui nous est annoncé par le dernier théorème du texte conservé — en dépend aussi et en demande même une discussion plus complète que la division de la sphère. Il est vrai que la communication d'EUTOCIUS ne contient rien sur cette application; mais vu l'état du manuscrit qu'il a retrouvé et le fait

qu'il ne se présentait pas immédiatement comme un appendice au livre d'ARCHIMÈDE, il n'en est permis de conclure rien. L'appendice promis doit avoir contenu en tout cas le supplément nécessaire au théorème 9.

Qu'on n'objecte pas que dans le n° 9 de son livre ARCHIMÈDE ait démontré ce théorème, que nous regardons ici comme une conséquence du diorisme de la construction des racines de l'équation cubique, sans faire aucun usage de coniques et du contact devant avoir lieu entre elles dans le cas du segment maximum. Il suffit, pour y répondre, de renvoyer à l'autre résolution d'un problème solide qui nous est conservée complétement: la construction d'APOLLONIUS des normales menées d'un point donné à une conique (5[e] livre des Coniques). Sans doute la condition de sa possibilité a été trouvée par la même analyse qui a conduit à la construction: elle est une conséquence de la condition de contact de la conique donnée avec l'hyperbole servant à déterminer les points auxquels appartiennent les normales; mais l'auteur ne fait pas usage de cette hyperbole dans la démonstration de la nécessité de la condition de possibilité — ou plutot dans la démonstration de l'impossibilité dans le cas où le point donné ne satisfait pas à cette condition (Coniques V, 51 pour la parabole, et 52 pour les autres coniques).[8] Il n'est donc pas moins naturel que, dans sa démonstration du théorème 9, ARCHIMÈDE a évité de faire usage des coniques, quand même il aurait *trouvé* ce théorème par la même analyse qui a conduit à la construction d'un segment dont le volume et l'aire courbe sont donnés.

La démonstration de ce théorème est du reste incomplète dans le texte conservé; mais elle est très facile à réstituer. Abstraction faite des détours qui résultent de la circonstance qu'ARCHIMÈDE indique le volume d'un segment en déterminant la hauteur d'un cône sur la même base qui a le même volume, on peut la rendre de la manière suivante dans le langage algébrique moderne.

Il résulte de la seconde équation (6) que

$$\left(g\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{x}{2}\cdot y, \tag{8}$$

et que, par conséquent, si y n'est pas égal à $g\sqrt{\frac{1}{2}}$,

$$\frac{x}{2} > g\sqrt{\frac{1}{2}} > y \quad \text{ou} \quad \frac{x}{2} < g\sqrt{\frac{1}{2}} < y.$$

On en conclut que

$$(9) \qquad g\sqrt{\frac{1}{2}}\left(x - g\sqrt{\frac{1}{2}}\right) > y(x-y)$$

(ce qu'on voit immédiatement par la construction ordinaire des moyennes géométriques des facteurs des deux membres de l'inégalité). On trouve ensuite par l'addition des deux membres de l'équation (8) à ceux de l'inégalité (9) que

$$(10) \qquad g\sqrt{\frac{1}{2}}\,.\,x > y\left(\frac{3}{2}x - y\right)$$

et, comme

$$\frac{g^2}{x} = y,$$

$$(11) \qquad g^3\sqrt{\frac{1}{2}} > y^2\left(\frac{3}{2}x - y\right).$$

En divisant par 3 on voit que l'hémisphère au rayon $g\sqrt{\frac{1}{2}}$ est plus grand que le segment à la hauteur y de la sphère au diamètre x. Cette démonstration[9] est assez simple pour la préférer à celle qui dépend de l'usage de coniques dont il n'y aura besoin immédiat que dans la construction devant suivre, selon l'usage des anciens, au théorème. De l'autre côté elle n'explique pas si bien la découverte de son résultat que l'analyse qui a dû conduire à cette construction.

Nous devons encore dire quelques mots sur la résolution du même problème stéréométrique trouvée par Alkûhî. Ce savant arabe ne le réduit pas à l'équation cubique (3), bien que sa résolution lui fût connue par Eutocius. Il déduit immédiatement des deux équations (6) l'équation suivante:

$$(12) \qquad y^2 = \frac{3}{2}g^2 - \frac{d^2 f}{g^2}x$$

qu'on obtient en multipliant la première équation par x et en la réduisant ensuite au moyen de la seconde. L'équation (12) représente une parabole; en la combinant avec l'hyperbole représentée par la seconde équation (6), on trouve les valeurs cherchées de x et y. Les deux courbes étant exactement de la même nature et ayant, l'une par rapport à l'autre, la même position que celles dont se sert Archimède selon Eutocius, Alkûhî a pu profiter de l'étude géométrique de leur contact

contenue au manuscrit conservé par le dernier auteur, pour trouver les conditions de possibilité.

La construction d'ALKÛHÎ est essentiellement identique à celle que, dans l'antiquité, DIONYSODORE a inventée[10] des racines de l'équation d'ARCHIMÈDE, mais comme l'auteur arabe ne réduit pas son problème à cette équation, il le doit probablement à sa propre invention guidée seulement par les suggestions puisées à l'étude d'ARCHIMÈDE et d'EUTOCIUS. Elle lui fait donc beaucoup d'honneur, et quoique il ait pu puiser immédiatement dans EUTOCIUS sa recherche de la condition de possibilité, il se sépare avantageusement de la plupart de ses compatriotes, en ne négligeant pas ce diorisme. Cependant ses mérites ne doivent pas nous faire oublier ceux de son grand modèle. Bien que nous ne possédions immédiatement de la main d'ARCHIMÈDE aucune résolution du problème dont nous avons parlé ici, son 9e théorème contient le résultat qui en serait le meilleur fruit, et la résolution que nous lui avons attribuée, n'est qu'une application très simple de ce que nous trouvons dans son second livre et dans le manuscrit d'EUTOCIUS.

[1] ARCHIMEDIS *Opera*, ed. HEIBERG, p. 214. Voir encore mon travail: *Keglesnitslæren i Oldtiden* dans les Mémoires de l'académie royale des sciences et des lettres du Danemark 6e série, t. III, p. 157 et suiv., ou l'édition allemande: *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum* p. 238 et suiv. Dans les citations suivantes je désignerai ces deux livres respectivement par Z_1 et Z_2.

[2] ARCHIMEDIS *Opera*, ed. HEIBERG, t. III, p. 152—181.

[3] Voir l'édition de l'*Algèbre d'Omar Alkhayyâmî* par WOEPCKE, p. 104.

[4] Dans un livre qui vient de paraître: *Forelæsning over Mathematikens Historie. Oldtid og Middelalder*, je montre (p. 78—79) qu'un but essentiel des constructions des anciens est de servir de démonstrations d'existence.

[5] Voir Z_1, p. 187 et suiv.; Z_2, p. 288 et suiv.

[6] Voir Z_1, p. 257, 258; Z_2, p. 403 et suiv.

[7] ARCHIMEDIS *Opera*, ed. HEIBERG, t. II, p. 6.

[8] Voir Z_1, p. 189; Z_2, p. 292.

[9] Dans le texte conservé l'inégalité (9) n'est enoncé que pour le dernier des alternatives qui la précèdent ici.

[10] ARCHIMEDIS *Opera*, ed. HEIBERG, t. III, p. 180. Z_1, p. 164; Z_2, p. 250.

Die Mathematik bei den Juden.

Von MORITZ STEINSCHNEIDER in Berlin.

4. Literatur.

Allgemeine Schriften, welche insbesondere für unsere *Bibliographie* zu benutzen wären, giebt es kaum. POGGENDORFF's *Biographisch-Literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften* (Leipzig 1858) reicht selbst für europäische Literatur nicht aus,[13] geschweige für hebräische, wie für arabische.[14] Dieses Werk ist jedoch überhaupt dem Plane nach nicht auf minder bedeutende, entlegene, dunkle und zweifelhafte Stoffe eingerichtet. Hingegen ist die weitschichtige *Bibliographie générale de l'astronomie par* HOUZEAU *et* LANCASTER (T. I, Bruxelles 1887) auf Vollständigkeit berechnet, ermangelt aber leider in Bezug auf Hebräisches und Arabisches der Specialkenntniss, — die allerdings nur unter Mitwirkung eines Fachmannes erreichbar ist — daher auch meist aus veralteten, nicht mehr brauchbaren Quellen ohne Kritik zusammengelesen; ein grosses in neueren Katalogen und Abhandlungen niedergelegtes Material blieb unberührt.[15] Es wird sich nicht lohnen, im Verlauf der gegenwärtigen Abhandlung dieses Buch überhaupt zu berücksichtigen, da in unserem engeren Kreise, so weit ich gesehen, nicht einmal die Fehler originell sind.

Die *biblische* Zeit ist hier von vorne herein ausgeschlossen, und sei nur ausnahmsweise eine Monographie erwähnt: J. J. SCHMIDT, *Biblischer Mathematicus, oder Erläuterung der H. Schrift aus den mathematischen Wissenschaften,* Lüttichau 1763, 8° (*Catalogue de la Bibliothèque* etc. *du feu Joseph Almanzi,* Padoue 1864, n. 1914).

Eine streng wissenschaftliche *Einteilung* der wenigen Schriften, die hier folgen sollen,[16] ist nicht gut ausführbar; es wird unsere Übersicht nach gewissen *Gruppen* auch nicht auf Vollständigkeit Anspruch machen dürfen.

A) *Zusammenstellungen* von jüdischen Schriften enthält der erwähnte Artikel »Jüdische Literatur« in der *Realencyclopädie* von ERSCH und GRUBER, oder die englische Übersetzung *Jewish Literature,* wozu eben ein Autorenregister (Frankfurt a/M. bei J. Kauffmann) erschienen ist. — Die vollständige Literatur der *Übersetzungen* ins Hebräische habe ich in meiner Preisschrift darüber gegeben; s. die Notiz darüber in dieser Zeitschrift (1893, S. 51). — 77 hebräische Druckwerke, und einige Ar-

tikel in Zeitschriften, hauptsächlich über Chronologie und Kalenderwesen und einiges über Mathematisches, verzeichnet CH. J. GURLAND in seinem hebräisch-russischen Kalender für das Jahr 643 (1882—83) Jahrgang VI, Seite 112—118. — Werke über vergleichende Berechnung, insbesondere Kalender-*Tafeln* verzeichnet ISIDORE LOEB (leider so früh verstorben) in seinen vorzüglichen *Tables du Calendrier juif* (Paris 1886, in 4°).[17]

Ich stelle noch hierher die hebräische Schrift *Bikkure ha-Limmudijjot* (Erstlinge der Mathematik), von BARUCH LEWENSTEIN B. SALOMO, Erklärung der mathematischen Stellen in den Schriften von ABRAHAM IBN ESRA, MAIMONIDES und JOSEF DEL MEDIGO, Warschau 1863, 37 S. u. Kupfertaf. (*Hebr. Bibliogr.* X, 91).

B) Kürzere Angaben von mathematischen Schriften überhaupt (auch griechischer und arabischer Autoren) finden sich in Encyklopädien, methodologischen Anweisungen und dergl., wie bei ABRAHAM BAR CHIJJA (um 1116—1130) in seiner mathematischen Encyklopädie; die betreffende Stelle ist in der *Hebräischen Bibliographie* VIII, 84 behandelt; vgl. Zeitschrift f. Mathematik **10**, 1865, 466; **12**, 1867, 10. — JOSEF IBN AKNIN, geboren im Magreb, später Schüler des MAIMONIDES, gestorben 1226 in Aleppo, verfasste ein arabisches Sittenwerk worin ein Kapitel eine Anleitung zum Studium überhaupt, also auch zur Mathematik enthält. Dieses Kapitel, auch in hebräischer Übersetzung handschriftlich erhalten, ist 1874 von GÜDEMANN edirt und deutsch übersetzt; die literarischen Nachrichten habe ich wiederholt besprochen (Zeitschr. f. Mathem. **10**, 1865, 465; *Hebr. Bibliogr.* XIV, 38; cf. *Hebr. Übersetz.* S. 33). — JEHUDA SAMUEL ABBAS (wahrscheinlich im XIII. Jahrh. in Spanien) widmet ebenfalls ein Kapitel seiner hebräischen Schrift einem Wegweiser für das Studium, welcher zusammen mit dem des IBN AKNIN edirt, übersetzt und besprochen ist (*Hebr. Übersetz.* S. 35). — Der Warnung halber sei hier ein Autor genannt, dessen vielleicht nicht unverschuldete Confusion anderswo besprochen ist (Magazin f. die Wissenschaft des Judenth. [Berlin] **3**, 1876, S. 196). Die betreffende Stelle findet sich in einem unedirten Commentar zum Pentateuch, von JEHUDA (oder *Leon*) MOSCONO aus Ochrida (Bulgarien) verfasst (1362—1370).

C) Schriften über Mathematik im *Talmud*.[18] ADAM ANDREAS CNOLLEN (gest. 1714) versprach in einer Recension des Buches von JAKOB B. SAMUEL (s. unten Jahr 1593) in den Unschuldigen Nachrichten eine *Mathesis Biblico-Talmudica* (*Hebr. Bibliogr.* XIV, 103; XV, 128; XVII, 88 A. 1). POGGENDORFF's *Handwörterbuch* I, 458 citirt: »De geometria talmudica«

und »De algebra Hebraeorum» ohne nähere Nachweisung. Ich kenne keine Schrift eines anderen christlichen Gelehrten über Mathematisches im Talmud. Hingegen haben Juden, abgesehen von Commentaren zu den betreffenden Stellen des Talmuds, auch in anderen Schriften diese Themen behandelt. Schon ABRAHAM BAR CHIJJA bespricht in dem von mir edirten Epilog zu seiner hebräischen Geometrie (1864) das im Talmud angegebene Maass der Diagonale des Quadrates = $1\frac{2}{5}$ der Seite;[19] doch ist aus dem Mittelalter keine Monographie bekannt. Der Verfasser der ältesten bekannten, JACOB B. SAMUEL, sagt in seinem Commentar zu JOSEF ALBO's Grundlehren (des Glaubens) I, 17 (f. 10, ed. 1584): »Wer diese Wissenschaft erlernen will, der lese ihre [der Christen] Bücher, worin sich bewährt [der talmudische Spruch]: »Ich habe mich bemüht und gefunden», denn nur sehr Weniges blieb bei uns [Israeliten] in dieser Zeit, weil in der langen Zeit des Exils diese Wissenschaft mit den anderen Wissenschaften uns fast gänzlich verloren gegangen ist.» Andere von da ab lebende Verfasser hebräischer Schriften, welche an ihrem Orte näher besprochen werden sollen, sind: 1599: SAMUEL EDELS; 1617: MOSES CASES; 1708: JEHUDA B. CHANOCH; 1712: MOSES EISENSTADT; 1741: ISRAEL SAMOSC; 1775: SERACH EIDLITZ; 1777: GEDALJA LIPSCHÜTZ; 1796: DAVID FRIEDENHEUSSEN; 1807: TOBIA LEVI; 1815: FRIZZI; s. auch unter 1765. Erklärungen talmudischer Stellen enthält ein *arabisches* Manuscript in hebräischer Schrift in der hiesigen königl. Bibliothek (n. 108, S. 78 meines Catalogs).

Nachdem PH. L. HURWITZ (1809) in einem Artikel über die Wissenschaften im Talmud auch die mathematischen besprochen hatte, und D. EHRMANN letztere insbesondere in einem Artikel der Allgemeinen Zeitung des Judentums (1852, S. 128 ff.), haben es namentlich zwei Männer von *Fach* unternommen, den Stoff in wissenschaftlicher Methode und technischer deutscher Form zu behandeln. B. ZUCKERMANN (Lehrer am jüdisch-theolog. Seminar in Breslau; gest. am 17. December 1891)[20] hatte schon in der von GRAETZ herausgegebenen Monatsschrift für Geschichte und Wissenschaft des Judenthums, **4**, 1855, S. 156 ff. Einiges berührt; der Jahresbericht jenes Seminars (Breslau 1878) enthält eine Abhandlung: *Das Mathematische im Talmud, Beleuchtung und Erläuterung der Talmudstellen mathematischen Inhalts* (64 S. und XXXIV Figuren).[21]

Da die Abhandlung keine Inhaltsübersicht bietet, so mag hier eine solche folgen. Nach einigen allgemeinen Bemerkungen ohne Bedeutung behandelt diese Monographie: I. Quadrat-

wurzel (S. 6); II. Verhältniss des Flächeninhalts eines Kreises und des ihm eingeschriebenen Quadrats zum Flächeninhalt des diesem Kreise umschriebenen Quadrates (S. 11); III. Verhältniss des Umfanges eines Kreises zu dem des ihm umschriebenen Quadrates (S. 63); daran schliesst sich (S. 25) das Thema des Salomonischen Meeres, ferner (S. 34) die Bestimmung des Sabbatweges, der kubische Inhalt eines Hohlmasses (S. 51).

Hr. EDUARD MAHLER in Wien hat einiges Hierhergehörige behandelt,[22] nämlich *Die Irrationalitäten der Rabbiner* in Zeitschr. f. Mathem. **29**, 1884, Hist.-lit. Abth. S. 41—43; *Zur Thalmudischen Mathematik,* daselbst **31**, 1886, S. 121—131, auch im Sonderabdruck, behandelt vom historischen Gesichtspunkt einige Stellen, welche sich auf die Quadratwurzel beziehen.

Die von AD. BRÜLL herausgegebenen Populärwissenschaftl. Monatsblätter v. J. 1892, S. 262, berichten, dass Prof. HOCHMANN in Odessa in der dortigen mathematischen physikal. Gesellschaft Vorträge über Mathematik und Physik im Talmud gehalten habe, ohne anzugeben, ob dieselben irgendwo gedruckt erschienen sind.

Über *einzelne Lehrer* (sogenannte »Rabbinen»), welche eine Bekanntschaft mit mathematischer Wissenschaft bekunden, muss man diejenigen Quellen benutzen, welche von den Talmudlehrern überhaupt handeln, dazu gehören einige biographische Monographien aus der neuesten Zeit.[23] Ich habe selbst angefangen, die Namen dieser Lehrer und die entsprechenden Quellen zusammenzustellen, kann aber die Notizen im Augenblick nicht auffinden. Der gegenwärtige Artikel hat mit ihnen direct Nichts zu schaffen, mit Ausnahme von zweien: dem SAMUEL BEN ABBA[24] (gest. 254—255) genannt *Jarchinai,* dem Kenner des Mondes (Mondlaufes), wird eine Schrift beigelegt, welche am Anfange unserer eigentlichen Abhandlung (§ 7) näher besprochen wird. Ein anderer Talmudlehrer namens ADA (oder ADDA?) soll der Begründer oder Einführer des, der jüdischen Chronologie zu Grunde liegenden Sonnenjahres sein und bildet hier einen Übergang zu der letzten Schriftengruppe.

D) Schriften über *Chronologie* und *Kalenderwesen.* Es versteht sich von selbst, dass hier nicht die Schriften von Juden zusammengestellt werden sollen, welche einzeln nach ihrer Zeitfolge den Gegenstand der Abhandlung selbst bilden. Es sind auch die *tabellarischen* Anweisungen ausgeschlossen, deren Literatur oben unter A) berührt worden. Hier sind nur einige *allgemeine* Schriften von Christen erwähnt, welche die Grundregeln des jüdischen Kalenders behandeln,[25] wie SEB. MÜNSTERUS,

Kalendarium Hebr., ex Hebraeorum penetralibus jam recens in lucem aeditum (Basil. 1537, 4°), worin p. 56—106 ein anonymes hebräisches Werk über Kalender mit MÜNSTER's lateinischer Übersetzung; s. unten unter dem Jahr 1521. — JAC. CHRISTMANN, *De Calendario Hebraeorum,* im Anhange zur lateinischen Übersetzung von ALFRAGANI, *Chronologica et astron. elementa* (Francof. 1590) p. 223—265. — AEG. STRAUCH, *Diss. de Computo Talmudico-Rabbinico* (Witteb. 1661), kenne ich nur aus WOLF, *Bibl. Hebr.,* wo II, 1302 und IV, p. 1048 einige nur versprochene Abhandlungen anderer Gelehrten. — JO. GER. PAGENDARM citirt seine handschriftlichen »Praelectiones in Calendarium judaicum« in seiner Abhandlung über ein gedrucktes Bibelfragment in Oels (*De Codice Judaeorum Oelsnensium,* Jenae 1730, p. 32); cfr. WOLF, IV, p. 1048 n. 286[b].

Ich habe bereits oben (§ 3) angedeutet, dass die Feststellung des jüdischen Kalenders nach dem METON'schen Cyclus von 19 Jahren[26] mit 7 Schaltmonaten nach je 3 oder 2 Jahren (die jetzt giltige Reihenfolge ist 3, 6, 8, 11, 14, 17, 19)[27] mit der genauen Berechnung des Sonnenjahres zusammenhängt; nach der alten Tradition gab es neben den »Quatembern« des SAMUEL, welche man als exoterisch bezeichnete, die Quatember eines R. ADA, dessen Persönlichkeit streitig ist, als esoterische.[28] Die Einführung des exacten Sonnenjahres ist zuerst kritisch behandelt in einer in 3 Auflagen erschienenen hebräischen Schrift (*Jesode ha-Ibbur,* zuerst Zitomir 1865, zuletzt Warschau 1889) von dem scharfsinnigen Kenner der Astronomie, CHAJJIM SELIG SLONIMSKI, welche jedoch teilweise bekämpft worden ist. Eine Übersicht des Themas, wenn auch ohne kritische Schärfe, bietet ADOLF SCHWARZ: *Der jüdische Kalender historisch und astronomisch untersucht* (Breslau 1872; 136 S. incl. Tabellen).

Um nicht aus einem einzigen Buche eine neue Rubrik zu bilden, schliesse ich hier an eine Abhandlung von WACKERBARTH: *Views of the ancient Rabbies relative to the Dimension of the earth* (in Monthly notices of the r. astronom. society, **33**, p. 671; cf. *Hebr. Bibliogr.* XVII, 92, aus GÜNTHER, mir selbst nicht zugänglich).

5. Methode.

Über die Methode der nachfolgenden Aufzeichnungen, deren verschiedenartige Natur von der Zugänglichkeit der Quellen und des Stoffes abhängt, soll hier nur das Nötigste zusammengefasst sein. Die Mitteilungen umfassen vorzugsweise vorhandene, meist *handschriftliche* Werke, welche von Juden *verfasst* oder *übersetzt*

sind; die Übersetzungen werden sehr kurz mit Hinweisung auf meine Monographie (Biblioth. Mathem. 1893, S. 51) erledigt. *Biographische* Nachrichten über die Verfasser sind, mit seltenen Ausnahmen, sehr spärlich vorhanden, da die jüdischen Autoren in der Regel ein stilles Gelehrtenleben führten, wenn nicht Verfolgung, oder Not, sie hinaustrieb.

Die allgemeine Anordnung ist die chronologische; was sich nicht wenigstens auf ein Jahrhundert begrenzen liess, kommt zuletzt, und zwar zuerst Autoren, dann Anonyma, oder andere unser Thema berührende Notizen.

Für den Gebrauch in weiteren Kreisen sind die hebräischen *Werktitel* — meist, wie die arabischen, symbolischer Art, vorzugsweise Bibelphrasen — mit lateinischen Lettern umschrieben, und zwar in der Regel ohne besondere unterscheidende Zeichen.

Das Verzeichniss der, für die gewöhnlichsten Quellen gebrauchten *Abkürzungen* folgt zuletzt, damit es vollständig sei. —

Bis hieher reicht dasjenige, was als *Einleitung* zur eigentlichen Abhandlung bezeichnet werden könnte.

[13] So z. B. über BIANCHINO S. 182, s. meinen *Catal. Codd. mss. Lugd. Bat.* p. 377.

[14] So z. B. fehlt unter PETRUS ABANO eine Verweisung auf ABRAHAM IBN ESRA, dessen astrologische Schriften er lateinisch [aus dem Französ. des Hagins] übersetzt. S. 30 unter ALFONS: ISAAC ABEN SAID [lies *Cid*] ist nicht ein Araber, sondern ein Jude. S. 26 ALCABITIUS, unrichtig ein Homonymus in Toledo. S. 30 ALFRAGANUS, Nichts von Textausgabe, Ungenügendes über die Übersetzungen. Der Übers. CALO CALONYMUS ist nur unter ALPETRAGI S. 34 genannt.

[15] Es genügt hier eine Vergleichung der Artikel JOSEF B. ISAK (S. 374, 481). MAIMONIDES (477), MASCHALLAH (465, 700, 702, n. 3811), SAHL = ZAEL (489, 523, 699, 717, 720), JACOB B. MACHIR (484, vgl. 595) mit meinem Werke, *Die hebr. Übersetz.* Anmerk. Reihe [9] n. 8[b], 18, 25, 54, 81.

[16] S. die Stelle bei JAKOB B. SAMUEL (1584) zu JOSEF ALBO I, 17, welche weiter unten (§ 5) mitgeteilt ist. JAKOB war allerdings ein Deutscher, der die Schriften der südlichen Juden nicht kannte.

[17] Bei LOEB sind genannt (ich ordne die Autoren hier chronologisch): 1838: E. H. LINDO; 1842: B. GOLDBERG (auch 1844); 1844: PHILIPPOWSKI; 1848: I. MONTEL; 1849: S. D. LUZZATTO; 1854: A. I. WUNDERBAR; 1855: MAHMUD EFFENDI; 1856: G. A. JAHN; 1863: RENÉ MARTIN; 1868:

Jos. Engel und Ulysse Bouchet. — Ich füge hinzu: 1811: M. E. Fürth, *Entwurf zur Selbstverfertigung eines immerwährenden Kalenders* etc., mit hebr. Titel: *Peripheraot* etc. Leipzig. — 1840: M. Kloppstock, *70-jährige Vergleichungstabellen der jüd. mit der üblichen Zeitrechnung*, Berlin (dann Wollstein 1844 in: »Notiz und Erinnerungsbuch»). — 1845: Israel Lüpschütz (vulgo *Lipsch.*) *Schewili* [sic! lies *Schebile*] *de Rakia* [aus der Einleitung zum Mischna-Commentar] *oder Chronologie* etc. *Anweisung zur Anfertigung eines Kalenders* etc. *ins Deutsche übersetzt von* M. Michaelis, Lehrer, Danzig, 44 S. kl. 8°; der Umschlagtitel lautet etwas abweichend. — 1856: S. M. Landsberg, *System der math. und theolog. Chronologie, 1741—1900*, Altona, quer-4°. — 1856: L. M. Lewisohn, *Geschichte und System des jüdischen Kalenderwesens*, mit 7 Tabellen, Leipzig. — 1860: Abraham Jehuda Elbinger, *Tif'eret Zebi* (hebr.), Warschau. — 1879: Cohn, *Mafteach* etc. *Schlüssel zur sofortigen Umwandlung jüd. bürgerlichen Datums* etc. *für die Jahre 1750—1950*, Rees. — 1880: David Friedländer, *Sod Haibur* [lies *ha-Ibbur*] *Grundlage und Fortsetzung der Zeitberechnung bis 1930*, Budapest. — 1882: Zuckermann, s. weiter unten. — 1883: B. Goldberg, *Notes sur le Calendrier juif*, Paris (16 p.). — 1883: F. S. Brochmann, *System der Chronologie*, Stuttgart. — 1889: M. Simon, *220-jähriger Kalender zur Umwandlung des jüd. Datums etc. 1781—2000*, Berlin, und 1891 desselben Verf. *Grundzüge des jüd. Kalenders und ... Anleitung zu seiner Berechnung*, Berlin.

18 H. Strack, *Einleitung in den Talmud* (Leipzig 1887), S. 75, erwähnt nur Zuckermann.

19 Bei Zuckermann, *Das Mathematische im Talmud* unter Quadratwurzel, S. 6. Über die anonyme Erklärung in ms. Paris 1005[8a] erfährt man aus dem Catalog nichts Näheres. — Eine anonyme Schrift über die Kenntniss der Mathematik bei den Rabbinen, ms., citirt Ch. Horowitz, *Bet Nechot*, Frankf. a/M. 1882, II, 62.

20 Jahresber. des jüdisch-theolog. Seminars 1892, S. 1.

21 Vgl. meine Anzeige in der *Hebr. Bibliogr.* XVIII, 12. — Zu dem »Fernrohr ohne Gläser» des Gamaliel vgl. Houzeau et Lancaster, *Bibliographie générale de l'astronomie* I, 173 über den Unterschied des Tubus und Telescops.

22 S. Günther, *Gesch. der Mathem.* S. 146 citirt *Beiträge zur Mathematik der Hebräer* in Zeitschr. für Realschulwesen IX, 465—471; sie behandeln Annäherungswerte bei Maimonides.

[23] Einige sind in dem chronol. Verzeichniss der bedeutendsten Lehrer bei STRACK, *Einleitung* etc. (s. Anm. 18), S. 53 ff. angegeben.

[24] Zu den Quellen über ihn bei STRACK, l. c., S. 58, kommt A. GEIGER, in Forschungen des wiss. talmud-Vereins etc., Beil. der Zeitschr. Ben Chananja (Szegedin 1866), S. 69.

[25] DETLEV (oder DETLEF) CLÜVER, Mitglied der K. Societät zu London (gest. in Hamburg 21. Februar 1708, s. *Allgem. Deutsche Biographie,* Leipzig 1876, Bd. IV, S. 351) verfasste nach POGGENDORFF's *Handwörterbuch* I, 458: *Tabulae astronomicae in R. Mos. Maimonidis librum de consecratione calendarii etc. additae* (London 1683), über deren Charakter ich Nichts auffinden konnte. In den Angaben lateinischer Bearbeitungen dieses klassischen Abschnittes bei WOLF, *Bibl. Hebr.* I, p. 843, III, 776, IV, 915, sind diese Tafeln nicht erwähnt; sie scheinen äusserst selten zu sein. Derselbe »Cluverus» verfasste eine *Geologia, sive Philosophemata de genesi ac structura globi terreni, oder Natürliche Wissenschaft von Erschaffung* etc. (Hamburg 1700) in einem kaum verständlichen Deutsch; Capp. IX u. X behandelt die Mosaische Urkunde und der Juden Unfähigkeit, den natürlichen »Bericht davon einzunehmen und zu verstehen».

[26] *The Metonic Cycle und Calippic Period.* Reprinted from the Journal of Sacred Literature etc. Jan., April and July 1865 (London). — Die jüdischen Cyclen (*Mahazir,* arab. Plural des hebr. *Ma'hzor,* vulgo *Machsor*) etc. citirt CYRIANUS (1480) bei NICOLL, *Catal. Codd. arab. Bodl.* II, 244.

[27] Drei Arten der Reihenfolge erwähnt ISAK ISRAELI, *Jesod Olam* (hebr.), IV, 2 f. 1; vgl. meine Bemerkung in *ha-Jona* von S. SACHS (Berlin 1851), S. 28, wo ich als Quelle die *Baraita* des SAMUEL vermute, die allerdings in einem ms. genannt ist.

[28] Der Kalender oder, nach SLONIMSKI (l. citando, ed. Warschau S. 36) das den Kalender bestimmende Collegium, wird als *Sod* (Geheimniss, Geheimer Rath) bezeichnet. Auch die Brahminen hielten den Kalender geheim (HOUZEAU *et* LANCASTER, *Bibliogr. gén. de l'astron.* I, 158). Persönliches Interesse ist es, wenn SAMUEL CHAKIM (Hakim) seinem Lehrer ABRAHAM B. NATAN schwören muss, dass er die Berechnung des »mittleren Neumonds» Niemand lehren werde (Gutachten des ISAK B. SCHESCHET, I, 103).

Eine seltene Schrift über Winkeldreitheilung.

Von G. Valentin in Berlin.

Die Kgl. Bibliothek zu Berlin ist kürzlich in den Besitz eines Buches gelangt, das mir, trotzdem es erst am Ende des vorigen Jahrhunderts erschienen ist, ziemlich selten geworden zu sein scheint. Der Titel desselben lautet:

> Principj di analisi geometrica necessarj o per accignersi a sciogliere i due Problemi della Duplicazione del cubo e della Trisezione dell' angolo per mezzo della retta e del cerchio, o per dimostrarne l'impossibilità. Lettera dell' Abate Francesco Boaretti a sua Eccellenza il Sig. Bernardo Memmo Senatore amplissimo. In vigore di cui si rendono affatto superflui tutti gli Esami che venissero pubblicati in opposizione all' Opuscolo de' *Pensieri sulla Trisezione dell' angolo.* Venezia MDCCXCIII. Presso Domenico Fracasso. Con Licenza de' Superiori.

Das Buch besteht aus 32 Seiten in 8°, von der 3ten an bis 32 numeriert. Auf Seite 3—6 spricht sich Boaretti über einige allgemeinere Gesichtspunkte in Bezug auf seine Schrift: *Pensieri sulla trisezione dell' angolo* und die dadurch hervorgerufenen Gegenschriften aus; auf Seite 7—17 folgen in 7 Paragraphen einige speciellere Entwickelungen, welche mehrere in den *Pensieri* benutzten Sätze weiter ausführen und sich hauptsächlich gegen Dandolo's Entgegnung wenden. Es folgt dann auf Seite 28—30 unter der Überschrift: »ABC geometrico per il Sig. Vincenzo Dandolo« noch eine scharfe Auseinandersetzung mit Dandolo und auf Seite 31 einige Worte gegen Antonio Romanò und unter der Überschrift »Avvertimento« eine kurze Schlussbemerkung. Auf Seite 32 endlich sind »Opere finora pubblicate dell' autore« angezeigt.

Wie man sieht, gehört das eben beschriebene Buch zu der Reihe von Gegenschriften, welche die anonym erschienene Schrift: *Trisectio anguli et cubi duplicatio aliaque geometrica problemata ope solius circini ac regulae resoluta, & demonstrata.* Roma 1792 (Riccardi, *Biblioteca matematica italiana* II, 558) hervorrief. Auf diese antwortete Boaretti mit seinen *Pensieri* etc., deren Titel ausführlicher wie bei Riccardi (I, 138) auf S. 32 der *Principj* folgendermassen angegeben ist:

> Pensieri sulla Trisezione dell' angolo, all' occasione d'un recente opuscolo stampato in Roma col titolo: Trisectio

anguli &c. ope solius circini ac regulae resoluta ac demonstrata, che si convince manifestamente di errore.

Hierauf veröffentlichten Dandolo und Romanò die ebenfalls bei Riccardi (I, 138) angegebenen Entgegnungen. Diesen erwiderte alsdann Boaretti mit zwei Schriften, zuerst mit der oben angeführten und kurz darauf mit den auch von Riccardi (I, 138) citierten, unter dem Pseudonym »Piroforo Zanzara» (fieberbringende Mücke) erschienenen *Ottave rime ossia Progetto secondo di Piroforo Zanzara intitolato a quei geometri etc.*[1] Der Titel dieser Schrift zeigt selbst schon deutlich, dass sie erst die *zweite* Entgegnung ist, denn »Progetto *secondo* intitolato a quei geometrici etc.» ist auf Boaretti's *Principj di analisi geometrica*, welche sich ebenfalls gegen Dandolo und Romanò (»a quei geometrici») richtet, und nicht auf seine *Pensieri* zu beziehen. Ausserdem schliesst das Verzeichniss der Werke Boarettis auf S. 32 mit den beiden Schriften *Pensieri* und *Principj.*

Es ist mir nun bei Durchsicht der mir zu Gebote stehenden bibliographischen Hülfsmittel und Litteraturgeschichten nicht möglich gewesen, die oben angeführte Schrift Boarettis nachzuweisen und desshalb hielt ich eine Anzeige dieser, wie es scheint, bisher unbekannten Streitschrift für den Bibliographen nicht für uninteressant.

[1] Abweichend hiervon finde ich übrigens bei Ferrari, *Vitae virorum seminarii Patavini* (1815), bei Vedova, *Scrittori Padovani* (1832), bei Lancitti, *Pseudonimia* (1836), bei Tipaldo, *Biografie* (1837) den Titel folgendermassen angegeben: *Ottave rime o sia Cinque progetti di Piroforo Zanzara, intitolati a quei geometri* etc. — Warum mag Boaretti überhaupt diese Schrift unter einem Pseudonym herausgegeben haben? und warum wählte er dieses Pseudonym? Giebt etwa der *Elogio di Franc. Boaretti* (Venezia, Rosa 1815), welcher mir nicht zugänglich war, darüber Aufschluss?

RECENSIONEN. — ANALYSES.

H. G. Zeuthen. FORELÆSNING OVER MATHEMATIKENS HISTORIE. OLDTID OG MIDDELALDER. Kjöbenhavn, Höst 1893. 8°, (12) + 292 p.

Dans le numéro précédent de la Biblioth. Mathem. nous avons fait mention (p. 90—91) de l'aperçu de l'histoire des mathématiques publié par M. BALL. Maintenant nous avons le plaisir d'appeler l'attention de nos lecteurs sur un autre ouvrage de la même nature. En effet, le livre de M. ZEUTHEN dont nous venons de transcrire le titre, contient un aperçu de l'histoire des mathématiques dans l'antiquité et au moyen âge. Cependant le plan de ce livre est en quelque sorte différent de celui de l'ouvrage de M. BALL. Dans la préface, M. ZEUTHEN fait observer que, son but ayant été en premier lieu d'être utile aux mathématiciens et aux professeurs de mathématiques, il a omis tous les détails historiques qui ne soient pas nécessaires pour donner une idée du développement des notions et des méthodes mathématiques. Il s'en suit qu'on y trouve peu de renseignements biographiques et peu de notices relatives à l'histoire de la littérature mathématique.

Après une brève introduction (p. 1—12) sur les mathématiques préhistoriques ainsi que sur l'état des mathématiques chez les Egyptiens et les Babyloniens, l'auteur passe (p. 13—227) à une exposition historique des mathématiques grecques. Cette exposition comprend 29 chapitres, savoir: 1. Aperçu général des mathématiques grecques. — 2. Les mathématiques pythagoriciennes. — 3. L'arithmétique géométrique. — 4. L'algèbre géométrique. — 5. Equations numériques de second degré. — 6. La considération de l'infini. — 7. La quadrature du cercle. — 8. La trisection d'un angle; les problèmes de directions. — 9. La duplication du cube. — 10. Théorèmes et problèmes; la signification de la construction géométrique. — 11. La méthode analytique; la forme d'exposition analytico-synthétique. — 12. Des »éléments»; ressources analytiques. — 13. Aperçu des éléments d'EUCLIDES; système synthétique. — 14. Les fondements géométriques d'EUCLIDES. — 15. Remarque sur les fondements de la géométrie. — 16. La théorie générale des proportions; les livres 5e et 6e d'EUCLIDES. — 17. Grandeurs commensurables et leur représentation au moyen de nombres; les livres 7e—9e d'EUCLIDES. — 18. Grandeurs incommensurables; la 10e livre d'EUCLIDES. — 19. Eléments de la stéréométrie; polyèdres réguliers; les livres 11e et 13e d'EUCLIDES. — 20. La

méthode d'exhaustion; le 12e livre d'EUCLIDES. — 21. Les recherches infinitésimales d'ARCHIMEDES. — 22. La théorie d'équilibre d'ARCHIMEDES. — 23. La théorie des sections coniques avant APOLLONIUS. — 24. Les sections coniques d'APOLLONIUS. — 25. Lieux et problèmes solides. — 26. La géométrie soumise au calcul. — 27. Géométrie sphérique. — 28. La décadence de la géométrie grecque. — 29. L'arithmétique grecque postérieure; DIOFANTOS.

La section suivante (p. 228—253) est consacrée à l'histoire des mathématiques chez les Hindous et contient 4 chapitres, savoir: 1. Aperçu général des mathématiques indiennes. — 2. Noms des nombres, signes numéraux, systèmes de numération et manière de calculer avant et chez les Hindous. — 3. Applications des règles à calculer. — 4. Algèbre et théorie des nombres; géométrie.

Dans la dernière section (p. 254—292), l'auteur expose l'état des mathématiques au moyen âge. Après un aperçu général, il rend compte de l'arithmétique et de l'algèbre des arabes, puis de la trigonométrie des arabes, et enfin de la renaissance des mathématiques en Europe jusqu'à REGIOMONTANUS et CHUQUET.

Bien que l'ouvrage de M. ZEUTHEN s'adresse en premier lieu aux élèves des écoles normales, il peut être recommandé aussi à ceux qui se sont dédiés particulièrement à l'étude de l'histoire des mathématiques, parce qu'il contient une exposition à plusieurs égards originale de l'état des mathématiques dans l'antiquité. Seulement il est à désirer qu'il soit bientôt traduit en une langue plus répandue parmi les savants que le danois.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

L'INTERMÉDIAIRE DES MATHÉMATICIENS DIRIGÉ PAR **C.-A. Laisant** ET **E. Lemoine.** Tome I. N° 1. Paris 1894. 8°.

Le but de ce nouveau journal est de fournir aux personnes qui cultivent habituellement les Mathématiques, ou qui s'y intéressent, des renseignements sur des sujets se rapportant à leurs études, des solutions à des questions posées, ou des indications bibliographiques. *L'intermédiaire des mathématiciens* a donc, pour les mathématiques entières, un but semblable à celui que, depuis 9 ans, nous avons essayé de réaliser pour l'histoire des mathématiques par la section: »Questions» de la Bibliotheca Mathematica.

Le numéro paru de *L'intermédiaire des mathématiciens* contient 38 questions et 12 réponses; il y en a trois à chacune des questions 21 et 30. Parmi les questions, la 5e, qui est purement historique, a été proposée par M. MORITZ CANTOR; nous nous permettons de la reproduire ci-dessous:

La question agitée depuis longtemps sur l'origine des signes + et — est quasi résolue, si je ne me trompe, par les hypothèses de MM. LE PAIGE et ZANGEMEISTER, citées dans la préface (p. V) des mes *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* (Zweiter Band, Leipzig 1892). Le signe + serait un compendium pour *et*, remontant au moins jusqu'au commencement du XIVe siècle, et le signe — serait l'*obelos* des grammairiens alexandrins. Mais, ces hypothèses admises, c'est une nouvelle question qui se présente: Quand et par qui les *mots* »plus» et »minus» ont-ils été introduits pour *prononcer* les signes + et —?

Parmi les autres questions quatre (nos 2, 13, 30 et 36) sont essentiellement bibliographiques, une (n° 35) historique, et une (n° 19) biographique. — Les réponses aux questions 7 et 8 renferment aussi beaucoup de renseignements bibliographiques.

Par ce qui précède, on voit que l'*Intermédiaire des mathématiciens* peut intéresser aussi les historiens, et c'est pour cette raison que nous avons voulu appeler sur lui l'attention des lecteurs de la Bibliotheca Mathematica.

Parmi les fautes d'impression nous nous permettons de signaler une à la page 12, ligne 22, où il faut lire 1850 au lieu de 1880, et une à la page 16, ligne 6, où il faut lire 530 au lieu de 730.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von || journal d'histoire des mathématiques publié par G. ENESTRÖM. Stockholm. 8°.

1893: 3. — [Analyse de l'année 1892 (fin):] Fiziko-matem. naouki **12**, 1893, 163—168. (V. BOBYNIN.)

Физико-математическія науки въ ихъ настоящемъ и прошедшемъ. Журналъ издаваемый В. В. Бобынинымъ. Москва. 8°.

1893: 2. — Les sciences mathématiques dans leur état actuel et passé. Journal publié par V. V. BOBYNIN.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von M. CANTOR. Leipzig. 8°.
38 (1893): 6.

Ball, W. W. R., An essay on Newton's Principia. London, Macmillan 1893.
8°, X + 175 p. — [6 sh.]

Bellacchi, G., A proposito di un lavoro sulla storia delle matematiche.
Periodico di matem. **7**, 1892, 81—88, 169—171; **8**, 1893, 25—28, 57—62, 113—116, 137—144.

°**Boncompagni, B.,** Catalogo dei lavori di Enrico Narducci. Roma 1893.
8°, 18 p. — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 225. (CANTOR.)

°**Brewster, D.,** Life of sir Isaak Newton. New edition. London, Gall 1893.
8°, 340 p. — [2 sh.]

°**Dreyer, J. L. E.,** Tycho Brahe. Ein Bild wissenschaftlichen Lebens und Arbeitens im 16. Jahrhundert. Übersetzt von M. BRUHNS mit Vorwort von W. VALENTINER. Karlsruhe 1893.
8°, 12 + 434 p. + 6 pl. — [10 Mk.]

ДЮРИНГЪ, Е., Критическая исторія общихъ принциповъ механики. Перевелъ Н. МАРАКУЕВЪ. Москва 1893.
8°, XX + 531 p. — [4 roub.] — DÜHRING, E., Histoire critique des principes généraux de la mécanique. Traduite par N. MARAKOUEFF.

ЭНГЕЛЬГАРДТЪ, М. А., Н. Коперникъ, его жизнь и научная дѣятельность. Санктъ-Петербургъ 1892.
8°, 69 p. — [25 kop.] — ENGELHARDT, M. A., N. Kopernik, sa vie et son action scientifique.

ФИЛИППОВЪ, М. М., Ньютонъ, его жизнь и научная дѣятельность. Санктъ-Петербургъ 1892.
8°, 80 p. — [25 kop.] — FILIPPOFF, M. M., Newton, sa vie et son action scientifique.

°**Frobenius, G.,** Gedächtnissrede auf Leopold Kronecker. Berlin 1893.
4°, 22 p. — [1·50 Mk.]

Gelcich, E. und **Sauter, F.,** Kartenkunde geschichtlich dargestellt. Stuttgart, Göschen 1894.
8°, 160 p. — [0·80 Mk.]

°**Günther, S.,** Abriss der Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften im Alterthum. Zweite neubearbeitete Auflage. München 1893. 8°.

Günther, S., Exakte Wissenschaften.
65. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte, Festschrift (Nürnberg 1892). 33 p. — Histoire des sciences exactes à Nürnberg.

León y Ortiz, E., Breve reseña de tablas logaritmicas.
La controversia (Madrid) **7**, 1893, 669—671.

Loria, G., Un nuovo documento relativo alla logistica greco-egiziana.
Biblioth. Mathem. 1893, 79—89.

°**Mach, E.,** The science of mechanics: a critical and historical exposition of its principles. Translated from the second german edition by T. J. Mc Cormack. Chicago 1893.
8°, 538 p. — [2·50 doll.]

M[ansion], P., Albert Ribaucourt (1845—1893).
Mathesis **3**$_2$, 1893. 270—272.

Reyes Prosper, V., Nicolas Ivanovich Lobatchefski. Reseña biográfico-bibliográfica.
El progreso matem. **3**, 1893, 321—324.

Riccardi, P., Saggio di una bibliografia Euclidea. Parte quinta.
Bologna, Accad. d. sc. dell' Istituto. Memorie **3**$_5$, 1893, 639—694.

СИНЦОВЪ, Д. М., Систематическій указатель книгъ и статей по чистой и прикладной математикѣ напечатанныхъ въ Казани по 1890 годъ. Казань 1893.
8°, 28 p. — Sintzoff, D. M., Liste systématique des écrits de mathématiques pures et appliquées publiés à Kasan jusqu'en 1890.

Steinschneider, M., Die Mathematik bei den Juden.
Biblioth. Mathem. 1893, 65—72.

Steinschneider, M., Miscellen zur Geschichte der Mathematik.
Biblioth. Mathem. 1893, 73—74.

°**Todhunter, I.** and **Pearson, K.,** A history of the theory of elasticity and of the strength of materials, from Galilei to the present time. Vol. II: Saint-Venant to lord Kelvin. London, Macmillan 1893.
8°, 1310 p.

°**Tschumi, J.,** Ein Beitrag zur Geschichte und Discussion der Cycliden. Bern 1893.
8°, 48 p. + 1 pl. — [1·50 Mk.]

Wertheim, G., Die Arithmetik des Elia Misrachi. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik. Frankfurt a/M. 1893.
4°, 42 p. — Programm der Realschule der israelitischen Gemeinde zu Frankfurt a. M., 1893.

Zanotti Bianco, O., Nota storica sulla variazione delle latitudini.
Biblioth. Mathem. 1893, 75—78.

Zeuthen, H. G., Forelæsning over Mathematikens Historie. Oldtid og Middelalder. Kjöbenhavn, Höst 1893.
8°, (12) + 292 p. — Leçons sur l'histoire des mathématiques dans l'antiquité et au moyen âge.

Question 43 [sur les mathématiciennes vivantes].
Biblioth. Mathem. 1893, 96. (G. Eneström.)

Apollonii Pergaei quæ græce exstant cum commentariis antiquis. Edidit et latine interpretatus est J. L. Heiberg. I—II. Lipsiæ 1891—1893. 8°.
Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 224—225. (Cantor.)

Ball, W. W. R., A short account of the history of mathematics. Second edition. London, Macmillan 1893. 8°.
Biblioth. Mathem. 1893, 90—91. (G. Eneström.)

Besthorn, R. O. et Heiberg, J. L., Codex Leidensis 399, 1. Euclidis Elementa ex interpretatione Al-Hadschdschadschii cum commentariis Al-Narizii. Arabice et latine ediderunt notisque instruxerunt. I: 1. Hauniæ 1893. 8°.
Zeitschrift für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 192—195. (H. Suter.) — Göttingische gelehrte Anzeigen 1893, 828—846. (H. Künssberg.)

Hultsch, F., Die Näherungswerte irrationaler Quadratwurzeln bei Archimedes. (Göttingen 1893. 8°.)
Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 223—224. (Cantor.)

Mansion, P., Notice sur les travaux scientifiques de Louis-Philippe Gilbert. Paris, Gauthier-Villars 1893. 8°.
Jornal de sc. mathem. **11**, 1893, 158—159. (G. T.)

Mathematisches Abhandlungsregister. 1892. Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. December.
Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 228—240.

[Listes d'ouvrages récemment publiés.]
Biblioth. Mathem. 1893, 92—95. — Zeitschr. für Mathem. **38**, 1893; Hist. Abth. 226—227. — Fiziko-matem. naouki **12**, 1893, 169—192.

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

44. Dans sa note *Sur quelques écrits mathématiques publiés en Espagne aux 16e et 17e siècles* (Biblioth. Mathem. 1890, p. 33—36), Vicuña a appelé l'attention sur un ouvrage du mathématicien espagnol Omerique cité avec éloge par Newton. On demande une petite notice sur la vie et l'action scientifique d'Omerique. (G. Eneström.)

Remarque sur la question 43. Parmi les mathématiciennes vivantes j'ai indiqué aussi »Mme F. Prime» à Bruxelles. M. Mansion a bien voulu me faire savoir que cela est un pseudonyme, sous lequel se cache un de ses anciens élèves. Il faut dont rayer ce nom de la liste des mathématiciennes actuellement vivantes. (G. Eneström.)

Index.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK

JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON — PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1894.

NEUE FOLGE 8. — NOUVELLE SÉRIE 8.

STOCKHOLM
G. ENESTRÖM.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
MARKGRAFENSTRASSE 51.

PARIS
A. HERMANN.
RUE DE LA SORBONNE 8.

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM, 1894.

Inhalt. — Table des matières.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK | JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON | PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1894. STOCKHOLM. N° 1.

NEUE FOLGE. 8. | NOUVELLE SÉRIE. 8.

BERLIN. MAYER & MÜLLER. Markgrafenstrasse 51.

Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr.

PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Note sur l'histoire de l'infiniment petit.

Par G. VIVANTI à Mantova.*

Introduction.

Si nous essayons de parvenir au concept d'infiniment petit au moyen de la division indéfiniment répétée d'une grandeur continue, par exemple d'un segment rectiligne, nous nous trouvons libres de premier abord de choisir entre deux formes-limites différentes, celle de segment plus petit qu'aucun assignable, et celle de point inétendu. Mais, d'une part, on ne saurait regarder un segment, si petit qu'il soit, comme le résultat final de la division, et par là comme indivisible; de l'autre, la décomposition d'une ligne en points inétendus est une chose inconcevable. On peut échapper à cette double difficulté en envisageant le point, non pas comme le resultat *dernier* de la décomposition de la ligne, mais comme l'élément *premier* capable de lui donner naissance, et en lui attribuant par là *la puissance d'engendrer le continu*. Il naît ainsi, en opposition à *l'infiniment petit ponctuel* ou *nul* et à l'infiniment petit doué d'extension (*infiniment petit déterminé* ou *actuel*), *l'infiniment petit intensif*, c'est à dire inétendu mais ayant l'aptitude à engendrer les grandeurs continues.

Avant même que les discussions sur la nature de l'élément de l'étendue eussent excité l'intérêt des mathématiciens, il s'agita

* Abrégé d'un travail plus étendu paru sous le titre: *Il concetto d'infinitesimo e la sua applicazione alla matematica* (Mantova. Mondovi 1894).

entre ceux-ci une question qui n'en diffère pas essentiellement, celle de *l'angle de contingence.* Cet angle, d'après la prop. 16 du 3e livre des Éléments d'EUCLIDE, est moindre que tout angle rectiligne, c'est donc par rapport à cet angle ce que c'est qu'un infiniment petit par rapport à une grandeur finie; et l'on a longuement discuté s'il est absolument nul ou s'il a quelque grandeur.

Mais l'histoire de l'infiniment petit doit avoir égard, non-seulement aux façons diverses dont il a été conçu, mais aussi aux formes sous lesquelles il a été introduit dans l'analyse.

L'introduction de l'infiniment petit dans les mathématiques a eu lieu à une époque relativement récente, lorsque les procédés des anciens (connus plus tard sous le nom de *méthode d'exhaustion*) ne parurent plus offrir une voie assez courte et directe pour la résolution des nombreux problèmes géométriques et mécaniques auxquels donnait naissance le progrès continuel des arts et des sciences. C'est alors que naquit et se développa la *méthode des indivisibles;* mais celle-ci fut bientôt remplacée par d'autres plus parfaites, qui peuvent se grouper sous deux titres principaux: *méthode des infiniment petits* et *méthode des limites.*

Dans cette courte note j'essaierai de tracer rapidement l'histoire de l'infiniment petit jusqu'à CAUCHY. Le plan que je suivrai résulte naturellement des considérations exposées plus haut; il me reste seulement à avertir que, quoique la question dont il s'agit ici se trouve aux bornes des mathématiques et de la philosophie, je ne dépasserai pas en général ces bornes, et je passerai sous silence, sauf quelque exception, tous ceux qui ont considéré l'infiniment petit en philosophes seulement et sans égard à son application aux mathématiques.

I. Le concept d'infiniment petit.

§ 1. *L'infiniment petit nul.* — Il est bien naturel de se demander avant tout qu'est ce que c'était l'infiniment petit pour l'inventeur du Calcul infinitésimal. Malheureusement l'examen des écrits de LEIBNIZ ne nous amène à aucune conclusion positive à ce sujet; car à côté de quelque morceaux ou il nie l'existence de grandeurs infiniment petites autres que le zéro, nous en trouvons d'autres où il exprime une opinion diamétralement opposée, et d'autres encore où il se déclare incertain. On rencontre même dans ses ouvrages de jeunesse sur la dynamique le concept d'infiniment petit intensif (*conatus*), tel qu'il a été introduit dans la science par HOBBES.

On remarque la même inconséquence chez quelques-uns de ses élèves les plus illustres, tels que GRANDI et JACQUES BER-

NOULLI. En effet, pendant que l'un et l'autre affirment qu'on ne saurait point concevoir de quantité infinie ou infiniment petite déterminée, le premier dit qu'on doit regarder toute chose comme actuellement infinie, attendu qu'elle est indéfiniment divisible, le second observe que l'axiome que les différences de grandeurs égales sont égales n'a plus lieu en général si ces différences sont infiniment petites par rapport aux grandeurs mêmes.

WOLF aussi, qui dans son *Ontologia* écrit: *Infinite parva impossibilia sunt,* s'exprime bien moins clairement dans sa *Dissertatio algebraica,* où il semble même admettre l'existence de grandeurs infiniment petites déterminées.

D'ALEMBERT déclara le premier ouvertement la guerre aux concepts d'infini et d'infiniment petit, en soutenant que ce ne sont vraiment que des manières abrégées de s'exprimer, et que le calcul infinitésimal n'a à faire en réalité qu'à des grandeurs finies.

Son grand contemporain EULER, en partant du même principe, à savoir, qu'il n'y a pas d'autre infiniment petit que le zéro, mais ne pouvant se résoudre à nier absolument à l'infiniment petit toute existence réelle, parvint à une conclusion inattendue. Il remarqua que, pendant que la différence de deux grandeurs nulles est toujours nulle, leur rapport peut être quelconque, car $n \cdot 0 = 0$; mais, au lieu d'en déduire que le rapport de deux zéros est complètement indéterminé, il en conclut au contraire qu'on peut envisager ce rapport comme une vraie grandeur. Rien ne s'opposait donc, suivant lui, à ce qu'on regardât comme tel le rapport de deux infiniment petits, bien que ceux-ci fussent rigoureusement nuls. Il faut toutefois remarquer qu'EULER ne réussit pas à établir le calcul sur un principe si peu satisfaisant, mais dut recourir pour cela au concept de limite, ainsi qu'on le verra plus loin (II, § 4).

§ 2. *L'infiniment petit actuel.* — Il y a bien peu d'auteurs qui aient affirmé ouvertement l'existence de grandeurs différentes de zéro mais moindres qu'aucune grandeur assignable. Le plus illustre parmi eux c'est JEAN BERNOULLI, qui eut une longue discussion avec LEIBNIZ à ce sujet. Il résulte aussi de la correspondance de LEIBNIZ, que L'HOSPITAL et VARIGNON auraient admis l'infiniment petit actuel. A une époque plus récente, on peut citer FONTENELLE et POISSON, auxquels il faut peut-être ajouter LESAGE, le premier inventeur d'un télégraphe électrique; voir sa lettre publiée par LHUILIER à la fin de son *Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs.*

§ 3. *L'angle de contingence.* — La proposition d'EUCLIDE rappelée au debut avait amené les mathématiciens à regarder l'angle de contingence comme une vraie grandeur de la même nature que les angles rectilignes. Mais il s'ensuivait de là un curieux paradoxe. Un rayon mobile peut partir d'une position donnée et aller à une autre sans former jamais avec la première position un angle égal à l'angle de contingence; donc une grandeur variant continuellement peut aller d'une valeur plus petite à une plus grande sans passer nécessairement par toutes les valeurs comprises entre celles-ci. Et il y a aussi une autre difficulté. L'existence de l'angle de contingence est en contradiction avec la première proposition du dixième livre d'EUCLIDE, plus connue sous le nom de *postulatum d'Archimède.* CAMPANUS, et plus tard STIFEL et CARDAN, regardèrent comme admissible le premier des deux paralogismes (ainsi que CARDAN les appellait); quant au second, ils tentèrent de le lever en disant que l'angle de contingence et l'angle rectiligne ne sont pas des grandeurs homogènes et ne tombent point par conséquent sous la proposition citée. Cette idée a été accueillie par DE FOIX CANDALLA ou FLUSSATE, et ensuite aussi par CLAVIUS et par ses défenseurs.

C'est seulement dans la seconde moitie du 16e siècle, que PELETIER eut le courage de déclarer que l'angle de contingence est absolument nul. CLAVIUS combattit âprement ses conclusions, qu'il jugea même contraires à EUCLIDE, et soutint que les angles de contingence sont de vraies grandeurs, et qu'il ne sont pas tous égaux; pendant que GUIDO UBALDO DEL MONTE exprimait le même avis à l'occasion d'une question de mécanique soulevée par TARTAGLIA.

Bientôt la discussion devint générale entre les savants de l'époque, et se prolongea pendant près d'un siècle. COMMANDIN, VIÈTE, GALILÉE, VIVIANI, WALLIS se rangèrent du côté de PELETIER; HOBBES, LEIBNIZ, NEWTON de celui de CLAVIUS.

COMMANDIN démontre que l'angle de contingence est nul, en le regardant comme l'angle extérieur d'un polygone d'un nombre infini de côtés. VIÈTE apporte plusieurs raisons à l'appui de la thèse de PELETIER; il remarque entre autres que les angles de contingence sont tous égaux entre eux, et qu'ils ne peuvent pas être mesurés par des arcs de circonférence.

GALILÉE, suivi par son élève VIVIANI, s'approprie les raisonnements de VIÈTE, et insiste particulièrement sur le premier les deux paralogismes rappelés plus haut. WALLIS recueille dans deux longs opuscules tous les arguments de ses prédécesseurs; il observe en outre d'après PROCLUS, qu'on peut dans quelques

cas former un angle rectiligne égal à un angle curviligne donné, et en déduit qu'on ne peut pas regarder les angles rectilignes et les angles curvilignes comme hétérogènes, de façon que la justification du deuxième paralogisme alléguée par les adversaires tombe d'elle-même.

HOBBES, ennemi déclaré de WALLIS, n'épargna point ceux de ses écrits qui se rapportent à l'angle de contingence. Il reproduisit en grande partie les raisons de CLAVIUS, en y ajoutant toutefois une remarque qui contient en germe la solution véritable de la question: c'est à dire, qu'il y a une commune mesure pour les angles de contingence, mais qu'il n'y en a pas une pour ces angles et les angles rectilignes pris ensemble; ou dans notre langage, que dans la classe de grandeurs formée par les angles rectilignes et par les angles de contingence ceux-ci sont infiniment petits par rapport à ceux-là. Cette circonstance ne pouvait pas échapper aux deux principaux fondateurs de la nouvelle analyse, LEIBNIZ et NEWTON; tous les deux en effet regardèrent l'angle de contingence comme un exemple intéressant de leurs concepts.

Enfin TACQUET et RENALDINI, deux géomètres du 17[e] siècle, se déclarèrent contraires en même temps à PELETIER et à CLAVIUS; ils nièrent en effet qu'on puisse appliquer aux angles les concepts d'égalité et d'inégalité, attendu que, suivant eux, l'angle n'est pas *quantitas,* mais *modus quantitatis.*

Après une si vive discussion, la question s'apaisa vers la fin du 17[e] siècle; parmi les auteurs peu nombreux qui en traitèrent plus tard on peut citer FONTENELLE, KARSTEN, SCORZA.

§ 4. *L'infiniment petit intensif.* — Parmi les formes différentes qu'affecte ce concept chez les divers savants, il faut en distinguer deux principales, qu'on peut nommer *forme cinématique* et *forme dynamique.* En considérant p. ex. le point comme l'élément générateur du continu, la forme cinématique se borne à remarquer le fait de la génération de la ligne par le mouvement, tandis que la forme dynamique fixe particulièrement son attention sur la *tendance* ou aptitude du point générateur à donner naissance au continu. Les deux formes doivent leur existence à deux philosophes: GIORDANO BRUNO et THOMAS HOBBES.

Déjà, avant BRUNO, NICOLAS DE CUSA avait appelé la ligne l'évolution du point. Mais c'est à BRUNO que revient l'honneur d'avoir renversé la question fondamentale d'où tire son origine le concept d'infiniment petit, en affirmant qu'on doit regarder l'élément (*minimum*) non pas comme le *dernier* résultat de la division du continu, mais comme le *premier* élément générateur

de l'extension. Le *minimum* devient ainsi pour lui le fondement, non seulement de la nature, mais aussi de notre connaissance de la nature, l'instrument sans lequel rien ne peut être conçu, le point auquel toute étude doit commencer.

On ne sait pas quelle influence aient exercé ces idées sur SOVERO et CAVALIERI, les deux savants à l'oeuvre simultanée desquels est due l'introduction du concept de mouvement comme fondement de la géométrie.

SOVERO dit que la géométrie ne peut pas subsister sans le mouvement, puisque les définitions qu'on y donne ordinairement ne nous présentent point une idée claire des formes géométriques, et, ce qui est pis, ne nous assurent même pas de leur possibilité. On définit, dit-il, le cercle comme une figure renfermée dans une ligne plane dont tous les points sont équidistants d'un point intérieur nommé centre; mais n'est-il pas permis de douter de l'existence d'une telle figure? Prenons maintenant une ligne droite, et faisons-la tourner dans un plan autour de l'une de ses extrémités; on verra l'autre extrémité engendrer le cercle, et l'on sera assuré de son existence et de sa propriété caractéristique. Mais ce n'est pas tout, car le mouvement est tout aussi bien nécessaire dans la géométrie constructive que dans la géométrie spéculative, n'étant pas possible de concevoir une construction quelconque sans l'aide du mouvement.

CAVALIERI regardait lui aussi assurément les surfaces comme engendrées par le mouvement d'un ligne; il considérait p. ex. les différentes ordonnées du contour d'une surface plane comme les positions successives (*vestigia*) de la droite mobile génératrice. Malheureusement l'infiniment petit intensif, sous quelle forme qu'on le prenne, n'est pas susceptible d'être introduit dans l'analyse, où l'on a à faire seulement à des grandeurs extensives. C'est ainsi que CAVALIERI se vit obligé de fonder sa méthode des indivisibles sur un principe tout différent, celui de la division des surfaces en une infinité de droites. Mais comme il n'eut pas soin de distinguer clairement les deux points de vue, plusieurs écrivains (p. ex. GULDIN, WALLIS, TAYLOR, GRANDI, FRISI, MONTUCLA, BOSSUT, etc.) ont été amenés à lui attribuer l'opinion qu'une surface soit effectivement décomposable en une infinité de lignes. Ce malentendu lui procura bien des adversaires, et il est curieux à voir que GULDIN, tout en combattant le concept faussement attribué à CAVALIERI, s'appropriait son concept vrai de la génération des grandeurs géométriques par le mouvement. A cette même idée sont inspirés les ouvrages de BARROW et de JEAN CÉVA.

Vers cette même époque, des recherches et des expériences qui sont restées immortelles, avaient fait de GALILÉE le créateur de la dynamique scientifique. Il avait le premier fixé son attention sur un élément essentiel du mouvement, dont on n'avait pas jusqu'alors assez tenu compte, je veux dire sur la tendance du corps mobile à poursuivre son mouvement d'une façon déterminée (*momento*). HOBBES donna au concept de GALILEI une bien plus grande étendue, en faisant du *momento,* qu'il appela *conatus,* l'élément générateur, non seulement du mouvement, mais aussi de tout continu, puisque, suivant HOBBES, on peut regarder toute grandeur continue comme engendrée par le mouvement. Le *conatus* est donc un mouvement le long d'un espace et pendant un temps moindre qu'aucun assignable, il est incomparable à tout mouvement, mais deux *conatus* sont comparables entre eux. Et la vitesse est le mouvement envisagé comme la *puissance* en vertu de laquelle un point parcourt une longueur donnée dans un temps donné.

Peu après le *conatus,* sous son nom primitif de *momentum,* apparait dans les recherches mathématiques de NEWTON, qui, en regardant les grandeurs comme nées du mouvement (*fluentes*), se propose d'en calculer les variations à l'aide des vitesses (*fluxiones*) avec lesquelles elles augmentent ou diminuent, vitesses qui sont proportionnelles aux moments. Ce même concept se retrouve chez MAC-LAURIN, et aussi, sous une forme très peu différente, chez TAYLOR.

II. L'application de l'infiniment petit aux mathématiques.

§ 1. *Méthode d'exhaustion.* — Le souvenir le plus ancien de l'usage de l'infini en mathématiques c'est la quadrature du cercle d'ANTIPHON. Ce géomètre inscrivit, comme on sait, dans le cercle des polygones réguliers de 4, 8, 16, ... côtés, et affirma qu'en continuant de la sorte on parviendrait enfin à un polygone, dont les côtés, grâce à leur petitesse, se confondraient avec la circonférence. Les géomètres grecs postérieurs n'acceptèrent point, et à bon droit, cette conclusion comme rigoureuse; au contraire ils s'efforcèrent de développer les mathématiques en dehors de toute notion de l'infini. De là naquit la méthode célèbre dont EUCLIDE et ARCHIMÈDE firent un usage si étendu, et qui consiste en ce qu'on réduit l'étude d'une figure donnée à celle d'une autre de nature différente, mais dont la grandeur et la forme peuvent différer de celles de la première aussi peu que l'on veut. Au 17e siècle VALERIO, TACQUET et RENALDINI

donnèrent une forme plus générale et systématique à cette méthode, qui prit le nom de *méthode d'exhaustion.*

Il est remarquable, que presque tous les principaux fondateurs de l'analyse moderne — comme KEPLER, ROBERVAL, FERMAT, WALLIS, PASCAL, LEIBNIZ, NEWTON, JEAN BERNOULLI — ont regardé les méthodes modernes comme essentiellement identiques à celle des anciens, dont elles ne constitueraient qu'une simplification; tandis qu'au contraire depuis la moitié du 18e siècle on s'est plutôt efforcé d'en chercher et d'en éclaircir les différences. Je ne m'arrête point ici sur cette question, qui n'a peut-être pas un intérêt immédiat pour notre argument.

§ 2. *Méthode des indivisibles.* — Suivant LIBRI, LÉONARD DE VINCI aurait déterminé le centre de gravité de la pyramide en la décomposant en plans parallèles à la base. Mais le vrai précurseur de CAVALIERI c'est KEPLER, qui, pour calculer le rapport des volumes des solides, les regarde *veluti plana corporata,* comme des plans devenus corps.

La méthode de CAVALIERI s'appuie sur le principe suivant: Si deux surfaces planes sont comprises entre deux mêmes parallèles, et si l'on imagine de mener toutes les droites parallèles à celles-ci, les deux surfaces auront entre elles le même rapport que les sommes des segments de ces parallèles contenus respectivement dans l'intérieur des deux surfaces. Les deux sommes étant évidemment infinies, il s'agit en réalité de déterminer la limite du rapport des sommes des segments lorsque le nombre des parallèles croît indéfiniment. La détermination de cette limite, que CAVALIERI effectuait dans les différents cas à l'aide d'artifices spéciaux, fut rendue plus aisée et plus régulière par WALLIS, grâce à l'usage de concepts arithmétiques et à l'étude de quelques series infinies. La méthode des indivisibles, dont ROBERVAL réclamait la priorité, et dont plusieurs mathématiciens (GULDIN, TACQUET, BETTINI etc.) attaquaient les fondements, trouva une expansion rapide en Italie et à l'étranger; parmi ses adeptes on peut signaler TORRICELLI, DEGLI ANGELI, CASATI, JEAN CÉVA, GRANDI, WHITE, SCHOOTEN, WALLIS.

GRÉGOIRE DE S. VINCENT développa dans son *Opus geometricum* une méthode, qui, quoique semblable à celle de CAVALIERI dans la forme, en diffère dans le fond, parce que les démonstrations y procèdent toujours à la façon des anciens.

§ 3. *Méthode des infiniment petits.* — L'idée que le cercle est un polygone d'un nombre infini de côtés, née à une époque très ancienne, repoussée ensuite par la rigueur de la science grecque, reparaît après bien des siècles chez NICOLAS DE CUSA,

Stifel, Commandin, Viète; Kepler en fait l'application à la détermination de la surface du cercle, qu'il regarde comme composé d'une infinité de triangles isoscèles égaux ayant leur sommet commun au centre. A cette même époque prenait naissance la méthode des indivisibles; mais le principe de la décomposition des surfaces en lignes était accueillie avec défiance par beaucoup d'esprits. Ce fut alors qu'on conçut l'idée de substituer aux lignes rigoureusement indivisibles, des bandes superficielles très-minces, formées par un système d'ordonnées équidistantes en nombre arbitrairement grand (Roberval, Pascal). On pouvait transformer ces bandes à contour mixtiligne, par la suppression d'une portion triangulaire, en des rectangles, dont la surface totale était égale au produit de la somme des ordonnées moins une par leur distance constante δ, et il était possible dans les cas ordinaires d'établir, qu'on peut augmenter suffisamment le nombre des ordonnées pour que la somme des triangles qu'on néglige devienne arbitrairement petite. Il est aisé de voir que le résultat ainsi obtenu ne diffère de celui qu'aurait fourni la méthode des indivisibles que par le facteur constant δ, destiné d'ailleurs à disparaître lorsqu'on calculerait le rapport de deux surfaces. Mais cette différence prenait une importance particulière de ce fait qu'elle introduisait dans le calcul une quantité δ de grandeur arbitrairement petite, c'est à dire un *infiniment petit;* car cet élément allait bientôt devenir un aide précieux pour l'étude des problèmes fondamentaux qui hantaient la pensée des savants de l'époque. Je fais allusion spécialement à la recherche des maxima et des minima et à la détermination des tangentes aux lignes courbes.

Fermat donna la règle suivante pour la recherche des maxima et des minima d'une fonction $f(x)$. On écrit l'équation approchée (*adaequatio*) $f(x+\varepsilon)=f(x)$, ou $f(x+\varepsilon)-f(x)=0$, on divise par ε et l'on fait ensuite $\varepsilon=0$; l'équation ainsi obtenue donnera les valeurs cherchées de x. Huygens commente cette règle en disant que, si x est une valeur pour laquelle $f(x)$ est maximum ou minimum, il doit y avoir au voisinage de x deux valeurs $x-\delta$, $x+\varepsilon$ telles que $f(x+\varepsilon)=f(x-\delta)$, ou bien, en posant $x-\delta=x_1$, $\delta+\varepsilon=e$:

$$f(x_1+e)=f(x_1),$$

et par conséquent, que les valeurs qu'on obtiendra de cette relation en y regardant e comme *infiniment petite* — c'est à dire en divisant par e et en négligeant ensuite tous les termes contenant e — rendront la fonction $f(x)$ maximum ou minimum.

L'un et l'autre appliquèrent leur règle au problème des tangentes. C'est justement ce dernier problème qui amena BARROW à la considération du *triangle caractéristique,* formé par les incréments simultanés de l'abscisse, de l'ordonnée et de l'arc. Ce triangle étant semblable à celui formé par la sous-tangente, l'ordonnée et la tangente, on peut déduire du rapport des incréments de l'ordonnée et de l'abscisse celui de l'ordonnée et de la sous-tangente, et par là mener la tangente à la courbe au point considéré. Il va sans dire qu'on doit ici aussi négliger les termes qui ne sont pas finis.

C'était donc un vrai relâchement dans la rigueur justement vantée des mathématiques qui se produisait à cette époque, et cela ne pouvait pas manquer d'éveiller des doutes dans les esprits timides. Il était reservé à notre siècle de mettre à jamais la nouvelle analyse à l'abri de toute attaque; mais LEIBNIZ sut au moins faire dépendre tout ce qu'il y avait de peu sûr dans son calcul d'un seul point, c. à. d. du lemme fondamental qu'un *infiniment petit, ajouté à une quantité finie, n'en altère pas la valeur et peut par suite être negligé.* D'ailleurs ce n'est pas là le seul titre de gloire de LEIBNIZ. C'est grâce à lui que le calcul différentiel est devenu un algoritme général, applicable dans tous les cas, directement et sans tâtonnements; c'est lui aussi qui a découvert le lien tout à fait simple existant entre le problème des quadratures et celui des tangentes, en rendant ainsi possible la création d'un vrai *calcul intégral.* La méthode leibnitienne a été exposée d'une façon systématique par L'HOSPITAL dans son *Analyse des infiniment petits,* en partant de ces deux postulats que l'auteur regarde comme évidents: qu'on peut prendre l'une pour l'autre deux quantités dont la différence est infiniment petite, et qu'on peut envisager une ligne courbe comme un polygone d'un nombre infini de côtés. VARIGNON, le plus illustre parmi les commentateurs de l'*Analyse,* fit de ses *Eclaircissements* un ouvrage presque original, où l'on remarque une tendance prononcée vers la méthode des limites.

On trouve aussi dans l'ouvrage de GRANDI: *De infinitis infinitorum et infinite parvorum ordinibus disquisitio geometrica* une exposition complète des principes du calcul infinitésimal. Enfin on doit signaler comme le premier traité de calcul intégral les *Lectiones mathematicae de calculo integralium aliisque* de JEAN BERNOULLI.

§ 4. *Méthode des limites.* — Cette méthode diffère de celles des indivisibles et des infiniment petits en ce qu'elle ne se fonde sur aucun lemme ou postulat particulier, et se sert seulement

des moyens que lui fournit l'algèbre, et des théorèmes élémentaires sur la limite d'une somme, d'un produit et d'un quotient.

La *Vera circuli et hyperbolae quadratura* de JACQUES GREGORY, ouvrage très remarquable bien que manqué, est peut être l'essai le plus ancien sur la méthode des limites, mais c'est NEWTON qui en fit le premier un usage étendu dans ses *Principia* en la fondant sur le théorème suivant: Deux grandeurs, dont la différence devient en un temps fini moindre qu'aucune assignable, deviennent enfin égales. Plus tard, en combinant la méthode des limites avec le concept de vitesse, il créa la *méthode des fluxions,* dont j'ai déjà rappelé le principe plus haut (I, § 4), et qui a été exposée dans tous ses détails et avec ses applications par MAC-LAURIN. On peut rapprocher de celle-ci la *méthode des incréments* de TAYLOR.

Ainsi que je l'ai déjà remarqué, le traité de calcul différentiel d'EULER est fondé effectivement sur le principe des limites, bien qu'il n'en soit pas ainsi en apparence; il l'avoue lui-même dans sa préface, où il dit qu'on doit concevoir les incréments des variables comme toujours décroissants, de façon que le rapport de ses incréments tend à une certaine limite, qu'il atteint lorsque les incréments deviennent absolument nuls.

Pendant que D'ALEMBERT ouvrait la campagne contre les concepts d'infini et d'infiniment petit, LANDEN, KRAMP, ARBOGAST, et plus tard LAGRANGE, tentaient d'établir des méthodes analytiques indépendantes de ces concepts, et en 1784, l'Académie de Berlin invitait les savants de tous les pays à présenter une théorie claire et précise de ce qu'on appelle *infini* en mathématiques, et à expliquer comment on a déduit tant de théorèmes vrais d'un concept contradictoire, tel que celui de *grandeur infinie.* Le prix fut adjugé à LHUILIER, qui dans son *Exposition élémentaire* s'était proposé de montrer que la *méthode des anciens, convenablement étendue, suffit pour établir d'une manière certaine les principes des nouveaux calculs.* Mais l'extension qu'il présente transforme simplement la méthode des anciens dans la méthode des limites; voici en effet son théorème fondamental: *Si une quantité variable, susceptible de limite, approche d'autant plus de jouir d'une propriété, qu'elle approche d'avantage de sa limite, de manière qu'il n'y ait aucune limite à la capacité qu'elle a de jouir de cette propriété, sa limite jouit de cette propriété.* Je mentionne seulement en passant un mémoire de KARSTEN occasionné par le même concours, mais ne contenant rien de particulièrement remarquable. C'est peut-être aussi à la suite du concours de Berlin que CARNOT écrivit ses *Réflexions sur*

la métaphysique du calcul infinitésimal, publiées seulement en 1797. Dans cet opuscule, qui eut un grand retentissement, CARNOT s'acharne contre ceux qui voudraient remplacer la méthode leibnitienne par d'autres moins simples et directes. Il établit l'exactitude de la méthode infinitésimale en s'appuyant sur deux considérations: celle de l'indétermination des différentielles et celle de l'élision des erreurs. Le principe d'où il part est tout à fait juste, mais son procédé est susceptible d'une remarquable simplification, car l'indétermination des différentielles suffit à elle seule pour justifier pleinement la méthode de LEIBNIZ, et l'élision des erreurs n'en est qu'une conséquence. C'est ce qu'aperçut sans doute CAUCHY, qui trouva qu'il suffisait de définir l'infiniment petit d'une façon précise et convenable, pour lever tout doute sur l'exactitude de la méthode infinitésimale. Il définit donc l'infiniment petit comme une grandeur variable ayant pour limite zéro, et cela permit de démontrer immédiatement ce lemme fondamental, qui avait été jusqu'alors la pierre d'achoppement dans le grand édifice élévé par LEIBNIZ..

Ainsi les deux méthodes, déjà opposées l'une à l'autre, se fondaient enfin en une seule, qui, joignant la rigueur à la simplicité, prenait son départ d'une définition précise empruntée à la méthode des limites pour procéder ensuite suivant le langage et le mécanisme de la méthode infinitésimale.

Über den Josephus sapiens oder Hispanus Gerberts.

Von M. CURTZE in Thorn.

Durch die völlig negativ verlaufenen Untersuchungen H. WEISSENBORNS[1] über die von GERBERT in zwei Briefen aus dem Jahre 984 als Verfasser einer Anleitung zur Multiplication und Division erwähnten Persönlichkeit eines gewissen JOSEPHUS *sapiens* oder JOSEPHUS *Hispanus* ist in neuerer Zeit die Aufmerksamheit auf diesen Mann wieder gelenkt worden. Dass derselbe, ausgestattet mit dem Namen *sapiens,* d. h. der *Weise,* unter der Gestalt eines spanischen Schutzjuden des Grafen von Barcellona zu suchen sein sollte, will mir nicht in den Kopf.[2] So habe ich denn in den mir zugänglichen Quellen mich umgesehen, ob nicht ein Mann, dem der Name JOSEPH zukommt, der mehrfache Werke über Rechenkunst verfasste und zu der Zeit GERBERTS oder vor derselben gelebt haben muss, sich nachweisen lasse. Ich glaube eine solche Persönlichkeit gefunden zu haben und möchte mich darüber hier des weiteren auslassen.

In dem von H. SUTER übersetzten Mathematiker-Verzeichniss im *Fihrist* des IBN ABÎ JA'KUB AN-NADÎM[3] finde ich folgende Notiz (S. 37):

AR-RÂZÎ.

> JAK'UB BEN MUHAMMED, mit dem Beinamen ABU-JÛSUF schrieb: Das Buch über das gesammte Rechnen. Das Buch *at-Taht.* Über die Rechnung mit den beiden Fehlern. Das Buch der dreissig seltenen (ungewöhnlichen, fremdartigen) Fragen (Probleme).

Da der *Fihrist* im Jahre 987 abgeschlossen ist,[4] so liegt zunächst die Lebenszeit des AR-RÂZÎ, genannt ABU JÛSUF, vor diesem Zeitpunkte, sie braucht aber nicht bis zu ihm selbst heranzureichen. Seine exakte Lebenszeit ist nicht bestimmbar.[5] Der Betreffende wird ABU JÛSUF genannt, also ist auch der Name JOSEPH vorhanden.

In Bezug auf das Buch *at-Taht* heisst es weiter bei HÂDSCHÎ KHALFA:[6] »quae ea ars est, qua ratio cognoscitur, operationes arithmeticas signis tractandi, quae numeros ab uno usque ad decem exprimunt et omnes alios, qui hos excedunt, ope ordinum, quo ponuntur, excludunt. Haec signa ab Indis originem duxisse dicuntur. Eadem doctrina nobis *el-taht* sive *el tarâb* (Erde, Staub = gobâr) dicitur».

Dazu macht Suter die Bemerkung:[7] »Ich wage die Vermuthung auszusprechen, das Wort *taht* bedeute das indische *tatstha*, welches die sogenannte symmetrische oder kreuzweise Multiplikationsmethode bedeutet».

Es ist also das Buch *at-taht* auch dem Inhalte nach ein Werk über Multiplikation (und vielleicht auch Division) und zwar nach Woepcke,[8] der freilich statt *taht, tacht* liest, würde ***hisâb** at-tacht wa'l-mîl* das Rechnen mit den indischen Ziffern auf dem Staubbrett mit Hilfe des Griffels (*mîl*) im Gegensatz zu dem Fingerrechnen sein.

Ob es sich nicht lohnen würde dieser Spur eines den Beinamen Jûsuf führenden, mit den Ziffern *Gobâr* rechnenden, auch der Lebenszeit nach stimmenden Mannes weiter nachzugehen, muss ich competenteren Beurtheilern zu entscheiden überlassen.

[1] *Zur Geschichte der Einführung der jetzigen Ziffern in Europa durch Gerbert. Eine Studie von* H. Weissenborn (Berlin 1892). Man vergleiche auch den Aufsatz desselben Verfassers über Josephus *sapiens* in dieser Zeitschrift (1893, S. 21—23).

[2] Ähnliches hat schon Steinschneider in dieser Zeitschrift (1893, S. 61) ausgesprochen.

[3] *Das Mathematiker-Verzeichniss im Fihrist des Ibn Abî Ja'kub An-Nadim. Zum ersten Mal vollständig ins Deutsche übersetzt und mit Anmerkungen versehen von* Hermann Suter (Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik **6**, 1892, S. 1—87).

[4] Suter, a. a. O., S. 3.

[5] Suter, a. a. O., S. 71, Anm. 237.

[6] Suter, a. a. O., S. 70, Anm. 232, zu dem Artikel Sinân ben al-Fath.

[7] Ebenda.

[8] Ebenda, am Ende der Anm. 232.

Das gläserlose Sehrohr im Altertum und Mittelalter.

Von S. GÜNTHER in München.

Schon häufig, immer jedoch nur gelegentlich, ist die Frage erörtert worden ob und weshalb man auch vor Erfindung des eigentlichen Fernrohres sich eines hohlen Rohres zur Beobachtung des gestirnten Himmels bedient habe. Es mag deshalb gestattet sein, den Gegenstand einmal im Zusammenhange zu behandeln und alle die Zeugnisse zu prüfen, welche zu gunsten einer solchen Beobachtungsthätigkeit angeführt werden können. Selbstverständlich wird auf absolute Vollständigkeit dabei nicht zu rechnen sein, vielmehr wird es genügen müssen, die wichtigsten Thatsachen der Besprechung unterzogen zu haben, und auf die Erreichung dieses Zieles glaubt unsere kleine Skizze allerdings Anspruch erheben zu können.

Von vornherein liegen ersichtlich nur zwei Möglichkeiten vor, welche man ins Auge zu fassen ein Recht hat. Das Sehrohr kann dazu dienen, ein entferntes Objekt — einerlei ob auf die Erde oder am Himmel — schärfer anzuvisieren und dadurch genauer seiner Lage nach zu bestimmen, als dies durch blosse *Sehlöcher* oder *Diopter*n angängig erscheint; es kann aber auch den Zweck haben, das diffuse seitlich einfallende Licht fernzuhalten und so ein günstigeres Sehen des Blickzieles zu ermöglichen. Die erste Art der Verwendung ist eine unmittelbar einleuchtende; wer zu gedachtem Zwecke eine Röhre an einem Messinstrumente anbrachte, der that mutatis mutandis genau dasselbe, was MORIN erreichen wollte als er ein Fernrohr fest mit der Alhidade seines Quadranten verband.[1] Wir wollen demgemäss fürs erste einen Blick auf die Geschichte der praktischen Astronomie werfen, während wir den zweiten der genannten Fälle einer späteren Diskussion vorbehalten.

Die unseres Wissens *erste* geschichtliche Belegstelle, welche wir zu zitieren haben, zeigt gleich recht deutlich, dass das Sehrohr nur dazu bestimmt war, einen Ort im Raume recht exakt erkennen und festhalten zu können. POLYBIOS gibt einmal[2] einen Überblick über die im damaligen Heerwesen gebräuchlichen Methoden, wichtige Nachrichten durch eine Art von Fackel-Telegraphie auf weite Entfernungen mitzuteilen. Es wird insbesondere das von KLEOXENOS und DEMOKLEITOS angewandte Verfahren beschrieben, und da wird u. a. von den Telegra-

phisten folgendes gesagt: »Wenn sie nach dieser Übereinkunft sich jeder an die bestimmte Stelle begeben, so muss jeder zuvörderst ein *Diopter mit zwei Röhren* haben, so dass diejenigen, welche sich gegenseitig Signale geben wollen, mit der einen Röhre die Stelle rechts, mit der anderen die Stelle links erblicken können.» Er ist mithin eine Art von Binokolurartele- skop, wennschon ohne vergrössernde Eigenschaften, gemeint, und man erkennt sofort, dass ohne die Röhre der militärische Zweck, auf den es bei diesem Hinschauen nach weit abliegenden Feuerzeichen ankam, unerreichbar hätte bleiben müssen.[3]

Irgend ein Beweis dafür, dass auch auf *griechicshen* Sternwarten das Sehrohr eine Rolle gespielt habe, lässt sich nicht erbringen. Wohl aber haben die *Araber,* welche ja überhaupt um die eigentliche Beobachtungstechnik sich entschiedene Verdienste erworben, den genannten Vorteil sich nicht entgehen lassen.[4] Und auch die *Hebräer,* welche ja in so manchen Dingen von ihren Stammesverwandten lernten, waren mit dem Gebrauche der gläserlosen Tuben vertraut, und zwar scheinen diese nach den dürftigen auf uns gekommenen Nachrichten darüber auch zum geodätischen Gebrauche verwendet worden zu sein: »Eine Art Fernrohr (ohne Gläser)», so lesen wir bei Zuckermann[5] »im Besitze des Rabbi Gamaliel wurde zur Angabe von Ortsentfernungen und zur Messung der Tiefe eines Thales angewendet.» Auch hier können die Motive, welche dazu veranlassten, die ursprünglich isolirten Durchsichten in eine gemeinsame Fassung zu bringen, niemandem unklar bleiben.

Das christliche Mittelalter ist, wie man weiss, über den Standpunkt seiner Lehrer nur selten hinausgegangen, hat sich vielmehr im allgemeinen darauf beschränkt, auf den durch jene vorgezeichneten Wegen zu verbleiben und nur ab und zu kleine Schritte vorwärts zu thun. Zu denjenigen Gelehrten, welche noch am meisten originelle Denkart an den Tag legten, gehört zweifellos der bekannte Gerbert (nachmaliger Papst Sylvester), ein Mann, dessen mathematisches Talent, von seinen Zeitgenossen wohl etwas über Gebühr angestaunt, sich vorzugsweise in der Konstruktion neuer Apparate bethätigte. Gerbert's Biograph Werner hat auf die Schilderung dieser Seite seiner Thätigkeit besonderen Fleiss gewendet.[6]

Den Angaben des Richerus sowie denjenigen zufolge, welche in einem Briefe Gerbert's an den Stiftslehrer Konstantin von Fleury niedergelegt sind, hatte der gelehrte Praelat, von seinem bekannten Himmelsglobus abgesehen, auch eine Armillarsphäre konstruirt, welche auch die wichtigsten Sterne

und Sternbilder an Drähten enthielt,[7] während eine am Instrumente angebrachte Röhre auf den Polarstern einzustellen erlaubte. Man darf wohl glauben, dass diese Röhre, so lange Beobachter und Sphäre ihren Ort nicht veränderten, festgeschraubt war, dass sich aber ihre Stellung der jeweiligen geographischen Breite anpassen liess. Es ist nicht unwahrscheinlich, dass so zugleich ein wichtiger didaktischer Zweck erreicht ward, nämlich der, den Lernenden von der relativen Unveränderlichkeit des Polarsternes zu überzeugen.[8] In dem Sendschreiben an KONSTANTIN drückt sich GERBERT noch bestimmter darüber aus, wie man einen Sternglobus so zu orientiren habe, dass sich an ihn unmittelbar die Bewegung des Himmels verfolgen lasse. »Zwei ausgehöhlte Halbkugeln, deren Pole durchbort sind, werden an einander gelegt, und die durchborten Pole werden mittelst einer Röhre, der sogenannte Polarröhre, verbunden, die auf das Sternbild des kleinen Bären gerichtet ist.» An dem Apparate, befanden sich auch noch andere Sehrohre, mit deren Hilfe bestimmte Punkte des Himmelsgewölbes fixiert werden konnten.

Bei allen diesen Verkehrungen handelt es sich, wie man sieht, durchaus nicht darum, von dem Objekte, nach welchem man das Rohr richtete, ein besonders deutliches, klares Bild zu erhalten; *bisjetzt stellt sich uns das Sehrohr lediglich dar als Unterrichtsmittel oder als ein Mittel zur Erleichterung und Verschärfung der Ortsbestimmung.* Inwieweit, so haben wir aber weiter zu fragen, konnte das leere Rohr noch dem weiteren Zwecke dienen, den wir heutzutage mittelst des katoptrischen oder dioptrischen Fernrohres anstreben? Die Ansicht, dass man in früheren Zeiten des Tubus auch bloss zur genaueren Betrachtung des Firmamentes sich bedient habe, wird mehrfach von neueren Schriftstellern, so zumal von MÄDLER[9] und von SERVUS,[10] vertreten, und in der That scheint dieselbe, wiewohl sich manches auch dagegen einwenden lässt, auf Grund der Urkunden nicht von der Hand gewiesen werden zu dürfen.

Auch HENRI MARTIN, dem wir wohl die zuverlässigste kritische Prüfung der Frage nach allfallsigen Vergrösserungsmitteln des Altertums verdanken,[11] ist von der gelegentlichen Benützung des Sehrores überzeugt, betont aber zugleich, dass dasselbe keinen eigentlichen Gewinn bringen konnte. Man begegnet zwar dem Ausspruche, dass man durch lange Rohre schärfer und weiter sehen könne, als mit freiem Auge, und zwar rührt dieser Ausspruch von keinem geringeren als von ARISTOTELES selber her,[12] allein irgendwelche Konsequenzen für

das, was man gegenwärtig als *topographische Astronomie* bezeichnet, hat jene Erkenntnis, wenn man es so nennen will, nicht gehabt.[13] Man wäre strenge genommen nur einen einzigen Fall aus der Geschichte der antiken Astronomie anzuführen in der Lage, welche auf eingehenderes Studium der *Oberflächenbeschaffenheit eines Himmelskörpers* hinweist: wir meinen die (pseudo-)Plutarchische kleine Schrift *De facie in orbe lunae*,[14] und dass derjenige, der diese verfasste, unseren Trabanten durch ein von den Störungen des diffusen Himmelslichtes emanzipierendes optisches Instrument zum öfteren betrachtet habe, kann unbedenklich zugestanden werden.

Wie dem aber auch sei: dafür, dass man wirklich auch im Mittelalter Rohre nach dem gestirnten Himmel gerichtet habe, *ohne zugleich irgendwelche Messung zu beabsichtigen*, liegen unverwerfliche Zeugnisse vor. Das eine derselben stammt aus dem Kloster St. Gallen, welches ja in der älteren deutschen Kaiserzeit einer besonders hohen Blüte sich erfreute. Der Gewährsmann, dem wir die sichersten Nachrichten hierüber zu danken haben, I. v. Arx, meldet von den Mönchen folgendes:[15] »In der Astronomie, die sie mitunter auch Astrologie nannten, schränkten sie ihr Wissen nicht bloss auf die Kunde der Sternbilder und des Sonnenlaufes ein, sie wussten sich auch des *Tubus* und des Astrolabiums zu dienen.« Und in einer Randnote fügt er noch bei: »In der Handschrift K. 18 p. 43 steht noch das Bild eines Klostergeistlichen, der durch einen langen Tubus ein Gestirn beobachtet. Eine räuberische Hand hat aber den Diskus desselben herausgeschnitten.« Etwas anders schildert den Zusammenhang Zimmermann.[16] In einem astronomischen Kodex der Klosterbücherei sieht man das Bild eines durch ein Rohr nach dem Himmel blickenden Mönches; um Raum für wichtiger Erscheinendes zu gewinnen, kratzte man — nach vielbewährten Mustern — die Zeichnung ab, allein mitten in dem so entstandenen Palimpseste ist der beobachtende Astronom mit seinem Tubus noch jetzt zu erblicken. Wir wissen nicht ob v. Arx' und Zimmermann's Mitteilungen sich auf das nämliche Manuskript beziehen, jedenfalls aber steht soviel fest, dass man in St. Gallen das Sehrohr — ohne Messvorrichtung — zu den gewöhnlichen Beobachtungsinstrumenten gezählt hat.[17]

Auch aus etwas späterer Zeit liegt eine Abbildung von ganz verwandter Art vor, die uns jedoch zugleich ein gewisses Rätsel aufgiebt. Der Jesuit Cysatus, welcher zu Beginn dess XVII. Jahrhunderts an der Universität Ingolstadt die Mathematik mit grossem Beifalle lehrte, spricht zuerst von einer der Bi-

bliothek des Klosters Scheyern (in Oberbayern) gehörenden Federzeichnung, die einen mit dem Tubus operierenden Beobachter darstelle.[18] Doch thut er der auszeichnenden Eigenschaft eben dieses Bildes noch keine Erwähnung. Dies geschieht erst etwas später bei dem bekannten Theologen und Historiker MABILLON, welcher im Auftrage des Ministers COLBERT, und auf Kosten LUDVIG's XIV., eine Studienreise nach Deutschland unternommen hatte. Dieser hebt besonders auch hervor, dass das Rohr des abgebildeten Astronomen, in welchem er den PTOLEMAEUS erblickt, *vier Züge zum Zusammenschieben* besitze.[19] Dass es sich wirklich so verhält, davon kann sich jeder überzeugen, der in KNITL's Monographie über Scheyern die hier zu findende Reproduktion des Originales sich ansieht.[20]

Was soll nun diese *Auszugsvorrichtung* bei einem gläserlosen Tubus bedeuten, denn dass damals, als der fragliche Kodex entstand, an irgend eine Art des wirklichen Fernrohres noch nicht zu denken war, leidet wohl keinen Zweifel.[21] Unseres Dafürhaltens hat man daran zu denken, welche grosse Autorität ARISTOTELES für die damalige Zeit besass. Man hatte bei ihm (s. o.) gelesen, dass eine Röhre ein um so besseres Bild gewähr leiste, je länger sie sei, und so steckte man einfach eine Anzahl solcher Röhren zusammen, um durch Verschiebung derselben jenen Satz praktisch zu erproben. Und dieser Zweck wird, wie A. v. HUMBOLDT[22] ausdrücklich bemerkt, auch erreicht worden sein.

Wenn wir unsere Ergebnisse rekapitulieren, so können wir denselben zweierlei entnehmen. Das gläserlose Fernrohr der früheren Zeit ersetzte nach zwei verschiedenen Richtungen hin den älteren Astronomen das Fernrohr unserer Tage. Erstlich liess sich der Tubus mit Messinstrumenten kombinieren und diente dann irgendwelchem feldmesserischen oder mathematisch-geographischen Zwecke, vielleicht auch dann und wann nur dem elementaren Unterrichte in der Sternkunde. Zum zweiten aber wurde dieser Tubus auch im Sinne des ARISTOTELES als ein direktes Hilfsmittel, um das Gesicht zu unterstützen, angesehen, und um dieser Seite seiner Wirksamkeit möglichst auszugestatten, aptierte man dasselbe in der uns bekannten Art und Weise für Verkürzung oder Verlängerung. Es darf vermutet werden, dass ein solcher Hohlzylinder zu den Inventarstücken eines besser eingerichteten mittelalterlichen Observatoriums gehörte.

[1] Es scheint festzustehen (R. WOLF, *Geschichte der Astronomie*, München 1877, S. 328, 363), dass MORIN als der erste die

Absehen durch das Fernrohr — jedoch ohne Fadenkreuz — ersetzte.

[2] Polybios, lib. x, cap. 43 ff.; Polybios *Geschichten, übersetzt von* Campe (Stuttgart 1862), S. 909 ff.

[3] Indem Houzeau und Lancaster (*Bibliographie générale de l'astronomie,* 1. Band, Brüssel 1887, S. 173) der Bemerkung des Polybios Erwähnung thun, fügen sie hinzu, dass ähnliche Vorrichtungen in der Sternkunde der Chinesen in noch früherer Zeit einen Platz gehabt hätten (vgl. Souciet, *Observations mathématiques, astronomiques, géographiques, chronologiques et physiques, tirées des anciens livres chinois,* tome 2 [Paris 1732] S. 25). Für bewiesen kann diese nicht unwahrscheinliche Annahme freilich nicht gelten.

[4] Notizen hierüber findet man in den beiden nachstehend verzeichneten Schriften: Jourdain, *Mémoire sur l'observatoire de Méragah et sur quelques instruments employés pour y observer* (Paris 1810); L. A. Sédillot, *Mémoire sur les instruments astronomiques des Arabes* (Paris 1841).

[5] Zuckermann, *Das Mathematische im Talmud; Beleuchtung und Erläuterung der Talmudstellen mathematischen Inhaltes* (Breslau 1878), S. 2. Der Hinweis auf diese Stelle, welchem man in dem unlängst in dieser Zeitschrift (1893, S. 111) abgedruckten Aufsatze Steinschneider's begegnet, gab für die vorliegende Untersuchung den ersten Anstoss.

[6] K. Werner, *Gerbert von Aurillac, die Kirche und Wissenschaft seiner Zeit* (Wien 1878), S. 35; Migne, *Patrologia Latina,* tom. CXXXX, S. 155.

[7] Die Gerbert'sche Beschreibung dürfte, soweit die spärlichen Mitteilungen uns ein Urteil erlauben, Ähnlichkeit gehabt haben mit dem grossartigen Projektionsglobus von Adami (vgl. Verhandlungen der 41. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner in München, Leipzig 1892, S. 310; Ausland 1892, S. 321 ff.). Auch dieser stellt sich dar als Nachbildung der wichtigsten Himmelskreise; ist in Metall ausgeführt, und die Fundamentalsterne sind an einem dieser Kreise (dem Aequator) durch Drähte befestigt.

[8] Dieser seiner Auffassung hatte der Verf. schon früher (*Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter bis 1525,* Berlin 1887, S. 78) in folgender Weise Ausdruck verliehen: »Wir würden am meisten der Annahme zustimmen, dass ein Tubus dieser Art, auf einem Statife angebracht, zur Auffindung des Polarsterns diente, dass

somit nicht erst GERBERT für den Urheber dieses einfachen Verfahrens zu gelten hat; in der Chronik des Bischofs THIETMAR von Merseburg wird nämlich von jenem gesagt: 'In Magdeburg horologium fecit, illud nocte constituens considerata per *fistulam* quandam stella nautarum duce.' Man richtete, so denken wir uns den Sachverhalt, auf der Sternwarte das Rohr nach einem beliebigen Sterne, liess den Schüler hindurchsehen und zeigte ihm so direkt, was sonst erst nach Umfluss einer längeren Zeit festzustellen ist, dass nämlich jener Stern sich fortbewegt. Nur Sterne im unmittelbaren Umkreise des Poles blieben dauernd im Gesichtsfelde.» In solcher Weise soll sich der bekannte Autodidakt VAL. DUVAL (vgl. dessen Leben von KAISER, Regensburg 1888) die Kenntniss von der scheinbaren Bewegung der Himmelskugel verschafft haben.

[9] MÄDLER, *Geschichte der Himmelskunde von den ältesten bis auf die neueste Zeit,* I. Band (Braunschweig 1873), S. 189: »Es ist nicht zu leugnen, dass die Alten *tubi* anwandten um deutlicher zu sehen: lange hohle Röhren, um die störenden Seitenstrahlen abzuhalten; allein nichts deutet darauf, dass diese *tubi* mit optischen Gläsern versehen waren.»

[10] SERVUS, *Die Geschichte des Fernrohres bis auf die neueste Zeit* (Berlin 1886), S. 11 ff.

[11] H. MARTIN, *Sur des instruments d'optique faussement attribués aux anciens par quelques savants modernes,* Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche, **4,** 1871, S. 165 ff.

[12] *Ἀριστοτέλους περὶ ζῴων γενέσεως βιβλία ε̄*; ARISTOTELES, *fünf Bücher von der Zeugung und Entwickelung der Tiere, übersetzt von* AUBERT *und* WIMMER (Leipzig 1860), S. 366. Der Stagirite erläutert (lib. I, cap. 1) den Unterschied zwischen deutlichem Erkennen von Einzelheiten, Farbennuancen z. B., einer- und Weitsehen andererseits und fährt dann fort: »*ὁ γὰρ αὐτὸς ἐπηλυγασάμενος τὴν χεῖρα ἢ δι' αὐλοῦ βλέπων τὰς μὲν διαφορὰς οὐδὲν μᾶλλον οὐδ' ἧττον κρίνει τῶν χρωμάτων, ὄψεται δὲ πορρώτερον. οἱ γοῦν ἐκ τῶν ὀρυγμάτων καὶ φρεάτων ἐνίοτε ἀστέρας ὁρῶσιν*». Am besten, heisst es zuletzt (a. a. O., S. 369), wäre es, wenn man durch eine vom Auge bis zum Gegenstande sich erstreckende Röhre zu sehen imstande wäre. A. v. HUMBOLDT, der auch einer »*viel emendierten und viel umstrittenen Stelle des* STRABON» in diesem Zusammenhange Erwähnung thut (Kosmos, III Band, 2 Abschnitt), der auch den KLEOMEDES

dafür als Zeugen aufführt, dass, aus Zisternen betrachtet, die Sonne grösser als sonst erscheine, hat Nachforschungen über die Wahrheit der Behauptung des ARISTOTELES angestellt und dieselbe einigermassen bestätigt gefunden. Ihm selbst sei von Rauchfangkehrern versichert worden, dass ihnen im Schlote »die Himmelsdecke ganz nahe und die Sterne wie vergrössert erscheinen», und JOHN HERSCHEL erzähle aus eigener Erfahrung, er habe durch einen Kamin Sterne am hellen Tage gesehen.

13 R. WOLF, Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft, 9, 1874, S. 56: »Dass DEMOKRIT kein Fernrohr nötig hatte, um seine Vermutung über die Konstitution der Milchstrasse auszusprechen, kann wohl niemand bezweifeln; dass PTOLEMAEUS einige Sterne und Nebel aufführt, welche man jetzt bei uns von freiem Auge nicht wahrnimmt, lässt sich zum teile durch seine günstigere Position, zum teile durch stattgehabte wirkliche Veränderungen ganz naturgemäss erklären; um Sonnenflecke mit Venus oder Merkur zu verwechseln, bedarf man kein Fernrohr; und wenn die Japaner Juppiter mit zwei Monden abbildeten, so geht daraus gerade hervor, dass sie kein Fernrohr besassen, sonst hätten sie alle vier, und dann auch manches andere sehen müssen».

14 Näheres über dieses im allgemeinen zu wenig gewürdigte Schriftchen ist bei A. v. HUMBOLDT zu finden (Stuttgarter neue Ausgabe, II. Band, S. 358, S. 389).

15 v. ARX, *Geschichten des Kantons St. Gallen,* I. Band (St. Gallen 1810), S. 265.

16 ZIMMERMANN, *Ratpert, der erste Zürichergelehrte* (Basel 1878), S. 63 ff.

17 In diesem Sinne hat MARTY die Anweisung zum Gebrauche des Tubus als Unterrichtsgegenstand aufgefasst in seinem bekannten geschichtlichen Romane (*Wie man vor tausend Jahren lehrte und lernte*, Einsiedeln 1857). Als Realität scheint die hübsch den historischen Thatsachen angepasste Erzählung betrachtet zu haben WOLF (*Geschichte der Astronomie*, München 1877, S. 76).

18 CYSATUS, *De loco, natu, magnitudine et causis cometae, qui sub finem 1618 et initium anni 1619 fulsit* (Ingolstadt 1619). »An NICEPHORUS (?) et ANAXAGORAS illarum stellarum erraticarum confluxum, DEMOCRITUS autem earundem disgressum libero oculo conspexerint, non dubito, fortassis et ipso solo tubo optico phaenomenon illud deprehenderunt.

Fuisse enim usum tubi optici antiquis etiam astronomis familiarem, testatur liber vetustissimus in bibliotheca celeberrimi monasterii Scheurensis scriptus ante 400 annos, quo in libro inter caetera schemata etiam astronomus per tubum opticum, in coelum intentum, sidera contemplans visitur.»

[19] Die Beschreibung MABILLON's kann man bei SERVUS (a. a. O., S. 12) nachlesen: »In tertio folio astronomia exhibetur, adjunctam habens a dextris PTOLEMAEI effigiem sidera contemplantis ope instrumenti longioris, quod instar tubi optici, quatuor ductus habentis, concinnatum est».

[20] KNITL, *Scheyern als Burg und Kloster* (Freising 1880), S. 8 ff. Im beginnenden XIII. Jahrhundert lebte und wirkte zu Scheyern ein hochgepriesener Lehrer der Klosterschule, der von den Geschichtschreibern als CONRADUS *Philosophus* bezeichnet wird. Zahlreiche Handschriften bekunden seinen im Scriptorium ausgeübten Fleiss. Als seine bedeutendste Leistung galt die *Historia scholastica* COMESTORIS, in welchen Kodex KONRAD verschiedene Zeichnungen von eigener Hand eintrug, so insonderheit eine allegorische Darstellung der sieben freien Künste. Als Repräsentantin der Astronomie erkennen wir eben die uns schon bekannte, im KNITLschen Buche sehr gut wiedergegebene Gestalt mit dem Auszugs-Sehrohre.

[21] Es ist ja allerdings wohl davon die Rede gewesen, dass ROGER BACON die vergrössernde Kraft der Linsen gekannt habe, allein erstens steht diese Anschauung auf sehr schwachen Füssen (vgl. SERVUS, a. a. O, S. 6 ff.), und sodann lebte ja auch KONRAD vor diesem Zeitpunkte.

[22] v. HUMBOLDT, a. a. O., S. 43: »Wenn das Sehen durch Röhren die Aufsuchung von Sternen in der Abenddämmerung erleichterte, wenn die Sterne dem blossen Auge durch die Röhre früher sichtbar wurden als ohne dieselbe, so liegt, wie schon ARAGO bemerkt hat, die Ursache darin, dass die Röhre einen grossen Teil des störenden diffusen Lichtes (die »rayons perturbateurs») der Luftschichten abhält, welche zwischen dem an die Röhre angedrückten Auge und dem Sterne liegen. Ebenso hindert die Röhre auch bei Nacht den Seiteneindruck des schwachen Lichtes, welches die Luftteilchen von den gesammten Sternen des Firmamentes empfangen. Die Intensität des Lichtbildes und die Grösse des Sternes nehmen sichtbar zu.»

Zur Geschichte der Mathematik im siebzehnten Jahrhundert.

Von S. Dickstein in Warszawa.

Im LXXIII. Kapitel des zweiten Bandes seiner *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* hat M. Cantor über einige im siebzehnten Jahrhundert erschienene trigonometrische Werke berichtet. Unter solchen Werken dürften auch zwei Schriften von Johannes Tonski citiert werden können. Die erste unter dem Titel *Arithmetica vulgaris et Trigonometria rectilineorum prout universae geometriae practica* erschien in Ingolstadt 1640. Sie enthält eine trigonometrische Tafel (»Canonem istum mathematicum», schreibt Tonski, »Joan. Regiomontanus supputavit, Chr. Clavius correxit, ego à mendis repurgavi et radio 10000.00 accomodavi»). Die zweite Schrift, vom Jahre 1645, ist eine bedeutend vergrösserte Auflage der ersten und enthält auch die sphärische Trigonometrie.

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass Tonski einer der ersten die Unbestimmtheit der Dreiecksaufgabe, in welcher zwei Seiten und der einer Seite gegenüberliegende Winkel gegeben sind, wie sie bei Copernicus vorkommt, bemerkt hat. Er sagt (I. Aufl., S. 72; II. Aufl., S. 109): »Ambiguitatem istam non omnes bene videntur advertisse, quos inter est Copernicus noster, lib. I *Revolutionum,* Capite 13, num. 6».

Ich benutze diese Gelegenheit um ein paar Bemerkungen über die von M. Cantor citierten polnischen mathematischen Werke zu machen.

1) Der wirkliche Namen des polnischen Mathematikers Broscius (1585—1652) war Brozek (nicht Brocki, wie Cantor l. c. p. 627 angiebt). Der Titel seines in Danzig 1652 erschienenen Werkes ist: *Apologia pro Aristotele et Euclide contra Petrum Ramum et alios. Additae sunt duae disceptationes de numeris perfectis.* Der Titel: *Aristoteles et Euclides defensus* etc. gehört einer späteren Ausgabe desselben Werkes (Amsterdam 1699). Siehe *Jan Brozek,* eine Monographie von J. N. Franke, Krakau 1884 (vgl. Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), S. 19 und Biblioth. Mathem. 1889, S. 50).

2) Der ungenannte Verfasser der von Cantor (S. 628) citierten *Geometria peregrinans* hiess Gloskowski; siehe darüber J. N. Franke und A. Jakubowski: *Maciej Gloskowski,* Krakau 1878 (vgl. Biblioth. Mathem. 1889, S. 49).

RECENSIONEN. — ANALYSES.

M. Cantor. VORLESUNGEN ÜBER GESCHICHTE DER MATHEMATIK. ERSTER BAND. VON DEN ÄLTESTEN ZEITEN BIS ZUM JAHRE 1200 N. CHR. Zweite Auflage. Leipzig, Teubner 1894. 8°, VII + 883 p. + 1 pl.

La première édition du premier tome des *Vorlesungen* étant déjà épuisée, M. CANTOR a entrepris d'en publier une nouvelle édition. Il est inutile de dire que cette entreprise a été saluée avec la plus grande joie par tous les amis de l'histoire des mathématiques, d'autant plus que la nécessité d'une nouvelle édition a permis à M. CANTOR de tirer profit aussi des importants écrits historico-mathématiques parus depuis 1880, date de la publication de la première édition.

L'ouvrage de M. CANTOR est trop connu par nos lecteurs pour qu'il soit nécessaire de donner ici un aperçu des sujets y traités et d'en signaler les grands mérites; sans recours à cet excellent guide, il aurait été extrêmement difficile d'écrire plusieurs des monographies historico-mathématiques auxquelles nous venons de faire allusion. Nous faisons remarquer seulement que la seconde édition a été augmentée d'environ 80 pages, et que, d'autre part, les fautes d'impression de la première édition semblent y avoir été éloignées. En parcourant le volume, on voit aisément que M. CANTOR s'est efforcé d'y utiliser toutes les nouvelles recherches faites pendant ces derniers temps dans le domaine de l'histoire des mathématiques, à l'exception de celles qui exigeraient un remaniement complet de dizaines de pages, p. ex. les travaux de M. ZEUTHEN sur l'histoire des sections coniques dans l'antiquité. Naturellement il est souvent difficile de décider jusqu'à quel point un ouvrage, tel que celui de M. CANTOR, doit rendre compte de détails historiques peu importants. Ainsi p. ex. on pourrait mettre en question s'il n'avait pas été convenable de mentionner au moins le nom du mathématicien byzantin LEON, sur lequel M. HEIBERG a donné quelques renseignements (voir Biblioth. Mathem. 1887, p. 33—36).

Dans la nouvelle édition, nous n'avons pu trouver aucun mot sur la question s'il existe des traductions des *Elementa* faites de l'arabe en latin antérieurement à ATELHARD de Bath; à la page 670, M. CANTOR dit expressément qu'ATELHARD était le premier traducteur de l'arabe. Il est vrai que M. CANTOR a parlé de ce sujet dans le second tome (p. 91—92) des *Vorlesungen,* mais, comme il s'agit du temps avant l'an 1200, il nous semble avoir été plus correct d'en rendre compte aussi

dans la nouvelle édition du premier tome. De même, dans la notice sur AHMED IBN JUSUF (p. 694), M. CANTOR n'a pas mentionné l'écrit *de similibus arcubus* cité par lui à la page 71 du second tome, et, pour ce qui concerne le traité sur les proportions, il dit seulement qu'on en parlera dans un chapitre suivant (cf. tome II, p. 15).

Nous espérons que M. CANTOR aura bientôt le plaisir de préparer une troisième édition du premier tome et que, dans cette édition, on retrouvera tout ce qui se rapporte à l'histoire des mathématiques avant l'an 1200.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

DIE GEOMETRIE VON **René Descartes.** DEUTSCH HERAUSGEGEBEN VON **L. Schlesinger.** Berlin, Mayer & Müller 1894. 8°, X + (1) + 116 p. + 2 pl.

Il y a 8 ans, M. A. HERMANN a publié une nouvelle édition de *La géométrie* de DESCARTES (cf. Biblioth. Mathem. 1887, 25—26). M. SCHLESINGER, estimant que l'étude des éditions françaises, de même que celle des traductions en latin, n'est pas sans difficultés pour les jeunes mathématiciens allemands, a jugé à propos de publier une traduction allemande du chef-d'oeuvre de DESCARTES. Il a essayé de garder autant que possible la forme un peu antique de l'original; quant aux formules, il y a introduit quelques notations modernes, p. ex. = pour le signe d'égalité et $\sqrt[3]{}$ pour la racine cubique.

En vue de faciliter la lecture de l'ouvrage pour les étudiants, M. SCHLESINGER y a ajouté quelques remarques explicatives; dans une de ces remarques, il appelle l'attention sur le fait curieux que DESCARTES n'a parlé de l'équation d'une *droite* qu'en passant et à un seul endroit (p. 23—24, ed. HERMANN).

Stockholm. G. ENESTRÖM.

W. W. R. Ball. AN ESSAY ON NEWTONS PRINCIPIA. London, Macmillan 1893. 8°, X + 175 p.

L'histoire du livre immortel de NEWTON a été exposée par RIGAUD dans son *Historical essay on the first publication of sir Isaac Newtons Principia,* et par BREWSTER dans ses *Memoirs of the life, writings and discoveries of sir Isaac Newton* (second édition, 1860). S'appuyant sur des matériaux plus complets, M. BALL a traité le même sujet dans l'écrit dont nous venons de transcrire le titre. Après une introduction, où il indique le plan et les sources de son ouvrage, il fait mention des recher-

ches préliminaires de NEWTON en 1666, 1679 et 1684, dont les dernières avaient pour résultat le traité *de motu*, présenté en 1684 ou 1685 à Royal Society et reproduit par M. BALL; puis il rend compte des détails relatifs à la rédaction et à la publication des *Principia* en 1685—1687, et il en donne une analyse étendue; enfin il ajoute quelques renseignements intéressants sur l'histoire ultérieure et sur les différentes éditions du livre. Dans un appendice il a réuni un certain nombre de lettres, en partie inédites, de NEWTON, de HOOKE et de HALLEY, se rapportant à l'histoire de la genèse et de la publication des *Principia*.

Dans l'analyse des *Principia*, M. BALL énonce les propositions des différents livres et sections, et il signale les principales différences entre les trois éditions; en parlant du fameux scholium après le second lemma du second livre, il mentionne donc aussi le changement qu'a subi ce scholium dans la troisième édition.

La savante monographie de M. BALL est rédigée avec beaucoup de soin, et à plusieurs égards elle peut servir de modèle pour des écrits de la même nature. Si nous possédions une monographie semblable pour chacun des ouvrages classiques des sciences mathématiques, nous aurions évidemment plus de chance de voir bientôt paraître une histoire complète des mathématiques jusqu'à nos jours.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von || journal d'histoire des mathématiques publié par G. ENESTRÖM. Stockholm. 8°.
1893: 4. — [Analyse de l'année 1893:] *Venezia*, Istituto Veneto, Atti **5**$_7$, 1894, 545—551. (A. FAVARO.)

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von M. CANTOR. Leipzig. 8°.
39 (1894): 1.

°**Bellacchi, G.,** Galileo ed i suoi successori. Discorso letto nel r. istituto tecnico Galilei di Firenze il dì 29 ottobre 1891. Firenze 1891.
8°, 29 p.

Berson, Sur l'emploi des figures géométriques par les Japonais pour la résolution des problèmes d'arithmétique.
Toulouse, Acad. d. sc., Mémoires **3**$_9$. 1891, 268—271.

B[ierens] de H[aan], D., Fransiscus Johannes van den Berg.
Amsterdam, Wisk. Genoots., Nieuw Arch. 1_2, 1894, 1—10. — Nécrologie.

Bierens de Haan, D., Bouwstoffen voor de geschiedenis der wis- en natuurkundige wetenschappen in de Nederlanden. XXXIII.
Amsterdam, Akad. van Wetensch., Verhandelingen **2**, 1893, 1—60 + 4 pl.

БОНДАРЕНКО, И., Н. И. Лобачевскій. (1793—1893.)
Vjestnik elem. matem. **15**, 1894, 97—103. — BONDARENKO, I., N. I. Lobatchevski.

Brill, A., Streifblicke auf die Geschichte der Geometrie.
Mathem.-naturw. Mitteil. (Tübingen) **4**, 1891, 12—29.

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Erster Band. Von den ältesten Zeiten bis zum Jahr 1200 n. Chr. Zweite Auflage. Leipzig, Teubner 1894.
8°, VII + 883 p. + 1 pl. — [22 Mk.]

Delbos, L., L'astronomie aux Indes orientales.
Bullet. d. sc. mathém. 17_2, 1893, 145—172.

Descartes, R., Die Geometrie. Deutsch herausgegeben von L. SCHLESINGER. Berlin, Mayer & Müller 1894.
8°, X + (1) + 116 p. + 2 pl. — [3·60 Mk.]

Duhem, P., L'école anglaise et les théories physiques. Bruxelles 1893.
8°, 38 p. — Extrait de la »Revue des questions scientifiques«, octobre 1893.

Ernest Edouard Kummer.
Mathesis 4_2, 1894, 40—42. — Nécrologie.

Favaro, A., Serie nona di scampoli Galileiani.
Padova, Accad. d. sc., Atti e memorie **10**, 1894, 11—58.

Favaro, A., Materiali per un indice dei manoscritti e documenti Galileiani non posseduti dalla Biblioteca nazionale di Firenze.
Venezia, Istituto Veneto, Atti 5_7, 1894. 127 p.

Favaro, A., Amici e corrispondenti di Galileo Galilei. I. Margherita Sarrocchi.
Venezia, Istituto Veneto, Atti 5_7, 1894, 552—580.

G[aldeano], Z. G. de, Eugene Charles Catalan. Necrología.
El progreso matem. **4**, 1894, 58—60.

Gerhardt, K. J., Leibniz in London.
Berlin, Akad. d. Wissensch., Sitzungsber. 1891, 157—176.

Gibson, G. A., On the history of the Fourier series.
Edinburgh, Mathem. soc., Proceedings **11**, 1893, 137—166.

Halsted, G. B., Lamberts non-euclidian geometry.
New York, Mathem. soc., Bulletin **3**, 1893, 79—80.

ИЗНОСКОВЪ, И. А., В. Г. Имшенецкій.
Kazan, Fiz.-matem. obchtch., Isvjestia 3_2, 1893, 37—44. — ISNOSKOFF, I. A., V. G. Imchenetskij. Notice biographique.

Knott, C. G., Japanese arithmetic.
Edinburgh, Mathem. soc., Proceedings **11**, 1893, 167.

Korteweg, D. J., Het bloeitijdperk der wiskundige wetenschappen in Nederland. Redevoering uitgesproken op den Jaardag der Amsterdamsche Universiteit den 8sten januari 1894.
(2) + 20 p.

Kötter, F., Die Entwickelung der Lehre vom Erddruck.
Deutsche Mathematikervereinigung, Jahresbericht **2** (1891—1892), 77—155.

Krumbacher, K., Woher stammt das Wort Zifter (Chiffre)?
Etudes de philologie néo-grecque (Paris 1892). 11 p. — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **39**, 1894; Hist. Abth. 16. (CANTOR.)

Krumbacher, K., Noch einmal das Wort Ziffer.
Byzantinische Zeitschrift (Leipzig) 1893. 5 p. — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **39**, 1894; Hist. Abth. 16. (CANTOR.)

Mackay, J. S., The Wallace line and the Wallace point.
Edinburgh, Mathem. soc., Proceedings **9**, 1891, 83—91.

Mackay, J. S., History of the nine-point circle.
Edinburgh, Mathem. soc., Proceedings **11**, 1893, 19—57.

Mackay, J. S., Early history of the symmedian point.
Edinburgh, Mathem. soc., Proceedings **11**, 1893, 92—103.

°**Marz, L.,** Über die Entstehung der Zahlwörter. Memmingen 1893.
8°, 6 p.

Mansion, P., Note bibliographique sur les intégrales générales et les solutions singulières des équations différentielles et aux dérivées partielles.
Bruxelles, Soc. scient., Annales **15**, 1891, A: 32—37, 60.

Massip, Les carrés magiques.
Toulouse, Acad. d. sc., Mémoires 4_9, 1892, 423—454. — Mémoire en partie historique.

Matrot, A., Sur le théorème de Bachet (aperçu historique).
Association française pour l'avancement des sciences, **20** (congrès de Marseille), 1891, 185—191.

Матеріалы для біографіи Н. И. Лобачевскаго.
Kazan, Fiz.-matem. obchtch., Isvjestia 3_2, 1893, 27—34. — Matériaux pour la biographie de I. N. Lobatchevskij; deux notices par A. F. POPOFF et N. N. BOULITCH.

Newcomb, S., Modern mathematical thought.
New York, Mathem. soc., Bulletin **3**, 1894, 95—107.

ПЕРГАМЕНТЪ, О., Исторія варометра и его примѣненій. 1643—1893.
Vjestnik elem. matem. **16**, 1894, 30—38, 58—63. — PERGAMENT, O., Histoire du baromètre et de son usage.

R., C. J., La cuadratura del círculo.
La controversia (Madrid) **8**, 1894, 86—88. — Note historique.

Reyes Prosper, V., Breve reseña histórica de la geometría no-euclídea, espedialmente de dos y tres dimensiones.
El progreso matem. **4**, 1894, 13—16.

Reyes Prosper, V., Wolfgang y Juan Bolyai. Reseña bio-bibliográfica.
El progreso matem. **4**, 1894, 37—40.

Ruoss, H., Geschichte der optischen und katoptrischen Anamorphosen.
Zeitschr. für Mathem. **39**, 1894; Hist. Abth. 1—12.

Steinschneider, M., Die Mathematik bei den Juden.
Biblioth. Mathem. 1893, 105—112.

Sturm, R., Heinrich Schröter.
Deutsche Mathematikervereinigung, Jahresbericht **2** (1891—1892), 32—42.

Tannery, P., Un fragment des métriques de Héron.
Zeitschr. für Mathem. **39**, 1894; Hist. Abth. 13—15.

Valentin, G., Eine seltene Schrift über Winkeldreitheilung.
Biblioth. Mathem. 1893, 113—114.

Vallín, A. F., Cultura científica de España en el siglo XVI.
Discursos leidos ante la real academia de ciencias en la receptión pública del sr. A. F. Vallín (Madrid 1893). — Aux pages 29—68 on trouve une exposition de l'histoire des mathématiques en Espagne au 16e siècle. — [Analyse:] El progreso matem. **4**, 1894, 49—54. (Z. G. de G.)

ВАСИЛЬЕВЪ, А., Iезуитъ Саккери, итальянскiй предшественникъ Лобачевскаго.
Kazan, Fiz.-matem. obchtch., Isvjestia 3_2, 1893, 53—57. — Wasilieff, A., Le jésuit Saccheri, prédécesseur italién de Lobatchevskij.

Weber, H., Leopold Kronecker.
Mathem. Ann. **43**, 1893, 1—26.

Weber, H., Leopold Kronecker.
Deutsche Mathematikervereinigung, Jahresbericht **2** (1891—1892), 5—32.

Weissenborn, H., Die Berechnung des Kreis-Umfanges bei Archimedes und Leonardo Pisano. Berlin, Calvary 1894.
8°, (2) + 32 p. — Berliner Studien für classische Philologie und Archaeologie **14**: 3.

Vivanti, G., Il concetto d'infinitesimo e la sua applicazione alla matematica. Mantova, Mondovi 1894.
8°, 134 p. + 1 pl. — [3 lire.] — [Analyse:] Rivista di matem. **4**, 1894, 28—32. (G. Loria.)

Vivanti, G., Lista bibliografica della teoria degli agregati.
Rivista di matem. **3**, 1893, 189—192. — Reproduction, avec quelques additions, d'une liste insérée dans la Biblioth. Mathem. 1892, p. 22—25.

Zeuthen, H. G., Note sur la résolution géométrique d'une équation du 3e degré par Archimède.
Biblioth. Mathem. 1893, 97—104.

Zeuthen, H. G., Notes sur l'histoire des mathématiques. II. »Tartalea contra Cardanum»; réplique relative à la question de priorité sur la résolution des équations cubiques. — III. Sur la signification traditionnelle du mot »géométrique».
Kjöbenhavn, Vidensk. Selskab, Oversigt 1893, 303—341.

Question 44 [sur les mathématicien espagnol OMERIQUE].
Biblioth. Mathem. 1893, 120. (G. ENESTRÖM.)

Remarque sur la question 43.
Biblioth. Mathem. 1893, 120. (G. ENESTRÖM.)

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Herausgegeben von E. LAMPE. Band 23 (1891). Berlin, Reimer 1894.
8°. — Les pages 1—46 contiennent un compte rendu des ouvrages d'histoire des mathématiques parus en 1891.

APOLLONII PERGAEI quæ græce exstant cum commentariis antiquis. Edidit et latine interpretatus est J. L. HEIBERG. I—II. Lipsiæ 1891—1893. 8°.
Nordisk tidsskrift for filologi (Kjöbenhavn) $\mathbf{2}_3$, 1894, 79—84. (H. G. ZEUTHEN.)

BALL, W. W. R., An essay on Newton's Principia. London, Macmillan 1893. 8°.
Mathesis $\mathbf{4}_2$, 1894, 21. (P. M.)

DIOPHANTI ALEXANDRINI Opera omnia cum graecis commentariis. Edidit et latine interpretatus est P. TANNERY. Volumen I. DIOPHANTI quae exstant omnia continens. Leipzig, Teubner 1893. 8°.
Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{17}_2$, 1893, 254—256. (J. T.)

LORIA, G., Nicola Fergola e la scuola di matematici che lo ebbe a duce. Genova 1892. 4°.
Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{17}_2$, 1893, 237—239. (P. TANNERY.)

MANSION, P., Notice sur les travaux scientifiques de Louis-Philippe Gilbert. Paris, Gauthier-Villars 1893. 8°.
Zeitschr. für Mathem. **39**, 1894; Hist. Abth. 20—21. (CANTOR.)

MÜLLER, F., Carl Heinrich Schellbach. Gedächtnisrede. Berlin, Reimer 1893. 8°.
Zeitschrift für Mathem. **39**. 1894; Hist. Abth. 19—20. (CANTOR.)

THÉON DE SMYRNE, Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon, traduite pour la première fois du grec en français par J. DUPUIS. Paris, Hachette 1892. 8°.
Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{17}_2$. 1893, 282—286. (P. TANNERY.)

WERTHEIM, G., Die Arithmetik des Elia Misrachi. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik. Frankfurt a/M. 1893. 4°.
Zeitschr. für Mathem. **39**. 1894; Hist. Abth. 16—17. (CANTOR.)

ZEUTHEN, H. G., Forelæsning over Mathematikens Historie. Oldtid og Middelalder. Kjöbenhavn, Höst 1893. 8°.
Biblioth. Mathem. 1893, 115—116. (G. ENESTRÖM.)

[Listes d'ouvrages récemment publiés.]
Biblioth. Mathem. 1893, 117—120. — Zeitschr. für Mathem. **39**, 1894; Hist. Abth. 39—40.

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

45. On admet ordinairement (voir p. ex. P. TANNERY, *Le fragment d'Eudème sur la quadrature des lunules;* Mém. de la soc. des sciences de Bordeaux 5_2, 1883, 234) que l'existence de 5 différentes lunules carrables géométriquement a été démontrée pour la première fois par CLAUSEN (*Vier neue mondförmige Flächen, deren Inhalt quadrirbar ist;* Journ. für Mathem. **21**, 1840, 375—376). Néanmoins, il est certain que l'existence en a été connue beaucoup de temps avant CLAUSEN. En effet, toutes les 5 lunules ont été indiquées déjà en 1766 par le mathématicien finlandais M. J. WALLENIUS dans sa *Dissertatio lunulas quasdam quadrabiles exhibens* (Aboæ 1766; in-4°, (2) + 31 p. + 1 pl.).

On demande si quelque auteur antérieur à WALLENIUS est arrivé au même résultat. (G. Eneström.)

On the question 23. In a letter from EULER to GOLDBACH dated »Petropoli die 25 novembre A. 1731» published in FUSS *Correspondance mathématique et physique,* I find this: »*e* denotat hic numerum, cujus logarithmus hyperbolicus = 1».

(W. W. Beman.)

Inhalt. — Table des matières.

STOCKHOLM, TRYCKT I CENTRAL-TRYCKERIET, 1894.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK | JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON | PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1894. STOCKHOLM. Nº 2.

NEUE FOLGE. 8. | NOUVELLE SÉRIE. 8.

BERLIN. MAYER & MÜLLER. Markgrafenstrasse 51.

Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr.

PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Quelques remarques sur l'histoire des mathématiques en Espagne au 16e siècle.

Par G. ENESTRÖM à Stockholm.

Dans sa petite note *Sur quelques écrits mathématiques publiés en Espagne au 16e et 17e siècles* (Biblioth. Mathem. 1890, 33—36), VICUÑA a fait observer que les sciences mathématiques ont été cultivées avec beaucoup d'ardeur en Espagne au 16e siècle. Dans un écrit récemment publié,[1] M. VALLÍN semble avancer non seulement qu'il y avait en Espagne au 16e siècle un nombre extraordinairement grand de mathématiciens, mais aussi que les résultats de leurs travaux ont été assez importants. En effet, M. VALLÍN dit:[2]

> Ningún otro país aventajó á España, siendo verdaderamente prodigioso el número de escritores y maestros de matemáticas que contábamos dentro y fuera de la Península, cuyos trabajos de traducción y comentario unos, y originales otros, no sólo no desmerecían de los más celebrados en los demás naciones de Europa, sino que muchos les llevaban no poca ventaja, corrigiendo sus errores y sosteniendo con brillantez continuas polémicas científicas, como lo hicieron NUÑEZ, SÁNCHEZ, CORTÉS, PÉRES DE OLIVA y otros.

D'autre part, on trouve dans les traités généraux d'histoire des mathématiques peu de renseignements sur les mathématiciens espagnols du 16e siècle. La plupart de ces traités ne citent que NUÑEZ;[3] M. CANTOR, dans le second tome de ses *Vor-*

lesungen über Geschichte der Mathematik (1892) ayant consacré quatre pages (p. 355—358) aux mathématiciens espagnols et portugais de la première moitié du 16e siècle, fait mention de Ciruelo, Silíceo, Lax, Ortega et Nuñez. D'après ce que nous informe M. Cantor, les trois premiers ont publié des traités d'arithmétique et quelques autres écrits, mais ils ne semblent pas avoir fait de recherches originales; Ortega a indiqué quelques nouvelles valeurs approximatives de racines carrées et cubiques, mais il paraît qu'il n'ait pas rendu compte des méthodes par lesquelles il est arrivé à ces valeurs. Enfin, Nuñez est, selon l'avis de M. Cantor, le seul mathématicien dont les ouvrages contiennent des traits d'originalité.

Il s'ensuit de ce que nous venons de faire observer, que notre connaissance du développement des mathématiques en Espagne au 16e siècle doit être actuellement très incomplète, et que, pour cette raison, une notice détaillée sur cette matière serait d'une très grande utilité. L'intéressant ouvrage de M. Vallín déjà cité donne sans doute beaucoup de renseignements sur les mathématiciens espagnols de l'époque en question, mais malheureusement ces renseignements sont plutôt bibliographiques que scientifiques. En effet, les indications de M. Vallín sur les résultats des recherches des mathématiciens espagnols sont en général trop vagues pour qu'on puisse se former une idée nette de la valeur scientifique de ces recherches. Ainsi p. ex. M. Vallín dit que Rodrigo de Porras a trouvé des relations curieuses entre les côtés des polygones, des constructions élégantes des racines d'équations du second degré et des méthodes nouvelles pour la division de la circonférence d'un cercle; qu'Antich Rocha a enrichi l'algèbre de la théorie des égalités (*igualaciones*); que Juan Alfonso de Molina Cano a indiqué une méthode pour la construction des côtés de polygones réguliers et une valeur de π différente de celle d'Archimedes;[4] etc. On voit aisément que de telles notices ne nous mettent pas en état d'apprécier les mérites scientifiques des mathématiciens mentionnés; à cet effet il faudrait avoir des indications beaucoup plus détaillées.

Mais si M. Vallín nous donne ainsi des renseignements peu complets sur les recherches mathématiques des espagnols au 16e siècle, son ouvrage contient en revanche un recueil d'intéressantes notices bibliographiques; effectivement, il a rédigé[5] une liste d'écrits mathématiques de 72 auteurs espagnols,[6] et dans une note il signale encore 29 de ses compatriotes au 16e siècle, dont les ouvrages mathématiques sont actuellement in-

connus ou perdus. Dans ce qui suit, nous nous permettons de donner un aperçu des écrits signalés dans cette liste.

Parmi les traducteurs des *Elementa* sont mentionnés L. CARDUCHO, J. MUÑOZ, R. DE PORRAS et R. ZAMORANO. D'autres traductions ou commentaires sur les ouvrages des géomètres grecs sont dus à P. CIRUELO, R. DOSMA DELGADO, P. J. MONZÓ, P. A. ONDERIZ et J. DE SEGURA; le premier ainsi que T. DURÁN ont publié des écrits de BRADWARDIN, et M. SILÍCEO a édité un ouvrage du géomètre anglais RICHARD SWINSHEAD (SUISSET) sur l'art de calculer.

Des traités généraux de mathématiques ont été rédigés par P. CIRUELO (1516), J. DE ORTEGA (1512; plusieurs éditions), J. PÉREZ DE MOYA (1562) et P. NUÑEZ (1567). A. LÓPEZ DE CORELLA a révélé en 1546 »les secrets des quatres sciences mathématiques».

Un très grand nombre de traités de l'arithmétique sont mentionnés par M. VALLÍN; la plupart se rapportent à l'usage des règles d'arithmétique dans le commerce. Parmi les autres traités d'arithmétique on peut signaler ceux de P. CIRUELO (1505), M. SILÍCEO (1514) et G. LAX. La première algèbre en langue espagnole a été composée par M. AUREL (1552). Sous le nom de R. DE PORRAS nous trouvons un écrit: *Cuestiones de binomios,* dont nous ignorons le contenu.

Les ouvrages sur la géométrie sont relativement peu nombreux. J. DE ALZEGA a publié en 1580 une géométrie pratique et P. J. DE LASTANOSA a traduit en espagnol la *Geometria practica* d'ORONCE FINE; le même ouvrage semble avoir été l'objet d'un travail de J. GIRABA. Des écrits sur la quadrature du cercle ont été composés par P. RUÍS DE VILLEGAS, J. FALCÓ (1587) et LUIS INFANTE DE PORTUGAL (1556); probablement le livre de NUÑEZ *De erratis Orontii Finaei* se rapporte au même sujet. Enfin R. DOSMA DELGADO a écrit *De geometria cum parergis et conicis*(?), J. PORRES OSORIO a publié *Nuevas proposiciones geométricas* (1570), et J. A. DE MOLINA CANO a fait paraître en 1598 ses *Descubrimientos geométricos* (traduites en latin par N. JANSONIUS en 1620) qui, à en juger d'après le titre, doivent être d'un certain intérêt.[7]

Comme nous l'avons déjà fait remarquer, nous connaissons très peu sur le contenu des écrits dont nous venons de faire mention, et dont la plupart sont sans doute très rares. Il serait donc à désirer qu'ils pussent être examinés par quelque savant espagnol, en vue d'avoir une réponse définitive à la question:

»Quels ont été les mérites scientifiques des mathématiciens espagnols au 16e siècle?»

[1] A. F. VALLÍN, *Cultura científica de España en el siglo XVI.* Discursos leídos ante la real academia de ciencias. Madrid 1893.

[2] VALLÍN, l. c. p. 32.

[3] Bien que né en Portugal, NUÑEZ a rédigé son *Libro de algebra* en espagnol, et pour cette raison on peut le ranger parmi les mathématiciens espagnols.

[4] VALLÍN, l. c. p. 38, 40.

[5] VALLÍN, l. c. p. 205—208.

[6] Parmi ces 72 auteurs nous trouvons aussi J. BLANCANUS, G. DE ROCAMORA, D. DESCLAPES et J. DE HERRERA. Mais le premier était italien, et probablement M. VALLÍN l'a indiqué par méprise; la dissertation du second sur les mathématiques et sur les géomètres espagnols n'est qu'une introduction à l'ouvrage *Sphera del universo* (Madrid 1599). Enfin, les écrits des deux derniers (*Super arte combinatoria, ad illustrationem Lullianæ* etc., et *Discurso sobre la figura cubica*) semblent se rapporter à l'*Ars demonstrativa* de LULLIUS, mais non pas aux mathématiques.

[7] Le titre de la traduction en latin est: »Nova reperta geometrica, in quibus subtiliores geometricæ questiones de duplicatione cubi, quadratura circuli, rectitudine angulorum, æqualitate linearum curvarum cum recta discutiuntur, demonstrationibus firmissimis fulciuntur, indeque aurea colloraria geometricarum subtilitatum deducuntur, Euclidea elementa nonnulla corriguntur, nonnulla falsa rejiciuntur». Une réfutation de cet ouvrage par P. A. CATALDI a paru en 1626.

Die Mathematik bei den Juden.

Von Moritz Steinschneider in Berlin.

Die ältesten Monographien (im Orient).

6. Die beiden sogenannten *Talmude,* richtiger *Gemara,* d. h. Erklärungen und Erörterungen der *Mischna* (redigirt von Jehuda ha-Nasi, s. § 7), in Palästina und Babylon repräsentiren die Literatur der ersten V Jahrhunderte nach Chr.; darauf folgen einige Jahrhunderte, in denen die jüdischen Gelehrten sich fast ausschliesslich mit Bibel und Talmud beschäftigen; doch ist auch die Literaturgeschichte dieses Gebietes nicht genau bekannt.

Monographien, welche direct einem Zweige der mathematischen *Wissenschaft* gewidmet wären, haben höchst wahrscheinlich vor Einführung der griechischen Wissenschaft unter den *Arabern* auch bei den Juden aller Länder nicht existirt (s. weiter unten).

Es sei gleich hier ein, in jüdischen neuesten Geschichtswerken paradirender Namen abgewiesen. »Jakob b.[1] Scheara» soll der Jude heissen, welcher nach Indien geschickt wurde, und den Inder Kankah, oder Kattaka, mitbrachte, dessen astronomische Tafeln er arabisch übersetzt haben soll. Dieses Missverständnis de Rossi's habe ich bei der Mitteilung der Quelle (Zeitschr. d. deutschen morgenländ. Gesellsch. **24,** 1870, 354) dahin berichtigt, dass der *anonyme Jude* nur Dolmetscher ins Arabische war, der arabische Bearbeiter höchst wahrscheinlich der sonst bekannte Muhammedaner Ja'akub b. Tarik sein soll.

Der älteste sichere, namentlich bekannte jüdische Autor ist ein ägyptischer Arzt und Astronom, Namens Maschallah (770—820?), das heisst: »Was Gott will». Sein eigentlicher hebräischer Namen ist unbekannt, der Namen seines Vaters sehr zweifelhaft, in den orientalischen Quellen verschieden verstümmelt, daher der arabische: »Marzuk al-Basri» [für al-Misri], sehr verdächtig.[2] In den lateinisch übersetzten Schriften und Fragmenten ist der Namen vielfach verstümmelt; die gewöhnliche Form ist Messahala(c) oder dergleichen.

Eine ausführliche Bibliographie der, unter dem Namen Maschallah's citirten und erhaltenen astrologischen Werke und

Fragmente, namentlich in mss., würde die nötigen Grenzen dieses Artikels überschreiten. Ich habe bereits an mehreren Orten das hauptsächliche Material gesammelt[3] und beschränke mich hier auf das Wichtigste.

In arabischem Original sind fast nur Citate und Excerpte bekannt. Das Buch *De interrogationibus* existirt in hebräischer Übersetzung, wie auch das über die *Eklypsen* nur unter den hebräischen astrologischen Schriften des IBN ESRA.

Lateinische Übersetzungen, zum Teil von dem getauften JOHANNES HISPALENSIS, von dem wir später (XII. Jahrh.) handeln, sind 1493, 1504 (Nürnberg, s. Hebr. Bibliogr. VI, 31), 1549, 1551 gedruckt.

Das Buch *De electionibus* ist auch unter dem Namen des ZAËL gedruckt, worauf wir bald zurückkommen.

7. Nicht vor der arabischen Periode ist, nach meiner Ansicht, die älteste hebräische geometrische Elementarschrift verfasst, welche ich vor 30 Jahren in dem Münchener ms. n. 36 entdeckt und herausgegeben habe:

> *Mischnat ha-Middot,* die erste geometrische Schrift in hebräischer Sprache nebst Epilog der Geometrie von ABRAHAM BAR CHIJJA.[4] Zum siebenzigsten Geburtstage des Meisters Zunz (10. August 1864) aus Handschriften in München und Rom herausgegeben von M. STEINSCHNEIDER. Berlin, A. Ascher & Comp. 1864. (10 S. hebr., VI S. deutsch.)

Später erschien dieselbe Schrift, mit vollständiger deutscher, von Noten begleiteter Übersetzung eines Fachmannes, in den Supplem. der hist. lit. Abtheilung der Zeitschr. für Mathem. (1880); hier genügt ein abgekürzter Titel:

> *Mischnat ha-Middoth* . . . ins Deutsche übersetzt, erläutert und mit einem Vorwort versehen von HERMANN SCHAPIRA. (54 + 4 S., teils arabisch, teils hebr.)[5]

Zur Bedeutung dieses Schriftchens und zur Beurteilung der sich daran knüpfenden Controverse zwischen den beiden Herausgebern werden einige Bemerkungen nötig sein.

Mischna (Deuterosis) bezeichnet insbesondere die Bestandteile des sogenannten »mündlichen Gesetzes«, wovon es in den ersten Jahrhunderten verschiedene, wahrscheinlich nur mündlich tradirte Redactionen gab. Die, späterhin schriftlich fixirte Redaction des JEHUDA HA-NASI (spät im II. Jahrhund. nach Chr.) wurde gewissermassen kanonisch, und die, von ihm nicht aufgenommenen Bestandteile, nannte man »Baraita« (externe), welche Benennung wir bei dem zunächst zu besprechenden Werkchen finden werden.

Eine Schrift, welche sich »Mischna» nennt, prätendirt ein hohes Alter, nicht aber die Autorschaft JEHUDA's. Von der »Echtheit» dieser Schrift kann also gar nicht die Rede sein.

Wie das Schriftchen uns vorliegt, gehört es direct in die Mathematik, wenn auch wenige Male auf *biblische* Stellen Bezug genommen ist. Es scheint aber auch eine Recension davon, oder ein ähnlich betiteltes Schriftchen existirt zu haben, worin die Beziehung zur Bibel stärker hervortrat, so dass man es als einen *Midrasch* (Homilie oder Exegese) bezeichnete. Die entsprechenden Citate, welche man in der Ausgabe vermisst, berechtigen uns jedoch nicht zu einem Schlusse über die Priorität der umfangreicheren Schrift, ja nicht einmal zur Bezeichnung der Ausgabe als *unvollständig*.[6] Man citirt vielfach eine »Baraita der 49 Maasse»; unsere Ausgabe theilt sich in 5 Kapitel mit zusammen 42 Lehrsätzen; doch kennen wir nicht das Alter dieser Einteilung.

Herr SCHAPIRA (S. 10) legt für die schwierige *Alters*frage des Büchleins einen Wert auf den »leibhaftigen Stil» der Mischna, richtiger der talmudischen Phraseologie; aber eine solche ist noch heute teilweise im Gebrauch, und ein anderer wissenschaftlicher arabistischer entwickelte sich erst in Süd-Osteuropa im XIII. Jahrhundert durch die Übersetzer. Hingegen erkannte er auffallende Ähnlichkeit mit der Geometrie des bekannten MUHAMMED B. MUSA AL-KHOWAREZMI, woraus er Parallelen mitteilt. Für mich ist die technische Bezeichnung des Sinus versus durch »Pfeil» noch jetzt genügend, um den Einfluss arabischer Literatur zu erkennen.[7]

Als Curiosum erwähne ich hier gelegentlich, dass ein Autor des XIV. Jahrh. die für eigenen Gebrauch copirten Elemente des EUKLID (ms. Turin 68) als »Mischnijjot» bezeichnet (*Hebr. Übers*. S. 505), was hier Grundlehren bedeutet.

8. Sicherer in Bezug auf die Zeit, aber nicht auf den Autor, ist eine, wahrscheinlich pseudepigraphische Schrift, wovon ein Fragment in der neuesten Zeit ans Tageslicht gekommen ist und die früheren aus Citaten geflossenen Vermutungen teilweise berichtigt. Literatur und Kritik sind hier, wie so häufig, durch L. ZUNZ vertreten.

NATAN AMRAM, der aus Bibliotheken und Privatbesitz einige Inedita ans Licht förderte, gab im Jahre 1861 in Salonichi ein, jedenfalls unvollständiges hebr. Schriftchen heraus, betitelt: »*Baraita* des SAMUEL, des Kleinen».

Ich habe diese Originalausgabe nie gesehen und kenne nur den, nicht ganz correcten Abdruck Frankfurt a. M. 1863

in 16:0 (s. Hebr. Bibliogr. VII, 122), worin S. 25 ff. anonyme Kleinigkeiten mit abgedruckt sind, die uns hier nicht weiter angehen.

Das Schriftchen bietet 9 kurze Kapitel astronomisch-astrologischen Inhalts, welchen ZUNZ analysirt.[8] Das 5. Kapitel eröffnet eine Angabe über das Zusammentreffen von Sonnen- und Mondperiode im J. 4536 (776), während das Schriftchen schon 860 benutzt wird. ZUNZ setzt es in die Zeit 810—840 und ins *Byzantinische* Reich;[1] ich habe es hieher gestellt wegen seiner Ähnlichkeit mit dem vorigen Schriftchen, dem es vielleicht voranging. Auch hier ist der Zweck die Belehrung über eine unabhängige Wissenschaft, unter Anspielung auf die nationalen Schriften.

Der Titel *Baraita* prätendirt auch hier einen alten Ursprung (s. § 8), und mit SAMUEL ist offenbar der talmudische Rector (gest. 254) gemeint, der sich selbst rühmte, dass ihm »die Wege des Firmaments so klar seien wie die (seiner Vaterstadt) Nehardea's».[9] Ihm wird auch die lange geltende Berechnung der Quatember (*Tekufa*), d. h. des Sonnenjahres, beigelegt, welche später verdrängt wurde (§ 4, S. 109).

Der Verfasser kennt, oder adoptirt, noch nicht die Resultate der arabischen Wissenschaft, gebraucht *griechische* Termini technici und führt den noch nicht erklärten Ausdruck תלי (Tali?) für den Drachen in die hebräische astronomische Literatur ein.[10] Seine kosmologischen Ansichten sind unklar oder unklar ausgedrückt; das Hebräische hatte noch keinen wissenschaftlichen Stil.

9. Ehe ich zu jüdischen Gelehrten des Ostens zurückkehre, mag auf einen offenbaren Fehler (Schreib- oder Druckfehler) in einer an sich guten Quelle hingewiesen sein, den ich schon anderswo berichtigt habe.[11] In der 2. und besseren Ausgabe des Buches *Jesod Olam* von ISAK ISRAELI (a. 1310) liest man (IV, C. 7), dass um die Mitte des 6. Jahrhunderts des (muss heissen *nach dem*) 4. Jahrtausends (also um 790 nach Chr.) Männer unter den Weisen »Israels» in Persien zur Beobachtung des Laufes der Himmelskörper angeregt wurden durch einen Auftrag des Herrschers. Hier ist offenbar für »Israel» zu lesen »Ismael», d. h. Araber oder Muhammedaner.

Wieder tritt uns ein jüdischer Astrologe entgegen, und zwar einer der bedeutendsten und vielfach benutzten arabischen Autoren, dessen Schriften in den Ausgaben der lateinischen Übersetzungen den Fehler, der so eben gerügt worden, umkehren, indem sie den »*Israelita*» der mss. in einen »*Ismaelita*»

verwandeln, so dass erst vor 40 Jahren (im *Catal. Bodl.)* der Jude reclamirt und restituirt worden ist. CASIRI (I, 439) hat ihn aus eigener Machtvollkommenheit nach Spanien versetzt; hingegen ist die Identität mit einem gleichnamigen Arzte noch im Stadium einer unbewiesenen Conjectur. Auch hier werden aus einem weitschichtigen Material nur die Hauptmomente hervorzuheben sein.[12]

Der volle arabische Namen des Mannes ist: ABU OTHMAN SAHL[13] B. BISCHR B. ʿHABIB B. HÂNNI [oder *Hani* zu lesen], nach Andern *Haja*.[14] Der eigene Name wurde in den lateinischen Übersetzungen zu *Zael*, *Zahel* etc., mit *ben* in Verbindung mit dem Namen des Vaters zu ZAEL *Benbix*, *Kembris* etc. bis zu *Ethelbront!*

Zeit und Vaterland sind schon durch NADIM festgestellt; er diente dem Fürsten TAHIR in Khorassan, der 829 starb, wie ich schon in *Cat. Bodl.* angegeben (s. weiter unten).

Unter den vielen Schriften SAHL's, welche NADIM im *Fihrist* aufzählt, figurirt eine über Algebra, welche von den Bewohnern »Rums» — darunter versteht man damals das byzantinische Reich — geschätzt wurde. Anderseits ist es wahrscheinlich, dass eine seiner Schriften, welche die 16 Stellungen der Sterne auseinandersetzt,[15] in indischen Quellen als »*Tajjikam*» citirt, die arabische Astrologie repräsentirt.

Von den arabischen Originalen hat sich wohl darum wenig erhalten, weil sie von den späteren populären Astrologen benutzt und verdrängt wurden. Wir besitzen sein Werk *fi Aʿhkam* (de judiciis) in dem ms. der Refaja 116 in Leipzig, welches mit dem lateinischen *Introductorium* übereinstimmt, das 1493 in Venedig hinter dem *Quadripartitum* des PTOLEMAEUS gedruckt ist. Noch festzustellen ist das Verhältnis zu ms. Bodl. bei URI 941[16] über die vorzüglichen (auserlesenen) Judicia, und zu dem Berliner ms. Landberg 221 (geschrieben 1749 n. Chr.), welches als »Sammlung (Auszug) von Judiciis über die Umwälzungen der Jahre und [über?] Anderes» vom Copisten überschrieben ist. Nach der Beschreibung AHLWARDT's (*Verzeichniss* V, 1893, S. 279 n. 5583) ist oft ABU MAASCHAR angeführt, woraus AHLWARDT folgert, dass SAHL nach dem Tode desselben (885 n. Chr.) noch am Leben gewesen sei! Für Herrn AHLWARDT existiren alle früheren Quellen nicht.[17] Einiges aus demselben Werke ist ausgezogen in einem hebräischen ms., welches früher I. H. SCHORR in Brody, zuletzt dem am 28. Jan. 1894 verstorbenen Dr. AD. JELLINEK, Rabbiner in Wien, gehörte und zweimal eine Zeitlang in meinen Händen sich befand.[18]

Das Verhältnis der lateinisch gedruckten Schriften SAHL's, auch *de Electionibus* (1493, wie oben, und mit IUL. FIRMICUS *Astronomia,* Basel 1551 fol., auch unter dem Namen des MASCHALLAH gedruckt, s. oben § 6), *de Temporum significatione ad judicia* (1493, wie oben) zu den Anführungen bei ALBERTUS MAGNUS und den noch erhaltenen mss. ist nur nach sorgfältigen Vergleichungen festzustellen, wie ich an SCHUM's *Catalog der Amploniana in Erfurt* in der Biblioth. Mathem. 1891, S. 70 nachgewiesen habe.

Es erübrigt noch ein Wort über eine Hypothese, welche ich im Jahre 1862[19] als solche der Prüfung anheimstellte, die aber von keiner Seite erfolgte, so dass ich noch heute nicht darüber entscheiden möchte. Es handelt sich um die etwaige Identität mit einem Homonymus, der jedenfalls hier seine Stelle finden müsste.

SAHL, genannt RABBAN AL-TABARI, das heisst: der Rabbiner von Tabaristan,[20] Vater des ABU'L HASAN ALI (des zum Islam übergetretenen Lehrers des berühmten Arztes RAZI),[21] Arzt und Astrolog, wird auch als Übersetzer wissenschaftlicher Werke »aus einer Sprache in die andere» genannt; WÜSTENFELD meinte, aus dem *Hebräischen* ins Arabische, wofür ich als Conjectur aus dem *Syrischen* substituirt habe, allein es wird auch kein bestimmtes Werk angegeben, das er übersetzt hätte. Nach einer, wenig verbürgten Mitteilung soll ABU MA'ASCHAR gesagt haben, der Ausdruck *Matra'h al-Schuâ'* (Strahlenwurf) komme in keiner Übersetzung von PTOLEMAEUS' *Almagest* aus dem Griechischen vor, sondern nur in der des SAHL. Allein ABU MA'ASCHAR ist keine zuverlässige Autorität, und es fragt sich anderseits, ob die allgemeine Angabe, dass SAHL übersetzt habe, nicht eine blosse Verallgemeinerung jenes Berichts vom Ausspruch des ABU MA'ASCHAR sei; da ja sonst nirgends von einer Übersetzung des SAHL die Rede ist und er im Verzeichnis der Übersetzer bei NADIM nicht vorkommt. WÜSTENFELD (*Aerzte* S. 20) hat den astrologischen Ausdruck ungenau mit »Brechung der Lichtstrahlen» wiedergegeben, und so ist von unkritischen Schreibern und Nachschreibern SAHL zum Entdecker der »Strahlenbrechung» gemacht worden, obwohl diese den alten Griechen bekannt war.[22]

Hervorzuheben ist, dass SAHL's Kenntnis der Geometrie und Arithmetik gerühmt wird; nimmt man hinzu, dass NADIM diesem SAHL gar keinen Artikel unter den Astrologen widmet, so wird man die Identität der beiden Homonymen nicht ungeprüft verwerfen, obwohl der eine in Khorassan, der andere in Tabaristan und sonstwo gelebt haben soll.

Bei dieser Gelegenheit sei auch bemerkt, dass die Vermutungen und Angaben über eine angebliche *hebräische* Übersetzung des *Almagest* und der Geographie des PTOLEMAEUS aus etwa jener Zeit ganz unbegründet sind *(Hebr. Übersetz.* S. 522).

[1] b. = ben, Sohn, dient bei Hebräern und Arabern bekanntlich wie bei alten Griechen und Anderen, zur näheren Bezeichnung anstatt des Familiennamens.

[2] So bei seinem Schüler AL-KHAJJÂT; AHLWARDT, *Verzeichnis der arabischen Handschriften der Berliner Königl. Bibliothek,* Bd. V (1893) S. 274 und 275 unten, S. 286, macht einander widersprechende Angaben, indem er principiell die betreffende Literatur und selbst Ausgaben ignorirt. Daher emendirt er (S. 141) IBN AFLAH in ALBATTANI ohne die beiden lateinischen Übersetzungen zu befragen, welche ihn belehrt hätten, dass das Manuscript wirklich das seltene Werk des ersteren enthalte. Ähnliches wird auch später zur Sprache kommen. — IBN ESRA nennt MASCHALLAH einen Weisen »von Hodu«, was gewöhnlich Indien bedeutet.

[3] *Cat. Bodl.* pag. 1677: Zeitschr. d. deutschen morgenländ. Gesellsch. **18**, 1864, 166; **24**, 1870, 338; Zeitschr. für Mathem. **16**, 1871, 376; Biblioth. Mathem. 1891, 65; *Hebr. Übers.* S. 599.

[4] In manchen Antiquariatscatalogen ist die Schrift unter dem Schlagwort *Abraham bar Chijja* zu finden! — Die früher angenommene Autorschaft eines Rabbi NATAN beruht höchst wahrscheinlich auf Verwechslung.

[5] Auf die Beschreibung der anderen Stücke desselben Münchener Codex (Seite 9: »alle so durcheinander»!) ohne Berücksichtigung meines Catalogs ist hier nicht einzugehen, s. Hebr. Bibl. XX, 111; vergl. *Hebr. Übers.* S. 501.

[6] BERLINER, in der Monatsschrift für Gesch. und Wissenschaft d. Judenth. 1868, S. 428.

[7] *Mischnat ha-Middot,* S. IV, Anmerk. 3; vergl. *Kerem Chemed* II, 26, IV, 112; Zeitschr. d. deutschen morgenländ. Gesellsch. **28**, 1874, 459; Hebr. Bibl. XIX, 61.

[8] Hebr. Bibl. V, 15, 25 und S. III (abgedruckt in ZUNZ, *Gesammelte Schriften* III, 242); s. dazu Hebr. Bibl. IX, 175, XVII, 8; *Hebr. Übers.* S. 501.

[9] Über SAMUEL erschienen Monographien von I. HOFFMANN (Leipzig 1873) und S. FESLER (Breslau 1879); s. auch W. BACHER, *Die Agada der babylonischen Amoräer* (Budapest 1878, Jahresbericht, S. 41). Eine Biographie SAMUEL's von

ABR. KROCHMAL enthält die hebräische Zeitschrift He-Chaluz (Lemberg) 1, 1892, 66—69. — S. auch Biblioth. Mathem. 1893, 71, Anmerk. 5.

10 Wahrscheinlich aus dem »Buch der Schöpfung» (*Jezira),* dessen Zeit ebenfalls unbestimmt ist. In diesem Buche wird die Schöpfung aus den 22 hebräischen Buchstaben und den 10 Zahlen abgeleitet. — Der Drachen verschlingt die verfinsterten Himmelskörper; s. meinen Artikel: *Orientalische Ansichten über Sonnen- und Mondfinsternis* im Mag. für die Literat. des Auslandes, 1845, S. 519.

11 Die angeführte interessante historische Stelle habe ich italienisch übersetzt in meinen Anmerkungen zu BALDI, *Vite,* p. 74, französisch in *Etudes sur Zarkali,* p. 4.

12 Von den in Biblioth. Mathem. 1891, S. 10 verzeichneten Quellen hebe ich hier wegen der bibliographischen Nachweisungen hervor: *Catal. Bodl.* p. 2260 und Add.; Zeitschr. für Mathem. **16**, 1871, S. 388, und *Hebr. Übers.* S. 603 u. XXX. — SUTER (s. Anmerk. 14), S. 62 hat über Lebenszeit und Wohnsitz SAHL's keine weiteren Angaben gefunden als bei CASIRI.

13 Das Diminutiv *Soheil* bei HAGI KHALFA, welches AHLWARDT zurückweist, findet sich auch im ms. Refaja.

14 *Fihrist* S. 274: »*Hani,* man sagt [auch] *Haja,* der Jude». *Haja* ist also hier Variante von *Hani* (*Hana* bei AHLWARDT ist unbegründet). SUTER, *Das Mathematiker-Verzeichnis im Fihrist* (in Abh. z. Gesch. d. Mathem. **6**, 1892) übersetzt irrtümlich: »wurde als Jude *Haja* genannt».

15 Zeitschr. d. deutschen morgenländ. Gesellsch. **25**, 1871, 417 zu **18**, 1864, 194.

16 Geschrieben 649 H., nicht 640, wie URI angiebt; so ist zu corrigiren *Catal. Bod.* p. 2262 Zeile 8 von unten.

17 Ich habe eben (Januar 1894) dieses Manuscript flüchtig angesehen, da ich zu genauerer Prüfung nicht die Zeit habe. Fol. 100 steht: Es spricht ABU (!) SAHL; 112[b]: »Pforte über Auserlesenes *(Nawadir)* betreffend die Revolutionen der Jahre». Fol. 104: »Rede des ABU MA'ASCHAR DJA'AFAR . . . AL-BALKHI AL-KATIB zur Zeit des HARUN, Cap. über seine Rede betreffend die Revolution». Mit solcher Zeitbestimmung citirt nur ein jüngerer Compilator.

18 S. meinen Art.: *Schriften der Araber in hebräischen Handschriften,* Zeitschr. der deutschen morgenländ. Gesellsch. **47**, 1893, S. 379.

[19] *Zur pseudepigraphischen Literatur* S. 78; vergl. Zeitschr. d. deutschen morgenländ. Gesellsch. **18**, 1864, 183.

[20] Es ist unbegreiflich, wie unsere besten Orientalisten, die ja die jüdischen Gelehrten überhaupt missbräuchlich »Rabbinen» nennen, das hebräische Wort, das ausdrücklich als Ehrennamen erklärt wird, nicht wiedererkennen und einen seltsamen Namen *Dsil* (durch Versetzung eines Punktes und Verwechslung eines Buchstabens), oder *Zein* (so noch bei AHLWARDT l. c. V, 513 n. 6257) annehmen. — S. die Citate in *Hebr. Übers.* S. 521, 604 Anmerk. 60 und Zusätze S. XXX.

[21] HAMMER, *Literaturgesch.* III, 191 macht ihn zum Schüler und Lehrer RAZI's, indem er eine gewöhnliche arabische Phrase verdreht.

[22] *Hebr. Übers.* S. 521; s. auch über ADOLF GERECKE's Semiplagiat (1893) meinen Artikel *Die Juden und die profanen Wissenschaften* in Magazin für die Wissenschaft d. Jud. 1893, S. 234.

Intorno alla prima dimostrazione di un teorema di Fermat.

Nota di GIOVANNI VACCA a Genova.

Nelle *Disquisitiones arithmeticae* di GAUSS[1] (§ 50), dopo una dimostrazione del noto teorema di FERMAT: »Se a è primo con p, e p è un numero primo, si ha $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$, si legge:

> Theorema hoc quod tum propter elegantiam tum propter eximiam utilitatem omni attentione dignum, ab inventore *theorema Fermatianum* appellari solet. Ill. EULER primus demonstrationem publici juris fecit (*Theorematum quorundam ad numeros primos spectantium demostratio.* Comm. Petrop. VIII). In commentario anteriore vir summus ad scopum nondum pervenerat.
>
> In controversia famosa inter MAUPERTUIS et KÖNIG a principio actionis minimae orta, . . . , KÖNIG in manibus se habere dixit autographum Leibnitianum, in quo demonstratio huius theorematis cum Euleriana prorsus cospirans contineatur. Licet vero fidem huic testimonio denegare nolimus, certe LEIBNITIUS inventum suum nunquam publicavit.

A mia conoscenza nessun altro scrittore parla di una dimostrazione di LEIBNIZ del teorema sopra enunciato anteriore a quella di EULERO. Ora nelle opere matematiche di LEIBNIZ, pubblicate da GERHARDT (1849—1863) si trova una dimostrazione rigorosa di esso, che si fonda sulla divisibilità dei coefficienti polinomichi e che dimostra la verità dell' asserzione del KÖNIG; è di essa che intendo rendere conto.

Noto anzitutto che in tre lettere a J. BERNOULLI,[2] LEIBNIZ annuncia di avec già da tempo trovata la formola che dà il coefficiente di un termine qualunque nello sviluppo di una potenza di un polinomio. Inoltre alla stessa formola accenna nel suo *Symbolismus memorabilis calculi algebraici et infinitesimalis, in comparatione potentiarum et differentiarum* etc.

Nella sua *Nova Algebrae promotio*[3] riprende a trattare lo stesso soggetto. Osserva che le potenze dei polinomi sono rappresentate da *forme* dello stesso grado, moltiplicate per certi determinati coefficienti numerici; col nome di *forma* egli chiama poi la somma di tutti i termini formati nello stesso modo da un certo numero di lettere; così

$$a + b + c + \dots$$

è una *forma* di primo grado,

$$a^2 + b^2 + c^2 + \ldots$$
$$ab + bc + ac + \ldots$$

sono forme di 2° grado, ecc. Posto per brevità, con Leibniz,

$$a + b + c + \ldots = \underset{\cdot}{a}$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + \ldots = \underset{\cdot\cdot}{a}^2$$
$$ab + bc + ac + \ldots = \underset{\cdot\cdot}{ab}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

si avrà

$$(a + b + c + \ldots)^1 = \underset{\cdot\cdot}{a}$$
$$(a + b + c + \ldots)^2 = \underset{\cdot\cdot}{a}^2 + 2\underset{\cdot\cdot}{ab}$$
$$(a + b + c + \ldots)^3 = \underset{\cdot\cdot}{a}^3 + 3\underset{\cdot\cdot\cdot}{a^2b} + 6\underset{\cdot\cdot\cdot}{abc}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Per trovare i coefficienti numerici delle *forme* nello sviluppo della potenza x^{ma} di un polinomio, osserva che ogni termine appare tante volte nello sviluppo quante sono le disposizioni, differenti che si possono formare colle sue lettere; così nel cubo $(a+b)^3$ per il membro a^2b, questo numero è 3, poichè colle 3 lettere a, a, b si possono formare le 3 disposizioni

$$aab\ ,\ aba\ ,\ baa\,.$$

In generale trova che il coefficiente del termine

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots, \quad \text{ove} \quad \alpha + \beta + \gamma + \ldots = n,$$

è dato dalla espressione

$$\frac{\underline{|n}}{\underline{|\alpha}\,\underline{|\beta}\,\underline{|\gamma}\ldots}.$$

Conclude infine da questa espressione che n e il numero precedente non possono mai essere primi fra loro, donde segue che, se n è un numero primo, esso necessariamente divide

$$\frac{\underline{|n}}{\underline{|\alpha}\,\underline{|\beta}\,\underline{|\gamma}\ldots},$$

ove tuttavia si suppone che almeno uno dei numeri $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sia maggiore dell' unità.

Emerge da ciò che se a, b, c, ... sono interi ed

$$x = a + b + c + \ldots,$$

i numeri $x^e - \underset{\cdot\cdot}{a}^e$ ed e non sono mai primi fra loro, e se e è primo, $x^e - \underset{\cdot\cdot}{a}^e$ è divisibile per e.

Supposto finalmente in particolare

$$a=b=c=\ldots=1\,,$$

si ha

$$a^{e}=1\,,\qquad \underset{..}{a}^{e}=x\,,$$

e allora si giunge al teorema di FERMAT.

[1] GAUSS, *Werke*, I. Band (Göttingen 1863), p. 41.

[2] Carteggio tra LEIBNIZ e BERNOULLI, lettere X, XI, XII nel vol. III parte 1ª delle opere ed. GERHARDT (p. 175, 181 —182 e 195).

[3] *Aus d. Manuscripten der königl. Biblioth. zu Hannover.* LEIBNIZ, *Mathematische Schriften*, ed. GERHARDT, vol. VII, pag. 154.

Sur les découvertes mathématiques de Wronski.

Par S. DICKSTEIN à Warszawa.

7. La loi suprême.

La loi suprême a été présentée par WRONSKI à l'Institut de France dans le mémoire déjà cité: *Premier principe des méthodes algorithmiques comme base de la Technie algorithmique,* dont le but était la fondation d'une branche nouvelle de l'Analyse, c'est à dire de la »Technie algorithmique« qui, d'après WRONSKI, diffère essentiellement de la »Théorie algorithmique«. Celle-ci embrasse les propositions ou les *théorèmes* ayant pour objet la *nature* des qualités, tandis que la première est le système de *méthodes* qui ont pour objet la *mesure* ou l'évaluation des fonctions. Dans sa *Philosophie des mathématiques,* WRONSKI, par des considérations métaphysiques sur la nature du savoir, établit la nécessité de cette division de l'Analyse et trouve dans la loi suprême un instrument d'une généralité absolue pour tous les procédés »techniques« concernant l'évaluation des fonctions. Les séries, les fractions continues et les produits infinis sont contenues dans cet instrument général.

Soit $\varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ une fonction arbitraire de plusieurs quantités variables $x_1, x_2, x_3, \ldots$, et soient $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ des quantités quelconques. Posons

$$\Omega_0 = 1,$$
$$\Omega_1 = \varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots),$$
$$\Omega_2 = \varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots)\varphi(x_1+\xi_1, x_2+\xi_2, x_3+\xi_3, \ldots),$$

et généralement

$$\Omega_\mu = \varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots)\ldots\varphi(x_1+(\mu-1)\xi_1, x_2+(\mu-1)\xi_2, x_3+(\mu-1)\xi_3, \ldots),$$

les fonctions Ω formant une espèce très générale des facultés, qu'on désigne d'après KRAMP de cette manière

$$\Omega_\mu = \varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots)^{\mu/\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots}.$$

Soit $F(x)$ une fonction de x dont il s'agit de déterminer la génération technique; nous aurons

$$F(x) = A_0\Omega_0 + A_1\Omega_1 + A_2\Omega_2 + A_3\Omega_3 + \ldots,$$

où le coefficient A_μ a l'expression générale

$$A_\mu = X_\mu + Z(\mu)_1 X_{\mu+1} + Z(\mu)_2 X_{\mu+2} + Z(\mu)_3 X_{\mu+3} + \ldots,$$

les X_μ étant les quotients des sommes combinatoires:

$$X_\mu = \frac{\varpi[\Delta^a \Omega_1\, \Delta^b \Omega_2\, \Delta^c \Omega_3 \ldots \Delta^p \Omega_{\mu-1}\, \Delta^q F(x)]}{\varpi[\Delta^a \Omega_1\, \Delta^b \Omega_2\, \Delta^c \Omega_3 \ldots \Delta^p \Omega_{\mu-1}\, \Delta^q \Omega_\mu]}; \quad (a=1, b=2, c=3, \ldots)$$

les différences $\Delta\Omega_1, \Delta\Omega_2, \ldots, \Delta F(x)$ sont prises pour une valeur particulière de la variable x. Les quantités Z sont déterminées par les formules:

$$Z(\mu)_1 = -Y(\mu+1)_\mu,$$
$$Z(\mu)_2 = -Y(\mu+2)_\mu - Y(\mu+2)_{\mu+1} Z(\mu)_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Z(\mu)_\omega = -Y(\mu+\omega)_\mu - Y(\mu+\omega)_{\mu+1} Z(\mu)_1 - \ldots - Y(\mu+\omega)_{\mu+\omega-1} Z(\mu)_{\omega-1}$$

où

$$Y(\omega)_\mu = \frac{\varpi[\Delta^a \Omega_1\, \Delta^b \Omega_2 \ldots \Delta^{a+\mu-2} \Omega_{\mu-1}\, \Delta^{a+\mu-1} \Omega_\omega]}{\varpi[\Delta^a \Omega_1\, \Delta^b \Omega_2 \ldots \Delta^{a+\mu-2} \Omega_{\mu-1}\, \Delta^{a+\mu-1} \Omega_\mu]}.$$

La forme donnée plus haut aux fonctions $\Omega_0, \Omega_1, \ldots$ n'est pas encore la plus générale possible; on peut prendre des fonctions génératrices quelconques, et la loi des coefficients restera la même.[38]

Lorsque la fonction proposée est une fonction de plusieurs variables indépendantes, on mettra à la place des différences simples la somme des différences partielles.

De sa loi suprême, WRONSKI déduit les développements spéciaux qu'il nomme lois »relatives» ou »subordonnées». Dans le cas $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots$; $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \ldots$; $\Omega_\mu = \varphi(x)^{\mu/\xi}$, on aura la génération de la fonction $F(x)$ suivant les facultés progressives de la fonction arbitraire $\varphi(x)$, et si l'on donne à la variable x une valeur égale à une des racines de l'équation $\varphi(x) = 0$, on aura

$$Y(\omega)_\mu = 0, \qquad (\omega > \mu)$$
$$Z(\mu)_1 = 0, \qquad Z(\mu)_2 = 0, \quad \ldots, \quad Z(\mu)_\omega = 0,$$
$$A_\mu = X_\mu.$$

Si l'on fait donc

$$\Xi_0 = F(x), \qquad \Xi_1 = \frac{1}{\Delta\varphi(x)} F(x),$$
$$\Xi_2 = \frac{1}{\Delta^2 \varphi^{2/\xi}} \left\{ \Delta^2 F(x) - \Delta F(x) \frac{\Delta^2 \varphi(x)}{\Delta\varphi(x)} \right\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

on aura le développement

$$F(x) = \Xi_0 + \Xi_1 \varphi(x) + \Xi_2 \varphi(x)^{2/\xi} + \ldots .$$

Pour $\xi = 0$, on obtient le développement suivant les puissances de la fonction $\varphi(x)$. Si $\varphi(x) = a + x$, on reçoit

$$F(x) = F(-a) + \frac{\Delta F(-a)}{1 \cdot \xi}(a + x) + \frac{\Delta^2 F(-a)}{1 \cdot 2 \cdot \xi^2}(a + x)^{2/\xi} + \ldots$$

et pour $\xi = 0$ la série de TAYLOR.

Si la variable x est donnée au moyen d'une équation avec d'autres variables, p. ex. par l'équation $\psi(x, y) = 0$, et s'il s'agit de développer la fonction $F(x, y)$, on aura

$$F(x, y) = \Xi_0 + \Xi_1 \varphi(x) + \Xi_2 \varphi(x)^{2/\xi} + \ldots ,$$

où les différences (ou les différentielles) de la fonction $F(x, y)$ peuvent être exprimées à l'aide de l'équation donnée. Cette génération donne la loi générale de la résolution »technique» des équations.

Soient $x_1, x_2, x_3, \ldots$ plusieurs variables indépendantes, x une fonction de ces variables; $f(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ des fonctions quelconques de x. Soit de plus:

$$0 = f(x) + x_1 f_1(x) + x_2 f_2(x) + x_3 f_3(x) + \ldots ,$$

l'équation qui détermine la valeur de x, dont on demande le développement. WRONSKI remarque que toutes les équations »immanentes» et transcendantes, primitives et différentielles, peuvent être ramenées à la forme de cette équation et, par conséquent, que cette équation présente la forme générale de toutes les équations qu'on retrouve dans les problèmes d'Analyse (»Problème universel» de WRONSKI).

Pour le développement d'une fonction arbitraire $F(x)$ de la quantité cherchée x, WRONSKI donne la formule:

$$\begin{aligned} F(x) = M_0 &+ \frac{x_1}{1} M(1)_1 + \frac{x_1^2}{1 \cdot 2} M(1, 1)_2 + \frac{x_1^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} M(1, 1, 1)_3 + \ldots \\ &+ \frac{x_2}{1} M(2)_1 + \frac{x_1 x_2}{1 \cdot 1} M(1, 2)_2 + \frac{x_1^2 x_2}{1 \cdot 2 \cdot 1} M(1, 1, 2)_3 + \ldots \\ &+ \frac{x_3}{1} M(3)_1 + \frac{x_2^2}{1 \cdot 2} M(2, 2)_2 + \frac{x_1 x_2^2}{1 \cdot 1 \cdot 2} M(1, 2, 3)_3 + \ldots , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

les coefficients ayant la forme générale

$$M(p\,,q\,,r\,,\,\ldots\,,\omega)_\mu =$$

$$(-1)^\mu \frac{\text{ש}\left(df(x)d^2(f(x))^2\ldots d^{\mu-1}(f(x))^{\mu-1}d^\mu\left[\int f_p(x)f_q(x)\ldots f_\omega(x)dF(x)\right]\right)}{1\,.\,1\,.\,2\,\ldots\,1\,.\,2\,\ldots\,\mu\,.\,(df(x))^{1+2+\ldots+\mu}}$$

où, après avoir pris les différentielles, il faut substituer à la place de x la quantité que donne la relation $f(x)=0$.

De cette formule générale on reçoit comme le cas particulier pour $f(x)=a+x$, $x_1=x_2=x_3=\ldots=0$, la série connue de LAGRANGE.

Au développement de la théorie et aux applications de la loi suprême sont consacrés les deux grands volumes de la *Philosophie de la Technie algorithmique.* La déduction qu'on y trouve est assez compliquée, grâce aux notations adoptées par WRONSKI; elle n'est au fond qu'une simple transformation de la série dont on admet l'existence. Elle ne nous apprend rien ni sur la légitimité, ni sur les limites du développement général des fonctions.[39]

LAGRANGE et LACROIX dans leur rapport sur le mémoire de WRONSKI proposaient à l'auteur de développer ses idées nouvelles et générales pour les soumettre aux applications plus speciales.[40] Ces développements sont contenus dans les ouvrages postérieurs de WRONSKI. SCHWEINS a reproduit plusieurs formules de WRONSKI dans son ouvrage sur la théorie des différences et différentielles, qui est cependant resté sans influence.[41] Les idées de WRONSKI sont retombées dans l'oubli. Ce n'est qu'en 1873 que CAYLEY a consacré un bel article à la série de WRONSKI, de laquelle on déduit les séries de LAGRANGE et de BÜRMANN.[42] L'année suivante, TRANSON, par un article publié dans les Nouvelles annales des mathématiques, a rappelé l'attention des savants sur la loi suprême.[43] En 1884 et 1885, CH. LAGRANGE a publié quelques mémoires, dans lesquels il introduit le reste dans l'expression de la loi suprême, et donne, par des considérations analogues à celles qui conduisent à la série de TAYLOR, une forme rigoureuse et plus simple à la déduction de WRONSKI.[44] P. DUBOIS-REYMOND n'attribue aux formules de WRONSKI qu'une signification formelle.[45] MANSION est de l'avis que la loi suprême est une généralisation stérile jusqu'à present du théorème de TAYLOR.[46]

La signification formelle, c'est à dire la possibilité de déduire plusieurs développements de la loi suprême étant incontestable, l'utilité plus réelle de cette loi dépendrait naturellement de la

détermination des conditions de sa légitimité. Les difficultés de cette recherche peuvent être graves à cause de la vaste généralité des fonctions arbitraires de WRONSKI, elles ne sont pas cependant insurmontables pour des cas spéciaux mais encore assez généraux, comme par exemple pour la série de LAGRANGE. Les travaux récents d'ECHOLS prouvent que les idées de WRONSKI sont en effet d'une fécondité remarquable.[47] La loi suprême bien qu'elle ne soit pas un instrument d'une généralité »absolue», comme le voulait WRONSKI, peut devenir néanmoins, je crois, un instrument utile pour le développement des fonctions. Du reste, WRONSKI lui-même a senti la nécessité de soumettre ses développements aux conditions de convergence, comme on le voit dans sa »méthode suprême», sur laquelle je dirai quelques mots dans l'article suivant.

[38] Conf. E. WEST, *Exposé des méthodes générales en mathématiques* (Paris 1886), p. 235 et suiv. — H. LAURENT, *Traité d'analyse.* III (Paris 1888), p. 352—356.

[39] Conf. S. DICKSTEIN, *O »prawie najwyzszém»* (Sur la loi suprême). Prace matematyczno-fizyczne **2**, 1890, p. 145—168.

[40] Rapport de l'Institut lu à la Classe des sciences lundi 15 octobre 1810 et fait par M. M. LAGRANGE et LACROIX. On trouve dans ce rapport ce passage: »Ce qui a frappé vos commissaires dans le mémoire de M. WRONSKI, c'est qu'il tire de sa formule toutes celles que l'on connaît pour le développement des fonctions et qu'elles n'en sont que de cas très particuliers».

[41] SCHWEINS, *Theorie der Differenzen und Differentiale* (Heidelberg 1825).

[42] CAYLEY, *On Wronski's theorem.* Quarterly journ. of mathem. **12**, 1873, p. 221—228.

[43] TRANSON, *Réflexions sur l'évènement scientifique d'une formule publiée par Wronski en 1812 et démontrée par M. Cayley en 1873.* Nouv. ann. des mathém. $\mathbf{13}_2$, 1874, p. 161—174. — *Loi des séries de Wronski. Sa phoronomie.* Ibid. p. 305—318.

[44] CH. LAGRANGE, *Forme générale du reste dans l'expression d'une fonction au moyen d'autres fonctions.* Comptes rendus de l'académie des sciences [de Paris] 9 juin 1884. — *Démonstration élémentaire de la loi suprême de Wronski.* Mémoires de l'académie de Belgique **47**, 1884. — *Développement des fonctions d'un nombre quelconque de variables*

indépendantes à l'aide d'autres fonctions de ces mêmes variables. Mém. de l'académie de Belgique **48**, 1885.

45 DUBOIS REYMOND, *Über die Convergenz und Divergenz der Fourierschen Darstellungsformeln* (München 1878), p. I, II: »Ist die Möglichkeit der Entwickelung nachgewiesen oder wahrscheinlich gemacht, so ist WRONSKI's Coefficientenbildung, weil sie für alle Reihen dieselbe ist und daher im gegebenen Fall äusserst verwickelt ausfallen muss, im Allgemeinen unbrauchbar. Man versuche z. B. die Coefficienten der Entwickelung nach Kugelfunktionen auf diese Weise zu bestimmen. Steht dagegen die Möglichkeit der Entwickelung selbst in Frage, so ist die Form der Coefficienten wieder zu verwickelt um die Convergenzprüfung der Reihe in der sie auftreten, zu ermöglichen. Aus diesen Gründen scheint, wenigstens vor der Hand, den WRONSKI'schen Ergebnissen nur ein formales Interesse zugesprochen werden können.»

46 MANSION, *Résumé du cours d'analyse infinitésimale* (Paris 1887), p. 120.

47 ECHOLS, *On certains determinant forms and their applications.* Annals of mathem. **6**, 1892, p. 110—126; **7**, 1893, p. 1—59, 111—142. — *On the composite.* Ibid. **7**, 1893, 92—101. — *On the expansion of functions.* American journ. of mathem. **15**, 1893, p. 316—326. — *On a general formula for the expansion of functions in series.* Bullet. of the New York mathem. soc. **2**, 1893, p. 135—144. — *Wronski's expansion,* Ibid. p. 178—184 (article historique).

Sur les méthodes primitives qui ont servi à résoudre des questions arithmétiques.

Par V. Bobynin à Moskwa.

Un nombre peut être considéré de deux manières différentes. Il peut être pris en lui-même, comme membre indépendant d'une série indéterminée et infinie,[1] contenant tous les nombres entiers et fractionnaires qui existent, disposés suivant leur grandeur relative; il peut être envisagé selon ses rapports aux autres nombres. On dira pour être plus court qu'en premier lieu il est considéré dans son état individuel, en second dans sa liaison avec les autres ou dans sa composition au moyen de ces autres. Conformément aux deux manières d'envisager les nombres il existe aussi deux moyens ou méthodes pour les trouver. Un nombre est donc obtenu soit comme membre d'une série indéterminée et infinie, d'après les traits qui le distinguent des autres, soit comme composé de plusieurs nombres qui marquent son union avec ces derniers, autrement dit dans son expression au moyen de ces derniers. Puisque le premier cas n'exige que la connaissance des traits distinguant le nombre en question d'avec les autres, nous appellerons la première méthode *celle des diversités*. Quant à la seconde elle peut être appelée *celle de l'expression d'un nombre dans d'autres nombres*.

La méthode des diversités une fois présente à son esprit, l'homme cherche, l'homme tâtonne, l'homme tâche d'en faire un emploi pratique. Guidé d'un côté par certains traits distinctifs du nombre à trouver, d'un autre côté par la connaissance acquise de quelques autres nombres, l'homme *essaye* de trouver le nombre en question au milieu de ceux qu'il connaît. Il y arrive en comparant les traits distinctifs des nombres qu'il a choisis aux traits semblables du nombre en question qu'il est à chercher. La forme, communiquée par ce moyen à la méthode des diversités, dont elle fait jusqu'aujourd'hui la forme unique, est ordinairement appelée *la méthode des tâtonnements*. Actuellement à peu près bannie de la science, elle se trouve néanmoins largement répandue dans la partie de l'humanité, privée de toute instruction scolaire, ainsi que nous le prouvent les observations prises sur des calculateurs prodiges, tels que Inaudi. En antiquité son emploi fut bien plus grand encore alors qu'elle contribua puissamment au progrès de la science dont elle fut l'instru-

ment. En étudier donc la nature et les éléments se trouve être souverainement nécessaire à l'Histoire des mathématiques.

Les observations entreprises dans ce but sur la manière de résoudre diverses questions et problèmes, d'après la méthode des tâtonnements, nous amènent à des conclusions suivantes quant au contenu et au caractère. Tout d'abord le nom de la méthode nous en indique suffisamment le sujet, qui est en effet une suite de tâtonnements visant à trancher les questions exactement ou approximativement. Le nombre de ces tâtonnements devant être limité au possible pour le succès même de l'entreprise, il est urgent d'en définir le minimum et le maximum, selon les conditions du problème. On se sert ensuite d'une de ces limites ou d'un nombre approchant comme d'un point de départ, comme d'un *nombre d'issue*. C'est le premier tâtonnement. En cas qu'on échoue, le choix des nombres dans les tentatives suivantes est toujours conforme au *principe des nombres les plus commodes* à calculer. Il reste à savoir si tous ces tâtonnements répondent à leur but principal, c'est à dire s'ils donnent la solution désirée ou du moins s'ils en approchent assez. On y arrive en les vérifiant par les conditions du problème. Cette vérification est si impérieusement exigée par la nature même de la méthode dont elle fait l'élément essentiel et inséparable, qu'une fois privé d'elle l'emploi en devient impossible.

La méthode des tâtonnements peut s'appliquer à la solution des problèmes et des questions le plus variés, théoriques aussi bien que pratiques. C'est donc l'universalité qui est son trait dominant. Cette qualité importante, elle la doit à la simplicité de son origine primitive, dépourvue de tout artifice, suscitée par la nature psychique de l'homme sans que sa conscience souvent accompagnée d'un étroit courant de pensée y soit pour quelque chose. Il est à noter que la méthode des tâtonnements ne peut être universelle qu'en théorie. Le succès de son application pratique est souvent douteux et parfois irréalisable. Les questions compliquées, contenant beaucoup de conditions ou exigeant la définition de plusieurs inconnus, ainsi que la recherche des solutions exactes, dans bien des cas demandent un nombre de tâtonnements extraordinairement et même infiniment grand. On ne tâtonne avec succès que par hasard ou moyennant une recherche assidue et souvent très longue. Il y a force cas enfin, où ni assiduité, ni hasard ne suffisent à donner un résultat satisfaisant. La méthode des tâtonnements est *directe* toutes les fois qu'elle s'applique à définir simplement le nombre à trouver, elle est *indirecte* quand elle tend à définir

un nombre mis par les conditions du problème en liaison avec le nombre à trouver. C'est ce dernier qui est alors indirectement cherché à l'aide de son rapport avec le nombre obtenu.

La méthode des tâtonnements offre un cas particulier dans celle *de la formation successive du nombre à trouver d'après les conditions de la question*. Celle-ci remplace tous les tâtonnements ou du moins elle en remplace une partie par une série de variations successives, opérées selon les conditions du problème dans le nombre d'issue, ou en général dans le nombre fourni par le dernier tâtonnement. Le but unique de ces changements est d'approcher peu à peu les nombres qu'ils donnent à la vraie solution que l'on cherche. L'application de cette méthode étant loin de satisfaire à toutes les questions, soumises à la méthode des tâtonnements, nous ne saurions y voir, nous le répétons, qu'un cas particulier de cette dernière, mais un cas qui l'emporte sur elle en en marquant un progrès considérable. En effet, il abrège les questions en exigeant moins de temps pour les résoudre. Il communique aux procédés de chercher l'inconnu une précision beaucoup plus grande, et quelquefois il les précise tout à fait. Enfin, comme il exige une entente sérieuse du problème et par là le travail d'une pensée mûre et développée, il est bien la forme supérieure de la méthode des tâtonnements dont l'emploi conscient ne saurait être commun à l'humanité sans un degré suffisant de culture intellectuelle. Grâce à lui la méthode des tâtonnements est à même de résoudre bien des questions qu'elle aurait trouvées inaccessibles ou trop à la portée du hasard, pour des raisons citées plus haut.

Afin de se mieux l'expliquer, il est bon de comparer la méthode des tâtonnements à celle de l'expression d'un nombre dans d'autres nombres plus connue. La première ne voit dans les conditions et les données du problème que des matériaux dont elle se sert pour définir les traits distinctifs du nombre à trouver. Tout le temps que dure la solution, ces traits là et l'inconnue doivent être sans cesse présents à la mémoire de la personne qui résout le problème, l'inconnu se trouvant ainsi toujours au premier plan. Et la méthode parente aux procédés employés pour deviner ce qu'on appelle en société les énigmes, ne met entre le problème et l'énigme qu'une différence extérieure, c'est à dire quant au sujet des questions qu'ils traitent.

Dans la seconde méthode les conditions du problème font les moyens et les données en font les matériaux dont on se sert pour former directement le nombre à trouver. Dans le procès de la solution ce sont donc les données qui occupent

le premier plan et qui absorbent l'attention de la personne résolvante, au point que celle-ci n'en garde qu'une partie pour les conditions du problème. L'inconnu y est donc réduit à signifier seulement le but général et plus ou moins éloigné de tout le procès de la solution et que la poursuite des buts plus proches fait quelque peu oublier.

Des observations prises sur des calculateurs prodiges (INAUDI en France, JEAN PÉTROFF en Russie) et qui n'ont point reçu d'instruction scolaire, prouvent qu'en résolvant les problèmes au moyen de la méthode des tâtonnements, ils s'en servent tout à fait inconsciemment. Cette conclusion, appliquée aux anciens calculateurs dont le degré de culture avait dû être analogue au leur, nous permet de comprendre bien des faits remarquables dans l'Histoire des mathématiques. Quels sont les traits dominants dans les oeuvres anciennes des mathématiques? C'est bien la valeur qui y est attachée à la vérification, c'est encore le mépris des explications et des démonstrations, c'est enfin le procédé dogmatique d'après lequel sont exposées les solutions des problèmes ainsi que les théorèmes elle-mêmes. En somme n'y avons-nous pas l'héritage direct de la méthode des tâtonnements primitivement employée?

Semblable à ses collègues de nos jours, le calculateur ancien ne s'en rapportait qu'à la vérification pour s'assurer lui-même et pour assurer les autres de la justesse de la solution qu'il avait trouvée, moyennant l'application inconsciente de la méthode des tâtonnements. Il était incapable d'aller plus loin. Toute solution d'un problème par la méthode des tâtonnements est donc facilement reconnu dans l'ancienne littérature mathématique à ces deux traits intimement liés l'un à l'autre: 1° la solution cherchée, sans calculs, ni notes qui l'accompagnassent, est indiquée immédiatement après l'exposition du problème dont 2° une vérification détaillée suit aussitôt. Le Papyrus de Rhind nous présente ces traits au complet dans les tables de la division du nombre 2 par les impairs de 3 à 99 (les huit tables premières de l'édition EISENLOHR) et dans le partage d'un nombre de pain donné entre 10 personnes (Ib. N°s 1—6). On les remarque avec moins d'évidence dans les problèmes portant chez EISENLOHR les N°s 28, 40 et 64. Dans tous ces cas on peut envisager les solutions des questions comme obtenues à l'aide de la méthode des tâtonnements, dont l'application inconsciente en même temps que l'emploi général se trouvent peut-être le mieux exprimés en ces termes: »que le hasard te guide» (mache wie geschieht, *art ma χeper*).

La méthode servant à exprimer un nombre dans les autres ou, à proprement parler, *celle de l'expression de l'inconnu par les données du problème,* est exclusivement appliquée à la solution des problèmes par la science de nos jours. Un coup d'oeil suffit pour nous démontrer que toutes les méthodes et procédés servant à résoudre les questions de l'arithmétique et de l'algèbre ont pour but général, soit l'expression de l'inconnu au moyen des données du problème, soit, dans des cas particuliers, la formule qui en trace la supputation d'après ces données. La dite expression ou la formule une fois trouvée, le problème est regardé comme résolu, et cela indépendamment des calculs qu'il exige, c'est à dire malgré qu'ils aient eu lieu ou non et, le cas échéant, sans tenir compte s'ils ont été faits petit à petit, comme la formule, ou à la fois, après que la formation s'en fut achevée. De cette manière tous les procédés et méthodes, appliqués à la solution des questions dans l'arithmétique comme dans l'algèbre et considérés par rapport à la méthode générale que nous examinons, n'en sont que des cas particuliers et des formes à part, développés à mesure que s'en effectuait l'adaption à mille particularités des questions diverses et des quantités que celles-ci avaient pour objet.

La méthode de l'expression d'un nombre dans les autres n'est peut être pas moins ancienne que celle des tâtonnements. C'est à elle que sont toujours soumis les problèmes aux conditions simples et peu nombreuses, démontrant clairement quel genre d'opérations il faut employer pour définir l'inconnu et amenant aux calculs immédiats. Il est même à croire que tout d'abord exclusivement appliquée aux problèmes les plus simples et par là les plus fréquents, cette méthode eut un emploi beaucoup plus étendu que celle des tâtonnements traitant ordinairement les questions plus difficiles et plus compliquées. Voyons un peu ce qui fait son grave avantage: c'est la précision complète, la limitation sévère des procès mêmes de la solution et c'est la certitude d'arriver au but. Ne fût-ce que d'une manière inconsciente au premier abord, cet avantage aura pu être reconnu et apprécié de bonne heure. En même temps la tendance d'en élargir l'application aura dû se développer en faisant entrer dans son domaine un grand nombre de questions auparavant soumises à la méthode des tâtonnements. Cette tendance eut des suites fort importantes, puisque c'est elle qui contribua dans le cours des siècles à la création de la science des mathématiques. En effet, pour en obtenir les buts plus proches et pour en arriver aux plus éloignés il fallait accumuler autant

que possible les connaissances mathématiques. C'en était là une condition indispensable. Or, on ne pouvait y satisfaire qu'en étudiant les opérations sur les nombres et sur les propriétés de ces derniers, enfin en étudiant les expressions qu'ils composent et les quantités d'un nouveau genre qu'ils nous présentent.

Quoique indirectement la tendance en question a dû influer sur la méthode des tâtonnements. Celle-ci, ne pouvant réaliser ses buts ni immédiatement, ni rapidement, a dû travailler elle-même à rendre le procès de la solution plus déterminé et par là contribuer puissamment au progrès de son cas particulier et supérieur cité plus haut. Quant au besoin d'accumuler les connaissances mathématiques, à mesure que les questions soumises à la méthode de l'expression de l'inconnu par les données du problème, deviennent plus difficiles et plus compliqués, ce besoin que nous venons d'énoncer met entre les deux méthodes une grave et nouvelle différence. Les personnes étrangères à l'étude et privées de connaissances scientifiques ne sauraient se servir de la première que dans les cas les plus simples de son application. Au contraire ces mêmes personnes peuvent user si largement de la seconde (celle des tâtonnements) que l'habitude inconsciente d'un emploi prolongé en excite l'admiration et la surprise du public savant, auquel l'usage continuel de la première a fait oublier jusqu'à l'existence de la seconde.

Pour ce qui concerne l'universalité de l'application il est difficile d'établir quelque différence entre les deux méthodes. Des cas particuliers de la première sont les seuls qui soient limités dans leur application. La méthode elle-même dans toute la variété de ses cas et de ses formes particulières ne saurait en aucune façon être moins universelle que celle des tâtonnements. Et si elle le fut naguère dans son emploi pratique, ainsi qu'on le supposerait pour les époques préscientifiques et alors que les deux méthodes étaient en vogue, elle ne le fut qu'à défaut des moyens dont elle eût pu disposer et par là à cause de son peu de développement.

[1] Nous appelons cette série indéterminée et infinie la trouvant telle non seulement dans son extension des deux côtés, mais encore dans tout intervalle entre deux de ses membres pris à volonté.

RECENSIONEN. — ANALYSES.

G. Wertheim. DIE ARITHMETIK DES ELIA MISRACHI. EIN BEITRAG ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATIK. Frankfurt a. M. 1893. 4°, 42 p.

Le grand rabbin ELIA MISRACHI à Constantinople (né vers 1455, mort en 1526), auquel on doit des commentaires, actuellement perdus, sur les *Elementa* et sur l'*Almagest*, a écrit aussi un traité d'arithmétique intitulé *Sefer-Hamispar* (livre des nombres) publié seulement en 1534 à Constantinople et réédité en 1546 à Bâle avec une traduction latine par S. MÜNSTER. Il y a environ 30 années, M. STEINSCHNEIDER a appelé l'attention sur ce traité, et il en a publié quelques extraits. Dans l'écrit indiqué ci-dessus, M. WERTHEIM vient de donner une notice détaillée sur le *Sefer-Hamispar*, d'où il résulte que ce livre est assez intéressant au point de vue historique.

En composant son traité d'arithmétique, ELIA MISRACHI a utilisé en premier lieu un livre d'ABRAHAM IBN ESRA, portant aussi le titre *Sefer-Hamispar*, mais il a tiré profit en même temps des ouvrages des mathématiciens grecs et arabes. A l'avis de M. WERTHEIM, il n'est pas un simple compilateur, car il a choisi habilement ses matériaux, et il les a traités avec beaucoup de talent.

Le *Sefer-Hamispar* d'ELIA MISRACHI est divisé en trois parties, dont la première rend compte des quatre opérations fondamentales pour des nombres entiers, fractionnaires et mixtes; la seconde s'occupe des fractions sexagésimales, de l'extraction des racines carrées et cubiques, ainsi que des proportions arithmétiques, géométriques et harmoniques. Enfin la troisième partie contient un recueil de problèmes avec leurs solutions. Plusieurs de ces problèmes sont empruntés par ELIA MISRACHI à d'autres auteurs, et M. WERTHEIM signale les écrits où il les a retrouvés; un des problèmes se rapporte aux nombres parfaits.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von || journal d'histoire des mathématiques publié par G. ENESTRÖM. Stockholm. 8°.
1894: 1.

Физико-математическія науки въ ихъ настоящемъ и прошедшемъ. Журналъ издаваемый В. В. Бобынинымъ. Москва. 8°.

2 (1886): 4. — Les sciences mathématiques dans leur état actuel et passé. Journal publié par V. V. Bobynin.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von M. Cantor. Leipzig. 8°.

39 (1894): 2.

БОБЫНИНЪ, В. В., Философія математики по ученію Гоёне Вронскаго.

Fiziko-matem. naouki **2** (1886), 1886—1894, A: 73—96, 271—288, 394—437. — Bobynin, V. V., La philosophie des mathématiques selon la doctrine de Hoëne Wronski.

БОБЫНИНЪ, В. В., Очерки исторіи расвитія фисико-математическихъ знаній въ Россіи. V. Землемѣріе.

Fiziko-matem. naouki **2** (1886), 1887—1894, A: 209—264, 289—348. — Bobynin, V. V., Esquisses d'histoire du développement des connaissances mathématiques et physiques en Russie. V. Arpentage.

°**Cajori, F.**, A history of mathematics. New York, Macmillan 1894.

8°, 14 + 422 p. — [3·50 doll.]

Collins, J. V., Plea for teaching the history of mathematics.

Science (New York) **23**, 1894, 44.

Curtze, M., Über den Josephus sapiens oder Hispanus Gerberts.

Biblioth. Mathem. 1894, 13—14.

Dickstein, S., Zur Geschichte der Mathematik im siebzehnten Jahrhundert.

Biblioth. Mathem. 1894, 24.

Dirichlet, G. P. L., Карлъ Густавъ Яковъ Якови. Біографическій очеркъ.

Fiziko-matem. naouki **2** (1886), 1887—1894, A: 265—270, 349—369. — Notice biographique sur K. G. J. Jacobi, traduite de l'allemand.

Günther, S., Das gläserlose Sehrohr im Altertum und Mittelalter.

Biblioth. Mathem. 1894, 15—23.

Heron d'Alexandrie, Les mécaniques ou l'élévateur publiées pour la première fois sur la version arabe de Qostâ ibn Lûqâ et traduites en français par Carra de Vaux. Paris 1894.

8°, (4) + 194 + (4) + 115 p. — Extrait du Journal Asiatique.

ПЕРГАМЕНТЪ, О., Исторія варометра и его примѣненій. 1643—1893.

Vjestnik elem. matem. **16**, 1894, 100—106, 127—131. — Pergament, O., Histoire du baromètre et de son usage.

Rebière, A., Les femmes dans la science. Conférence faite au cercle Saint-Simon le 24 février 1894. Paris, Nony 1894.

8°, 85 p. — [1·50 fr.] — Notices biographiques sur Hypatia, Emilie du Châtelet, Maria Agnesi, Sophie Germain, Mary Sommerville et Sophie Kowalevski.

Tannery, P., Sur un fragment inédit des Métriques de Héron d'Alexandrie.
Bullet. d. sc. mathém. **18**$_2$, 1894, 18—22.

Wittstein, A., Über die Wasseruhr und das Astrolabium des Arzachel.
Zeitschr. für Mathem. **39**, 1894; Hist. Abth. 41—55.

Vivanti, G., Note sur l'histoire de l'infiniment petit.
Biblioth. Mathem. 1894, 1—12.

Question 45 [sur l'histoire des 5 lunules carrables géométriquement].
Biblioth. Mathem. 1894, 32. (G. Eneström.)

On the question 23.
Biblioth. Mathem. 1894, 32. (W. W. Beman.)

Ball, W. W. R., An essay on Newton's Principia. London, Macmillan 1893. 8°.
Biblioth. Mathem. 1894, 26—27. (G. Eneström.) — Bullet. d. sc. mathém. **18**$_2$, 1894, 8—12. (P. Tannery.)

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Erster Band. Von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr. Zweite Auflage. Leipzig, Teubner 1894. 8°.
Biblioth. Mathem. 1894, 25—26. (G. Eneström.)

Descartes, R., Die Geometrie. Deutsch herausgegeben von L. Schlesinger. Berlin, Mayer & Müller 1894. 8°.
Biblioth. Mathem. 1894, 26. (G. Eneström.)

Galilei, G., Opere. Edizione nazionale sotto gli auspicii di sua maestà il re d'Italia. Volume II. Firenze 1891. 4°.
Bullet. d. sc. mathém. **16**$_2$, 1892, 257—263. (P. Tannery.)

Loria, G., L'odierno indirizzo e gli attuali problemi della storia delle scienze esatte. Relazione fatta al quinto congresso storico italiano addì 22 settembre 1892. Genova 1893. 8°.
Jornal de sc. matem. **9**, 1894, 191. (G. T.)

Loria, G., Le scienze esatte nell' antica Grecia. Libro I. I geometri greci precursori di Euclide. Modena 1893. 4°.
Bullet. d. sc. mathém. **18**$_2$, 1894, 5—8. (P. Tannery.) — Periodico di matem. **9**, 1894, 70—73. (A. Lugli.)

[Listes d'ouvrages récemment publiés.]
Biblioth. Mathem. 1894, 27—31. — Zeitschr. für Mathem. **39**, 1894; Hist. Abth. 79—80.

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

46. Parmi les éditions du traité d'arithmétique de Sacrobosco, M. Cantor (*Vorlesungen über Geschichte der Mathematik,* **2,** 1892, p. 50; cf. p. 349) signale une, publiée en 1510 à

Paris par JODOCUS CLICHTOVEUS (mort en 1543) sous le titre: *Opusculum de praxi numerorum quod Algorismum vocant.* D'un autre côté, M. K. HUNRATH (*Zum Verständnis des Wortes Algorismus;* Biblioth. Mathem. 1887, p. 70) a fait remarquer que cet *Opusculum* se trouve dans un recueil, publié à Paris en 1503 et réimprimé à la même ville en 1510, dont le premier écrit est *Epitome compendiosaque introductio in libros arithmeticos diui Severini Boetij;* l'*Opusculum* y figure comme appendice à JUDOCI CLICHTOUEI Neoportuensis *de praxi numerandi compendium.*

M. HUNRATH mentionne aussi (l. c. p. 70) que l'auteur de l'*Opusculum* dérive le mot Algorismus d'un certain *philosophus nomine Algorismus,* tandis que M. CANTOR (l. c. p. 81) dit que SACROBOSCO, dans son traité d'arithmétique, parle d'un philosophe nommé *Algus.* Dans un ouvrage antérieur (*Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker,* Halle 1863, p. 419), M. CANTOR cite un passage d'un manuscrit de la bibliothèque ducale de Darmstadt, lequel passage se trouve aussi à peu près littéralement dans l'*Opusculum,* sinon qu'*Algus* est mis à la place d'*Algorismus.*

On demande des réponses aux questions suivantes:

1) l'*Opusculum de praxi numerorum quod Algorismum vocant,* paru en 1503 et réimprimé en 1510, est-il édité par CLICHTOVEUS?
2) Ce même *Opusculum,* est-il identique avec le traité d'arithmétique composé par SACROBOSCO? Et, en ce cas, quel est le nom donné par SACROBOSCO au philosophe, auquel il attribue un écrit sur l'algorismus? Au cas contraire, quel est l'auteur de l'*Opusculum?* (G. Eneström.)

Inhalt. — Table des matières.

STOCKHOLM, TRYCKT I CENTRAL-TRYCKERIET, 1894.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK | JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES



HERAUSGEGEBEN VON | PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1894. STOCKHOLM. N° 3.

NEUE FOLGE. 8. | NOUVELLE SÉRIE. 8.

BERLIN. MAYER & MÜLLER. Markgrafenstrasse 51.

Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr.

PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Sur la part de Jean Bernoulli dans la publication de l'»Analyse des infiniment petits».

Par G. ENESTRÖM à Stockholm.

Dans la préface à son *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (Paris 1696), le marquis de L'HÔPITAL a inséré le passage suivant: »Je reconnais devoir beaucoup aux lumières de MM. BERNOULLI, surtout à celles du jeune, présentement professeur à Groningue. Je me suis servi sans façon de leurs découvertes et de celles de M. LEIBNIS. C'est pourquoi je consens qu'ils en revendiquent tout ce qu'il leur plaira, me contentant de ce qu'ils voudront bien me laisser».

Cette mention générale a donné lieu à des réclamations de la part de JEAN BERNOULLI. En effet, on sait que, dans quelques écrits parus après la mort du marquis de L'HÔPITAL, il soutenait qu'il était le vrai auteur de presque tout ce qui se trouve dans l'*Analyse des infiniment petits;* il en est même venu jusqu'à vouloir faire du marquis de L'HÔPITAL un plagiaire.[1] Parmi les historiens, quelques-uns se sont mis du côté de JEAN BERNOULLI,[2] tandis que d'autres ont pris le parti du marquis de L'HÔPITAL.[3]

Dans ces circonstances, il doit être d'un certain intérêt de connaître si L'HÔPITAL a publié son ouvrage à l'insu de JEAN BERNOULLI, et quel a été le jugement que ce dernier a porté

5

directement au premier sur l'*Analyse des infiniment petits*. Dans ce qui suit, je me propose de donner sur ces deux points des renseignements, tirés de la correspondance de Jean Bernoulli avec l'Hôpital. Comme on sait, cette correspondance est gardée dans la bibliothèque de l'académie des sciences de Stockholm; elle est composée de 62 lettres adressées par le marquis ou la marquise de l'Hôpital à Jean Bernoulli, et de 25 copies de lettres adressées par Jean Bernoulli au marquis de l'Hôpital.[4] Le dernier nombre indique que Jean Bernoulli avait omis de copier plus de la moitié de ses lettres.

La première lettre où le marquis de l'Hôpital fait mention de l'*Analyse des infiniment petits* est du 22 août 1695. Il y écrit:

> Je suis sur le point de faire imprimer mon traité des sections coniques, en étant persécuté par le père Malebranche et quelques-uns de ses amis. J'y joindrai un petit traité du calcul différentiel, où je vous rendrai toute la justice que vous méritez. Je n'y parlerai point du tout du calcul intégral, laissant cela à Mr. Leibniz, qui a dessein d'en faire un traité, comme vous savez, sous le titre de *Scientia infiniti,* de sorte que ceci ne sera proprement qu'une introduction au sien. Si vous vouliez mettre par ordre vos règles du calcul logarithmique, que vous avez inventées il y a déjà quelque temps, je les joindrais à la fin sous votre nom, comme vous jugez bien, et cela contribuerait à faire trouver ce traité meilleur. Vous en userez comme vous jugerez à propos.

A cette demande Jean Bernoulli ne semble avoir répondu que le 4 janvier 1696.[5] Après avoir fait quelques remarques sur l'utilité d'un traité analytique des sections coniques, il ajoute:

> Je vous suis bien obligé de l'offre que vous me faites de joindre à la fin de votre traité mon nouveau calcul logarithmique ou plutôt parcourant — — —. Vous jugez bien que je ne suis présentement pas en état d'en mettre les règles par ordre, y ayant si longtemps que je n'y aie plus pensé. Cependant je pourrais bien vous envoyer (si vous le souhaitez) ce que j'en ai écrit à M. Leibnitz, qui a aussi trouvé quelque chose sur cette matière.

l'Hôpital n'insistait plus sur sa demande; il continua de faire imprimer son ouvrage, et le 15 juin 1696 il écrivit à Jean Bernoulli:

> Mon livre paraîtra au premier jour;[6] je n'y traite que du calcul différentiel que je tâche d'expliquer à fond, et mon but n'a été que de faire proprement une introduction à ce

que Mr. LEIBNIZ et autres pourront donner dans la suite. Je ne doute point que si vous vouliez en prendre la peine, vous ne nous donnassiez tout ce qu'on peut souhaiter sur le calcul intégral, et c'est à quoi on devrait vous exciter de travailler, car il me semble que Mr. LEIBNIZ a trop d'occupations pour pouvoir expliquer les choses comme il serait à souhaiter. Je voulais faire imprimer en même temps mes sections coniques, comme je vous avais marqué, parce que cela n'aurait fait qu'un juste volume, mais comme je n'ai point voulu m'appliquer depuis ma maladie, cela fait que le premier traité paraîtra seul. Vous verrez que je vous y rends la justice qui vous est due, et il était inutile que vous me marquassiez de vous en envoyer, car vous jugez bien que vous êtes la première personne à qui j'en destine.

La réponse de JEAN BERNOULLI datée le 30 juin 1696 était extrêmement obligeante; la voici:

Il faut que je vous félicite, Monsieur, de ce que votre livre a commencé de paraître — — —. J'accepte avec grand remerciement l'offre que vous me faites d'un exemplaire. C'est votre civilité ordinaire, que vous ayez donné dans votre livre quelque place à mon nom; je vous en suis bien obligé. Je prévois par avance que ce livre, quand il sera connu dans le monde, vous procurera une grande reputation digne de votre illustre personne. Je crois aussi que Mr. LEIBNIZ nous laissera trop longtemps attendre son traité de *Scientia infiniti* pour être trop occupé. Vous pouvez bien vous imaginer la raison pourquoi je n'ai rien voulu donner au jour jusqu'à présent touchant cette matière; c'est que je n'ai rien voulu faire sans votre consentement suivant la promesse que je vous en avais donnée autrefois; mais voyant maintenant que vous m'y excitez vous-même; je pourrai peut-être bien prendre le dessein de faire la continuation là où vous avez fini, en expliquant le calcul intégral, pourvu que j'en aie le loisir.

Au moment où JEAN BERNOULLI écrivit cette lettre, il n'avait pas encore, comme on voit, reçu son exemplaire de l'*Analyse des infiniment petits,* et il lui fallait l'attendre plus d'une demi-année. Voici quelques extraits de la correspondance entre JEAN BERNOULLI et L'HÔPITAL pendant ce temps.

L'HÔPITAL *à* JEAN BERNOULLI *le 10 septembre 1696.* Je suis ravi que vous vouliez bien nous donner l'explication du calcul intégral; il me semble que vous en sauriez mieux faire, et que ce livre sera très recherché; vous pourrez y supposer ce que j'ai expliqué du calcul différentiel dans le

mien que l'on pourra regarder comme une introduction au vôtre; je crois que vous ne devez point perdre de temps à y travailler, car la curiosité est fort excitée sur toutes ces matières.

l'Hôpital à Jean Bernoulli *le 30 novembre 1696.* Mandez-moi aussi si vous — — — ne travaillez pas à nous donner un traité sur toutes ces matières, ce qui serait assurément très curieux; mon livre ne devrait être considéré à cet égard que comme les éléments d'Euclide par rapport à la géométrie de Descartes. Il y a déjà quelques mois, j'en ai envoyé deux cent exemplaires à Mr. Leers avec ordre de vous en faire tenir un aussi tôt qu'il les aurait reçus.

Jean Bernoulli à l'Hôpital *le 21 décembre 1696.* Mr. Leibnitz et Menckenius ont reçu les exemplaires de votre livre que vous leur avez envoyés. — — — Je suis impatient de recevoir le mien, je ne sais à quoi il tient qu'on ne me l'envoie pas — — —. Vous me demandez, si je ne travaille pas à donner un traité sur toutes ces matières, mais pour dire la vérité, je ne sais quand cela se fera, étant trop distrait par des embarras domestiques.

Enfin, vers le commencement de l'année 1697, Jean Bernoulli reçut l'exemplaire de l'*Analyse des infiniment petits* que l'Hôpital lui avait annoncé. Après l'avoir étudié, il écrivit:

J'ai reçu enfin un exemplaire de votre livre; je vous en remercie très humblement. Vous m'avez fait trop d'honneur en parlant si avantageusement de moi dans la préface; quand je composerai quelque chose, à mon tour je ne manquerai pas de vous y donner la revanche. Vous expliquez les choses fort intelligiblement; j'y trouve aussi un bel ordre et les propositions bien rangées; enfin tout est admirablement bien fait, et mille fois mieux que je n'aurais pu faire; enfin je n'y désire rien si non que vous n'avez pas mis votre nom à la tête du livre, ce qui lui aurait donné plus d'autorité à notre nouvelle méthode, outre que le livre serait sans doute recherché avec plus de désir. Il faut que je vous dise encore un mot avec votre permission; vous me paraissez un peu trop libéral à faire des reconnaissances à mon frère, comme si vous vous étiez servi de ses découvertes, et cependant je n'ai rien remarqué jusqu'ici dans votre livre, que mon frère se pourrait attribuer avec justice.

Dans la correspondance suivante entre Jean Bernoulli et l'Hôpital, je n'ai trouvé aucun passage se rapportant à l'*Analyse des infiniment petits.*

Il s'ensuit des extraits précédents que JEAN BERNOULLI:

1) connaissait d'avance l'intention qu'avait L'HÔPITAL de publier l'*Analyse des infiniment petits;*
2) approuvait l'entreprise et jugeait L'HÔPITAL apte à s'en acquitter;
3) après avoir lu l'ouvrage, le trouva bien rédigé et n'adressa à l'auteur aucune réclamation directe.

Cela étant, comment peut-on expliquer que, plus tard, JEAN BERNOULLI s'est montré très mécontent de la mention générale dans la préface à l'*Analyse des infiniment petits?* A mon avis, une lettre que JEAN BERNOULLI adressa à VARIGNON[7] le 18 juillet 1705 peut donner quelques éclaircissements sur ce point.

Cette lettre était écrite à cause d'une petite note manuscrite de SAURIN que VARIGNON avait remise à JEAN BERNOULLI et où SAURIN revoquait en doute que JEAN BERNOULLI eût trouvé le premier par différentiation la valeur d'une fraction dont le numérateur et le dénominateur tendent en même temps vers zéro;[8] de son côté, SAURIN voulait attribuer cette découverte à L'HÔPITAL.[9] On voit par un passage de la lettre, que JEAN BERNOULLI soupçonnait L'HÔPITAL d'avoir inspiré à SAURIN en 1702, ou peut-être plus tôt, cette doute.[10] Il est donc naturel de penser, que JEAN BERNOULLI a soupçonné L'HÔPITAL de s'être attribué à tort aussi quelques autres des règles publiées dans l'*Analyse des infiniment petits.* Ce soupçon doit avoir mis JEAN BERNOULLI en fureur, et ainsi il a été induit à revendiquer tout ce qu'il y a de plus important dans l'ouvrage de L'HÔPITAL. En effet, il écrit à VARIGNON dans la lettre citée:

> M. le M. de L'HÔPITAL — — — ne devait-il pas se contenter de ce que je lui laissais l'honneur de la publication de l'*Analyse des infiniment petits* sans informer le public que j'en avais fourni les matériaux, comme j'aurais pu faire de bon droit; car je le puis prouver par des lettres du feu M. le marquis de L'HÔPITAL, que je publierai s'il est nécessaire, par lesquelles on verra qu'il n'a pas eu plus de part à son livre que Mr. BARTHOLIN en avait aux *Principia matheseos universalis,* qu'il a donnés au jour, mais qu'il avoue ingénument appartenir à Mr. SCHOOTEN; au lieu que Mr le marq. de L'HÔPITAL fait dans sa préface une mention de moi, quoique en verité honorable, mais toujours d'une manière si générale et si vague, qu'on n'en peut pas juger que je suis l'auteur de la plupart des règles, que je lui avais fournie par écrit, et qu'il n'avait fait autres choses que les digérer et mettre en ordre; et c'est apparemment là la raison pour.

quoi il a cité avec moi encore quelques autres, des *lumières* desquelles il doit avoir profité, pour faire accroire, que le profit qu'il a eu de moi n'est point autre que celui qu'on a des livres des auteurs, par la lecture desquels on trouve l'occasion de faire quelques nouvelles découvertes, en sorte que cette citation me fait plus de tort que de bien. Mr. Saurin n'a donc pas raison de me reprocher que M. de l'Hôpital en a si bien usé avec moi par rapport à l'ouvrage même dont il est question, ni l'affection dont un illustre ami m'a honorée, car cette affection était assez froide quelques années devant sa mort, c'est à dire d'abord après la publication de son livre, lorsqu'il a cru n'avoir plus besoin de mon secours;[11] et si avant ce temps-là il m'a fait quelques douceurs, je suis en état de les rendre, et ce n'est pas grand' choses par rapport aux services réels que je lui ai faits.

Je me permets d'ajouter que, deux ans plus tard, l'éloge de l'Hôpital par Fontenelle[12] donnait sujet à Jean Bernoulli de revenir encore une fois, dans sa correspondance avec Varignon, à l'*Analyse des infiniment petits*. »Si l'on veut parler franchement», dit-il dans sa lettre du 26 février 1707, »Mr. de l'Hôpital n'a pas eu plus de part à la production de ce livre que d'avoir traduit en français la matière que je lui avais donnée la plupart en latin». A cette remarque Varignon répondit avec raison: »Je vous avoue que je suis tombé des nues en lisant — — — que le livre de *L'analyse des infiniment petits* ne contenait que les leçons que vous aviez données à ce marquis, qui les avait seulement traduites en français», et demanda en même temps pourquoi Jean Bernoulli n'en avait pas fait mention avant la mort de l'Hôpital. A cette demande Jean Bernoulli répondit qu'il ne l'avait pas fait, parce que l'Hôpital ne s'était jamais »émancipé à s'arroger les inventions d'autrui». A mon avis, il aurait pu dire avec plus de raison qu'il ne l'avait pas fait parce que cette idée ne lui était pas entrée dans l'esprit avant la mort de l'Hôpital.

[1] Comparez Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* **3** (Leipzig 1894), p. 215.

[2] Voir p. ex. Montucla, *Histoire des mathématiques* **2** (Paris 1758), p. 359.

[3] Voir p. ex. Bossut, *Histoire générale des mathématiques* **2** (Paris 1810), p. 51—52. Cantor, l. c., p. 215—217, 237—241.

[4] Voir Eneström, *Notice sur la correspondance de Jean Ier Ber-*

noulli. Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **12**, 1879, 313—314.

[5] La copie de JEAN BERNOULLI porte la date: »*10* janvier 1696», mais dans sa lettre du 1 février 1696, L'HÔPITAL accuse la reception de la lettre du *4* janvier 1696.

[6] Dans une lettre adressée à JEAN BERNOULLI le 28 juin 1696, VARIGNON indique que l'impression de l'*Analyse des infiniment petits* venait d'être terminée et que les exemplaires avaient été envoyés au relieur.

[7] La correspondance entre JEAN BERNOULLI et VARIGNON est gardée dans la bibliothèque de l'académie des sciences de Stockholm. Elle est composée de 163 lettres adressées par VARIGNON à JEAN BERNOULLI et 88 copies de lettres de JEAN BERNOULLI à VARIGNON. Comparez ENESTRÖM, l. c. p. 313.

[8] SAURIN avait publié dans le Journal des savants pour le 3 août 1702 un petit article dirigé contre ROLLE; dans cette article, en parlant de la règle indiquée à l'art. 163 de l'*Analyse des infiniment petits,* au moyen de laquelle on obtient la valeur limite d'une fraction dont les deux termes tendent en même temps vers zéro, SAURIN faisait entendre que cette règle avait été découverte par L'HÔPITAL. De son côté, JEAN BERNOULLI revendiquait la règle dans son mémoire: *Perfectio regulae suae pro determinando valore fractionis, cujus numerator et denominator certo casu evanescunt* inséré dans les Acta eruditorum 1704, p. 375—380; la note manuscrite de SAURIN, dont j'ai parlé dans le texte, était une réplique à ce mémoire.

[9] Dans ma note *Om upptäckten af sättet att medelst differentiation bestämma värdet af en bråkfunktion, då täljare och nämnare samtidigt blifva noll* (Öfversigt af Vetenskaps-Akademiens förhandlingar [Stockholm] **51**, 1894, 297—305), j'ai démontré que la règle dont il s'agit est due à JEAN BERNOULLI et non à L'HÔPITAL.

[10] Dans une lettre du 15 août 1702, VARIGNON écrivit à JEAN BERNOULLI que L'HÔPITAL avait »fait faire par un nommé Mr. SAURIN» une réponse à M. ROLLE. JEAN BERNOULLI, estimant que cette indication se rapportait à l'article signalé ci-dessus dans la note 8, en concluait, que L'HÔPITAL avait fourni à SAURIN les matériaux de cet article et l'avait approuvé.

[11] Il me semble que cette remarque de JEAN BERNOULLI ne soit pas parfaitement exacte. En effet, la bibliothèque de

l'académie des sciences de Stockholm possède 21 lettre adressées à Jean Bernoulli par l'Hôpital après la publication de l'*Analyse des infiniment petits.* Ces lettres ont les dates suivantes: 27 juillet 1696, 10 septembre 1696, 30 novembre 1696, 31 décembre 1696, 28 janvier 1697, 25 février 1697, 18 mars 1697, 3 juin 1697, 27 septembre 1697, 30 septembre 1697, 18 novembre 1697, 24 mars 1699, 16 février 1700, 28 juin 1700, 26 novembre 1700, 3 janvier 1701, 25 février 1701, 30 juin 1701, 17 mars 1702, 15 septembre 1702, 27 février 1703. Autant que j'ai pu trouver, ces lettres ne prouvent aucunement de l'»affection assez froide» de la part de l'Hôpital. Après la publication de l'ouvrage posthume: *Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour la résolution des équations* (Paris 1707), la marquise de l'Hôpital en envoya à Jean Bernoulli un exemplaire, et dans sa lettre du 15 décembre 1707 elle parlait de la liaison intime qui avait toujours existé entre son mari et Jean Bernoulli.

12 Voir Histoire de l'académie royale des sciences [de Paris] 1704, p. 125—136.

Intorno ad alcune edizioni dell' »Algorismus» del Sacrobosco.

Nota di P. RICCARDI in Modena.

I.

Non presumo e non intendo di risolvere il quesito **46** proposto a pag. 63 della Bibliotheca Mathematica 1894, non potendo consultare per gli opportuni confronti, i mss. del trattato *De algorismo* attribuito al SACROBOSCO; mentre d'altra parte la questione è collegata a quella dell' autenticità di quel Trattato (cfr. DE MORGAN, *Arithmetical books* [1847] pp. XIX e 13). Mi limito perciò a chiarire di qualche poco la questione con la descrizione ed il confronto fra la miscellanea del 1503, della quale già diedi ragguaglio nella mia *Biblioteca matematica italiana* (par. I, vol. I, col. 142—143), la edizione forse prima (1501) dell' Algorismo attribuito al SACROBOSCO, e la ripubblicazione che ne fece l'HALLIWELL nel 1841.

Il volume miscellaneo sopracitato si compone di cxij carte numerate, costituite da fogli riuniti in quaderni di 8 pagine, con le segnature aiiij—oiiij; ed è impresso in caratteri tondi su buona carta avente per marca di fabbrica una stella ad otto raggi. Le carte 12ª, 19ª, 25ª, 28ª, 31ª e 32ª sono per errore segnate rispettivamente con i ni xiij, xx, xxxiij, xxvij, xxxix e xxxi.

La prima carta (*recto*) contiene il seguente titolo:

In hoc libro contenta.

Epitome compendiosaque introductio in libros | Arithmeticos diui SEVERINI BOETHIJ: *adiecto fa- | miliari commentario dilucidata.*

Praxis numerandi certis quibusdam regulis | constricta.

Introductio in Geometriam breuiusculis an- | notationibus explanata, sex libris distincta.

Primus de magnitudinibus et earum circumstan- | tiis.

Secundus de consequentibus, contiguis et continuis.

Tertius de punctis.

Quartus de lineis.

Quintus de superficiebus.

Sextus de corporibus.

Liber de quadratura circuli.

Liber de cubicatione sphere.

perspectiua introductio.

Insuper Astronomicon.

Nel *verso* della 1ª car. e di seguito nel *recto* della 2ª, trovansi due lettere; l'una intitolata:

Iacobus Faber Stapulensis Magnifico domino Ioanni Stephano | Ferrerio designato Episcopo Versellensi studiorum amantissimo.

L'altra:

Iodocus Clichtoueus Neoportuensis Ioanni Molinari | bonarum litterarum studiis deditissimo.

Nella car. 2ª (*verso*) comincia:

©Iacobi Fabri *Stapulensis Epitome in duos libros Arithmeticos* | *diui* Severini Boethij *ad Magnificum dominum* Ioannem Stephanum | *Ferrerium Episcopum Versellensem.*

Questa *Epitome* termina nel *verso* della 32ª carta segnata per errore col nº xxxi. Il testo della *Epitome* è intercalato dalle annotazioni e commenti di Clichtoueus. Segue l'opuscolo:

©Iudoci Clichtouei *Neoportuensis de praxi numerandi compendium,*

al quale titolo è premessa l'altra lettera:

Iudocus Clichtoueus Neoportuensis Philippo preposito | in philosophie studio commilitoni.

In questa lettera si legge (lin. 23—27):

»... subnectitur in calcem libellus (quem vulgo Algorismum dicunt) de numera | tionis generibus non inscite (nescio quo auctore) compositus, et ob subiecte mate | rie affinitatem ceteris adiectus. ...»

Terminando infatto l'opuscolo *de praxi numerandi* nel *verso* della xliiij car., comincia nella successiva il suindicato scritto intitolato:

Opusculum de praxi numerorum quod Algorismum vocant.

E termina nel *recto* della car. xlviij.

Nel principio di questo opuscolo (car. xlv, lin. 4—6) leggesi:

»... Hanc igitur scientiam numerandi compendiosam philosophus edidit no | mine Algorismus: vnde et Algorismus nuncupant: vel ars numerandi, vel ars introducto | ria in numerum ...»

Sembrami perciò che per quanto concerne la edizione del 1503, si possa affermativamente rispondere alla prima domanda, cioè che l'*Opusculum de praxi numerorum quod Algorismum vocant* fu pubblicato da Clichtoveus.

A completare la descrizione della edizione del 1503, indico gli altri opuscoli di seguito contenuti in questa miscellanea, sebbene estranei alla questione.

Da car. l *recto* a car. lxxxiv *verso*, e preceduto da lettera dedicatoria (car. xlix) si legge: CAROLI BOUILLI *Samarobrini Geometrici introductorij liber primus.*

(Seg. *secundus, tertius, quartus, quintus, sextus,* come nel titolo.)

Da car. lxxxv *recto* a car. lxxxvij *verso:* CAROLI BOUILLI *Samarobrini | liber de circuli quadratura.*

Da car. lxxxvij *verso* a car. lxxxix *verso:* CAROLI BOUILLI *Samarobrini | liber cubicationis sphere.*

Da car. xc *recto* a car. xcv *verso:* CAROLI BOUILLI *Samarobrini introductio | in scientiam perspectiuam.*

Car. xcvi *recto:* »Errata etc.«

Car. xcvij *recto:* IACOBUS STAPULENSIS *spectabili viro* GERMANO | GANAIENSI, *consiliario regio, decano bellouacensi.*

Da car. xcvij *verso* a car. cxi *verso:* IACOBI FABRI STAPULENSIS *Astronomici | theorici corporum celestium Liber primus* (seg. II).

Ed in calce alla cxi car. *verso* trovansi le note tipografiche:

Id opus impresserunt Volphgangus | hopilius et Henricus Stephanus | ea in arte socii in Almo pari- | siorum studio Anno Chri- | sti Celorum totiusque | nature conditoris. | 1503. Die vice | sima septi- | ma Iu- | nij.

Seguono nell' ultima car. cxij *recto: Recognita ex commentario Epitomes Arithmetice et praxi numerandi. | Recognita ex Astronomito.*

La edizione del 1510 di questa miscellanea venne pure indicata nella mia *Biblioteca matematica italiana* (l. c.) sulla fede del MURHARD (*Bibliotheca mathematica,* vol. I, p. 160). Il titolo appare identico a quello della edizione del 1503, ed uguale pure il numero delle carte, registrate in foglio, contenenti gli scritti aritmetici. Le note tipografiche quali vengono riportate dal MURHARD, sono le seguenti: »Absolutum in almo Parisiorum studio, anno Domini, qui numero definivit omnia. 1503. Et emissum ex officina Henrici Stephani. Anno Christi salvatoris omnium. 1510. decimaquinta die Martis«.

Parmi quindi che questa edizione non sia che una riproduzione della prima; se pure, come il senso delle suriportate note di stampa mi fa dubitare, questa pretesa seconda edizione del 1510, non sia costituita che da esemplari della precedente edizione del 1503, con la ristampa del foglio contenente le note tipografiche.

II.

La prima edizione che mi fu possibile rinvenire del trattatello *De arte numerandi,* attribuito al Sacrobosco, è di Venezia, con la data del 1501. Ne do la descrizione sull' esemplare unico posseduto dalla Biblioteca nazionale di Firenze.

Il *recto* della 1ª carta contiene il seguente titolo:

Algorismus Domini Ioan- | nis De Sacro Busco | *Nouiter Impressum* (sic). | *Cum Gratia Et Priuilegio.*

E al disotto havvi uno stemma inciso in legno con Aquila fra le iniziali F. D.

Car 2ª *recto:*

> Incipit Algorismus Editus per Reuerendum dominum Ioan- | nem de sacro Busco ordinis predicatorum atque artium et sacre Theo- | logie Doctorem Excellentissimum etc.

Car. 8ª *recto,* lin. 11:

> Explicit Algorismus. | Impressum Venetiis per Bernardinum Venetum | De Vitalibus: Anno Domini m. ccccc. i. | Die Tertio Men. februarij.

Car. 8° *verso.* Prospetto di numerazione, che pare non farmi parte del Trattato *de Algorismo* di Sacrobosco.

Il *recto* della 9ª car. contiene il seguente titolo:

Computus Ecclesiasticus et astrono- | micus Editus a Magistro Ar- | naldo de villa Noua *No- | uiter Impressum.* | *Cum Gratia Et Priuilegio.*

E al disotto lo stesso stemma come nella 1ª car.

Comincia il testo a car. 10ª *recto* con le parole:

> ¶Incipit Computus a Magistro Arnaldo de villa Noua editus.

Termina il testo a car. 19 *recto,* seguendo nel *verso* un Prologo; ed in calce si legge:

> Impressum Venetiis per Bernardinum Venetum de Vitalibus. | Anno Dni. m. ccccc. i. Die. xvij. Men. Februarij.

Questo opuscolo si compone quindi di carte 19, registrate in 4° piccolo, senza numeri, ma con le segnature Aij—Bij corrispondenti al primo degli scritti contenutivi, ed Aij—Cij corrispondenti al secondo.

Nella breve prefazione premessa all' Algorismo del Sacrobosco si legge (car. 2ª, lin. 7ª):

> ... Hanc igitur | scientiam numerandi compendiosam philosophus nomine Algus | Edidit vnde et Algorismus nuncupant.

Mentre adunque nella miscellanea del 1503 si fa derivare il nome di algorismo da quello di un filosofo chiamato *Algorismus*, qui viene derivato dal nome di un filosofo *Algus*.

Una edizione di Venezia, del 1523, dell' Algorismo di Sacrobosco è citata dal De Morgan (*Arithmetical books*, London 1847, p. XIX e 13) il quale vi espone importanti osservazioni critico-storiche sull' autenticità di questo trattato attribuito al Sacrobosco. Non mi fu possibile il rinvenire alcun esemplare di questa edizione.

Del resto eccettuate la variante che concerne il nome di *Algus* e parecchie altre di minor conto, il trattatello intitolato *Algorismus* inserito in questo opuscolo, ed attribuito al Sacrobosco non è che quello inserito col titolo *De praxi numerorum* nella sudescritta edizione di Parigi del 1503, attribuito dal Clichtoveus ad ignoto autore.

L'Halliwell, cui sembra che fossero sconosciute queste edizioni, ne pubblicò il testo col titolo: Ioannis de Sacro-Bosco *tractatus de arte numerandi* e lo inserì nel prezioso suo libretto, che mi fu concesso di esaminare per cortesia dell' illustre collega ed amico Prof. Favaro, ed intitolato:

Rara Mathematica, or a collection of Treatises on the mathematics and subiects connected with them. From ancient inedited Manuscripts. Edited by J. O. Halliwell (London 1841, in 8°).

Nella prefazione si legge:

»1. Iohannes de Sacro-Bosco *de Arithmetica*. Often occurs in Mss. without his name; Mss. Harl. 3647, 3843, 4350; Bib. Reg. 12 C. xvii; Arund. 343; Cott. Cleop. B. vi. f. 234; Publ. Cantab. I i, I. 15 (1692). An English translation — Ashm. 396. The present text is taken from a manuscript formerly in the Library of the Abbate Canonici of Venice.»

Il trattatello attribuito al Sacrobosco occupa le pagine da 1 a 26 del detto libretto.

Vi si legge a car. 1, nella introduzione il solito periodo:

». . . Hanc igitur scientiam numerandi | compendiosam edidit philosophus nomine Algus | unde algorismus nuncupatur, vel ars numerandi, | vel introductio in numerum . . .»

Al nome *Algus* l'Halliwell appone la seguente nota:

Rex quondam Castelliae. »Iohannis Norfolk *progressionis summula*, M. S. Harl. Mus. Brit. 3742.« Cum haec scientia de numeris quae algorismus ab inventore vel ab Algo, quae est inductio et rismus, quæ est numerus, quasi inductio

in numeros appellatur. — »*Tractatus de Algorismo*, Ms. Arundel. M. B. 332, fol. 68. Vid. Pref. a: »Oeuvre tresubtille et profitable de Arithmetique et Geom.» 4°, Par. 1515. sig. B. 2.

Avvertasi che la detta introduzione comincia con le parole: »Omnia quæ a primæva rerum origine processerunt ratione numerorum formata sunt.» Il capo II (Lib. I) dell' Aritmetica di BOEZIO (Venetiis 1499; Parisiis 1521; Basileae 1546, in fol.) comincia analogamente con le parole: »Omnia quæcunque a primæva rerum natura constructa sunt, numerorum videntur ratione formata.» Sembra pertanto doversi accertare che a SACROBOSCO non era sconosciuta l'aritmetica di BOEZIO.

Da quanto ho esposto parmi si possa per ora affermare in risposta alla 2ª parte del quesito:

a) che l'*Opusculum de praxi numerorum quod Algorismum vocant*, stampato nel 1503 e ripubblicato nel 1510, è lo stesso, eccettuate alcune varianti, di quello pubblicato nel 1501 con il titolo *Algorismus Domini* IOANNES DE SACRO-BUSCO; e di quello edito nel 1841 dall' HALLIWELL col titolo IOANNIS DE SACRO-BOSCO *tractatus de Arte numerandi*.

b) che in queste due edizioni (1501 e 1841) si fa derivare il nome di *Algorismus* da quello di un filosofo *Algus*, mentre che nell' *Opusculum* del 1503 viene derivato dal nome di un filosofo chiamato *Algorismus*.

Malgrado però che il DE MORGAN (l. c.) abbia attenuato il valore degli argomenti addotti dal Dr. PEACOCK per dimostrare apocrifo il trattato *de Algorismo* attribuito al SACROBOSCO, rimane tuttavia il grave dubbio se la numerazione e la calcolazione arabica, di cui si fa uso nel detto trattato (solo a quella epoca fatta conoscere primamente in Italia da LEONARDO PISANO), potesse essere pervenuta a notizia del SACROBOSCO.

Die Mathematik bei den Juden.

Von MORITZ STEINSCHNEIDER in Berlin.

10. Wiederum zieht ein Bestandteil einer sicher pseudepigraphischen Schrift unsere Aufmerksamkeit auf sich, und fordert die historische Kritik gegen blinden Autoritätsglauben und luftige Hypothesenbehauptung heraus. Der Schwerpunkt der Untersuchung fällt in ein Gebiet, dessen Kenntniss hier weder vorausgesetzt noch vermittelt werden kann. Wir müssen uns daher auf einige Andeutungen beschränken, welche für die Beurteilung des uns speciell interessirenden Materials unerlässlich sind.

Unter der Bezeichnung: *Perakim* (oder *Pirke*, d. h. Kapitel), auch *Baraita* des Rabbi ELIESER ist ein, wahrscheinlich unvollendetes hebräisches Büchlein in 54 Kapiteln oft (meist in quarto) gedruckt worden,[1] zuerst in Constantinopel 1514,[2] in neuerer Zeit mit Commentaren von A. A. BRODA und W. EINHORN (beide in Wilna 1838), von DAVID LORIA (Warschau 1852), dessen Gelehrsamkeit durch jüngere kabbalistische phantastische Voraussetzungen vom kritisch historischen Boden weggeleitet wird. Ich citire die leicht zugängliche Ed. Amst. 1698 in 8°. Eine kritische Ausgabe mit Benutzung von mss., worin auch der Nachweis des hohen Altertums geliefert werden sollte, beschäftigte seit vielen Jahren Herrn I. CH. HOROWITZ in Frankfurt a/M. (jetzt Buchhändler); er ist aber in allerlei Vor- und Nebenstudien stecken geblieben.

Der, auf dem Titel genannte ELIESER soll, nach den einleitenden Kapp. 1 u. 2, der Sohn des HYRKANOS, also ein berühmter Gelehrter des 2. Jahrh. sein! Diese Voraussetzung bedarf für einen unbefangenen Beurteiler keiner Widerlegung. Andere unkritische Hypothesen und Combinationen, wie z. B. die Identification der *Perakim* mit der »*Baraita* des SAMUEL« (oben § 8)[3] können hier füglich übergangen werden, da sie als beseitigt anzusehen sind.

Die wichtige Frage nach der *Zeit* der Schlussredaction des Buches wird wohl kaum genau und entscheidend zu beantworten sein. S. L. RAPAPORT (Kerem Chemed VII, 17) zieht aus einer Berechnung der Weltreiche in K. 28 und 48 den Schluss, dass das Buch (wenigstens die betreffenden Kapp.) kurz vor dem Jahre 781 abgefasst sei. CHWOLSOHN findet in K. 30 eine Anspielung auf die Gradmessung unter MA'AMUN. Das Buch ist in

seiner gegenwärtigen Gestalt jedenfalls in Westasien (Syrien oder Kleinasien) und nicht vor dem arabischen Einfluss redigirt.

Über den Charakter des eigentümlichen Buches entlehnen wir eine gekürzte Stelle dem klassischen Werke von ZUNZ.[4] Nach einer Einleitung, die von dem Studium und dem hohen Ruhme des ELIESER BEN HYRCANUS handelt (K. 1, 2), knüpft der Verf. seine Darstellungen an und verfolgt den Gang des Pentateuch in seinen wichtigsten historischen Momenten. 9 Kapitel (3—11) sind den Schöpfungstagen, 10 (12—21) dem ersten Menschen und 2 (22—23), dessen Nachkommen gewidmet. Kapitel 24 beschäftigt sich mit NOAH u. s. w., das 54. und letzte Kapitel bricht bei MIRJAM's Strafe ab.

11. Die Schöpfungsgeschichte giebt dem Verfasser Veranlassung zu allerlei, aus Legenden, Homilien und astrologischen Theorien bunt zusammengesetzten Bemerkungen. Bei einer so gelegentlichen Behandlung ist nicht ein zu Grunde liegendes System, und am allerwenigsten Originalität zu erwarten; eine directe Entlehnung aus griechisch-arabischen Quellen wird durch Parallelen des Inhalts kaum zu erweisen sein. Für die geognostische Anschauung mag der Anfang des 5. Kap. hervorgehoben sein, wonach die Erde am 3. Schöpfungstage »eine Ebene wie ein Thal» war, als durch die Zusammenziehung des die Oberfläche bedeckenden Wassers Höhen und Tiefen hervortraten. Im 6. und 7. Kap. knüpft sich an eine legendarische, vielleicht mit alter Mythologie zusammenhängende, Erzählung von der Schöpfung der »beiden Lichter» (Sonne und Mond) in ursprünglich gleicher Grösse, eine Belehrung über die Himmelskörper, welche alte phantastische Vorstellungen von der Construction des Himmels mit systematischen astrologischen Theorien verbindet.[5] Den Ausgangspunkt bildet die Planetenherrschaft. »Alle Sterne dienen den 7 Sternen der Stunden», nämlich Merkur, Mond, Saturn, Jupiter, Mars, Sonne, Venus — die vollständige Aufzählung mit den hebräischen, von da ab üblichen Namen, vielleicht hier zum ersten Male in der hebräischen Literatur. In den 7 Wochentagen herrschen je 2 Planeten; Sonntag: Merkur, Sonne; Montag: Jupiter, Mond; Dienstag: Venus, Mars; Mittwoch: Saturn, Merkur; Donnerstag: Sonne, Jupiter; Freitag: Mond, Venus; Sonnabend: Mars, Saturn; die Planeten, nach welchen die Wochentage benannt sind, kommen also hier erst in zweiter Stelle zur Herrschaft. Eine Aufzählung der Planeten bietet sich zunächst in Verbindung mit den Gliedern des Leibes,[6] in dem sogenannten »Buch der Schöpfung» (auf welches wir unter ISAK ISRAELI, zurückkommen), am Ende der 2. Recen-

sion, im Commentare des SAADIA (gest. 941) Kap. 7 (arab. ed. LAMBERT p. 100, französ. p. 119). Die Ordnung ist dort: Saturn Sonnabend (Mund), Jupiter Sonntag, Mars, Sonne, Venus, Merkur, Mond, entsprechend Montag bis Freitag. — Zur Beurteilung der anscheinenden Widersprüche zwischen der astronomischen (räumlichen) Anordnung der 7 Planeten[7] und ihrer astrologischen Herrschaft nach Stunden und Tagen, ist IDELER's Hinweisung auf die harmonische Bedeutung der »Quarte» wichtig.[8] Auch die Namen der 12 Sternbilder des Zodiak sind hier vollständig aufgezählt, wie wiederum im Buch der Schöpfung, und ihre »Herrschaft» im Jahre führt auf die grossen und kleinen Sonnencyklen von 28 und 4 Jahren.

Es kann nicht die Aufgabe unserer literarischen Übersicht sein, die sonderliche Himmelsconstruction mit ihren »Fenstern» und dergleichen, und die wenig geordneten, auf Sternenlauf gegründeten chronologischen Auseinandersetzungen im Einzelnen zu verfolgen. Dagegen ist es für die Geschichte der jüdischen Chronologie von Wichtigkeit zu constatiren, dass der Quatember (also die Dauer des Sonnenjahrs) noch in der alten Weise berechnet ist, welche man dem SAMUEL beilegt; die Hinzufügung von $^{73}/_{1080}$ Stunde, welche die Juden später als die geheime Quatemberrechnung des R. »ADA» bezeichnen, ist offenbar erst im 7. Kapitel aus einer Interpolation einer Stelle im Talmud dahingekommen.

Wir haben bei dieser astronomisch-astrologischen Einschaltung in ein homiletisches Buch länger verweilt, als seine eigene Bedeutung verdient hätte; es galt eben nachzuweisen, dass die Astrologie bei den Juden nicht an alte Traditionen knüpfen und hebräische Monographien hervorrufen konnte, vielmehr aus den Schulen der Araber auf die Juden überging und schon in namhaften arabischen Schriften derselben vertreten war, als sie sich in die theologischen hebräischen einschlich. Das ergiebt sich aus der Geschichte der jüdischen Literatur in den ersten Jahrhunderten nach Abschluss des babylonischen Talmuds.

12. Der Namen »ELIESER» führt uns auf eine irrtümliche Combination und eine noch nicht genügend beleuchtete Nachricht. Als ich im J. 1851 (Ha-Jona S. 17) zuerst die Aufmerksamkeit der Forscher darauf lenkte, war meine Quelle eine ziemlich späte, nämlich MAKRIZI (in DE SACY's Chrestomathie); ich habe dafür im J. 1878 eine ziemlich alte und wichtige Quelle gefunden, woraus auch MAKRIZI geschöpft haben könnte, nämlich den berühmten Chronologen AL-BIRUNI (um 1000).[9] Seine, von ED. SACHAU arabisch herausgegebene (Leipz. 1878)

und englisch übersetzte (London 1879) Chronologie orientalischer Völker enthält eine ausführliche Darstellung der jüdischen Chronologie, welche meines Wissens für die neuesten Forschungen auf diesem Gebiete noch nicht herangezogen ist. Ich erwähne z. B. die Angabe für das Sonnenjahr (S. 54) 365 Tage, 5 Stunden, $^{3791}/_{4104}$, ungefär 990 »Hulakim», das heisst $^{990}/_{1080}$. AL-BIRUNI hat schwerlich hebräische Quellen direct benutzen können, wahrscheinlich von gelehrten Juden sich unterrichten lassen.[10] Er berichtet, dass die Juden die Mondberechnung (anstatt der Wahrnehmung) eingeführt hätten, um eine Übereinstimmung in der Verbannung zu erzielen. Um diese Angelegenheit trug Sorge (*a'atana*) ELIESER BEN FARU'H; arabisch »ALJA'AZAR»; warum SACHAU, im Index S. 7, den Namen: ELIEZER BEN »PARUAH» schreibt, kann ich nicht erraten. Ein jüdischer Gelehrter dieses Namens ist aber sonst unbekannt; DE SACY und IDELER haben ohne allen sachlichen Grund an den Verfasser der *Perakim* (§§ 10, 11) gedacht; ich habe früher an den alten R. ELIESER gedacht, nach dessen Ausspruch die Welt im Monat Tischri erschaffen ist, weil diese Annahme der jüdischen Chronologie zu Grunde liegt. Bei AL-BIRUNI scheint eine so weit hergeholte Begründung nicht befriedigend zu sein; dazu kommt der unerklärte Namen »*ben Faru'h*» zu welchem kein hebräischer verwandter sich darbietet.

Dieser Namen hat mich auf eine andere Persönlichkeit geführt, welche wahrscheinlich in diese Periode und wohl nach Persien gehört. Es ist wieder ein Astrologe, der nur aus Citaten auszugraben war. In der Einleitung des KABI'SI (ALCABITIUS) und bei spätern daraus schöpfenden Astrologen erscheint ein corrumpirter Namen *Alezdegoz*, oder ähnlich entstellt.[11] Ich erkannte in ihm den von ABRAHAM IBN ESRA gerühmten jüdischen Astrologen: AL-ANDRUZAGAR BEN ZADI(?) FARUKH (oder FARRUKH?).[12] IBN ESRA scheint direct aus Schriften desselben, also in arabischer Sprache verfasst, geschöpft zu haben. Ältere Anführungen habe ich bis jetzt nicht auffinden können; es ist kein ausreichender Grund vorhanden, ihn mit ELIESER BEN FARU'H zu identificiren.

Hiermit enden meine Aufzeichnungen über jene dunkele Periode der ersten arabischen Monographien und der pseud-epigraphischen homiletischen hebräischen Literatur, die hieher gehörte.

Der nächste Abschnitt wird uns ganz bestimmte Gelehrte, Autoren und Schriften vorführen.

[1] Editionen sind verzeichnet in *Cat. Bodl.*, p. 633 und Add.; bei ZEDNER p. 221; BENJACOB, *Thesaurus*, p. 498 n. 1204.

[2] Nicht 1492, wie noch S. SACHS, *Carmina Salomonis b. Gabirol,* p. 81, angiebt.

[3] FILIPOWSKI, *Einleitung zu Abraham bar Chijja* (London 1851) p. XIII; s. ZUNZ, *Literaturgeschichte,* S. 605; mein *Polemische und apolog. Literatur,* S. 229 und im Index unter ELIESER S. 434.

[4] ZUNZ, *Gottesdienstliche Vorträge,* S. 271, oder S. 285 der Ausgabe 1892.

[5] Bemerkungen zu diesen Kapp. nebst Parallelen gab ich in der Zeitschrift ha-Jona [Die Taube] herausgeg. von S. SACHS, (Berlin 1851), S. 20 ff. J. FÜRST, Literaturblatt des Orient XII, 488 bezeichnet diese Arbeit als »durch Verworrenheit und Unselbständigkeit ganz wertlos», nachdem er den Inhalt derselben als eigene Weisheit vorgetragen hat.

[6] *Hebr. Übers.* S. 862, wo vom Zodiak in Bezug auf die Glieder, anders als bei BERTHELOT, *Introduction à l'étude de la chimie* (1889) p. 205. Die Angabe der Glieder, für uns hier gleichgültig, ist, mit Ausnahme des ersten, hier weggelassen.

[7] Diese bietet nur eine Differenz in Bezug auf Venus und Merkur, s. M. SACHS, *Relig. Poesie der Juden in Spanien,* S. 231, wo ein Artikel von LETRONNE, Jour. des savants 1840 [lies 1841] p. 538 citirt wird; s. auch den Commentar des SABBATAI DONNOLO zum Buche der Schöpfung, S. 59.

[8] Ha-Jona, l. c., p. 21; s. auch CHWOLSOHN, *die Ssabier* II, 174 [wo KABISI, der bekannte Astrolog, s. *Hebr. Übers.* S. 561]; BIOT, *Etudes sur l'astronomie indienne* (extr. du Journ. des savants 1859) p. 66 und 100; E. NARDUCCI, *Intorno ad alcuni passi d'antiche opere, relat. alle scienze fisiche* ecc. (ristamp. 1865) p. 8.

[9] SACHAU hat für seine Ausgaben und Übersetzungen eine im Orient vorkommende Aussprache *Alberuni* gewählt. Solche ungewöhnliche Umschreibung sollte möglichst vermieden werden; die Umschreibung orientalischer Namen bietet schon Schwierigkeiten genug.

[10] AL-BIRUNI's Nachrichten über die Juden in seinem Werke über Indien hat SCHREINER zusammengestellt.

[11] Zeitschr. d. deutschen morgenl. Gesellsch. **18**, 1864, 192; **24**, 1870, 383; **25**, 1871, 417.

[12] Vgl. »FARRUKHAN», Biblioth. Mathem. 1891, S. 67; s. auch Magazin für d. Wissensch. d. Judenth. III, 199; Monatsschrift für Gesch. u. Wissensch. d. Judenth. S. 497 (so lies in *Hebr. Übers.* S. 834 wie S. 531), wo ich auf *Zad-al-Farukh* oder *Zadan Farukh* bei NADIM im *Fihrist* hinweise.

Zur Frage über den Josephus sapiens.

Von H. SUTER in Zürich.

Die Vermuthungen, die Herr M. CURTZE (siehe Biblioth. Mathem. 1894, S. 13—14) über die Persönlichkeit des JOSEPHUS *sapiens* aufgestellt hat, können schwerlich richtig sein, und zwar aus folgenden Gründen:

1. Der im *Fihrist* genannte AR-Râzî heisst nicht JOSEPH, sondern trägt den Beinamen ABÛ JÛSUF (Vater des JOSEPH); daran, dass dieses *abû* von den Europäern einfach weggelassen worden sei, ist kaum zu denken.

2. AR-Râzî bedeutet: der aus Raj in Chorâzân gebürtige; Ja'KÛB BEN MUHAMMED war also ein Ostaraber, was allerdings nicht verhindern würde, dass er später nach Spanien ausgewandert sein könnte, was bei vielen ostarabischen Gelehrten der Fall war.

3. Über AR-Râzî habe ich bei dieser Gelegenheit noch etwas weiteres erfahren. Im Art. EUKLEIDES (*Fihrist*-Übersetzung, p. 17) wird gesagt »das zehnte Buch commentierte auch ABÛ JÛSUF AR-Râzî, und zwar vortrefflich im Auftrage von IBN AL-'AMÎD». Dieser ABÛ JÛSUF AR-Râzî ist nun wohl kein Andrer als der pg. 37 des *Fihrist* genannte JA'KÛB BEN MUHAMMED AR-Râzî mit dem Beinamen ABÛ JÛSUF; nun war IBN AL-'AMÎD, in dessen Auftrag ABÛ JÛSUF das 10. Buch des EUKLEIDES commentirt hat, nach FLÜGEL (*Fihrist* II, pg. 106, aus IBN CHALLIKÂN und And.) der Wezîr des Bujiden RUKN AD-DAULA und starb im Jahre 360 d. H. (970/971 n. Chr.); nun hat wohl kaum der Wezîr eines ostarabischen Fürsten einen in Spanien lebenden Gelehrten mit der Commentirung eines Buches beauftragt. — Ich bedaure, bei meiner *Fihrist*-Übersetzung diese Notiz FLÜGELS über IBN AL-'AMÎD übersehen zu haben.

Trotz meinen Nachforschungen über spanische Gelehrte der Araberzeit habe ich bis jetzt noch nichts Sicheres über einen JOSEPHUS *sapiens* ausfindig machen können.

Sur les découvertes mathématiques de Wronski.

Par S. DICKSTEIN à Warszawa.

8. La méthode suprême.

Nous allons faire connaître les traits principaux d'une méthode constituant, d'après son auteur, une méthode générale pour la »construction théorique« des fonctions analytiques (*Philosophie de la Technie,* I, p. 168 et suiv.).[48]

Dans le développement de la fonction $F(x)$ d'après la loi suprême:

$$F(x) = A_0 + A_1\Omega_1 + A_2\Omega_2 + \ldots$$

les fonctons $\Omega_1, \Omega_2, \ldots$ étant arbitraires, on peut prendre à volonté un nombre quelconque de ces fonctions de manière à satisfaire le mieux possible aux conditions du problème, duquel résulte la fonction $F(x)$, qu'il s'agit de connaître. Dans la méthode suprême on détermine ω de ces fonctions ($\omega = 1, 2, 3, \ldots$) $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_\omega$ de manière à satisfaire à l'équation différentielle

$$(1) \qquad \mathfrak{W}(d\Omega_1\, d^2\Omega_2\ \ldots\ d^\omega\Omega_\omega\, d^{\omega+1}F(x)) = 0;$$

quant aux fonctions suivantes

$$\Omega_{\omega+1}, \Omega_{\omega+2}, \ldots,$$

on les définit par la formule

$$\Omega_{\omega+\lambda} = \varphi(x)\varphi(x+\xi)\ \ldots\ \varphi(x+(\omega+\lambda-1)\xi). \quad (\lambda=1,2,\ldots)$$

La fonction $\varphi(x)$ étant ici arbitraire, on la prend telle que la série

$$A_{\omega+1}\Omega_{\omega+1} + A_{\omega+2}\Omega_{\omega+2} + \ldots$$

soit convergente et ait la plus petite valeur possible entre les limites que l'on aura fixées. En exprimant alors les coefficients du développement au moyen de la loi suprême, on aura pour les valeurs progressives de ω ($\omega = 1, 2, \ldots$) les degrés successifs de la »construction théorique« de la fonction $F(x)$, c'est à dire on aura des fonctions:

$$F_1(x), F_2(x), \ldots, F_\omega(x)$$

avec leurs séries complémentaires correspondantes:

$$S_1, S_2, \ldots, S_\omega;$$

et

$$F(x) = F_\omega(x) + S_\omega.$$

Les »progrès» $F_\omega(x)$ seront d'autant plus exacts qu'il y entre un plus grand nombre des fonctions génératrices et la série S_ω est plus proche de zéro.

Dans le cas où l'on donne aux fonctions $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_\omega$ les déterminations spéciales

$$\Omega_\lambda = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ \ldots\ (x-a_\lambda)}{(n_1+x)(n_2+x)\ \ldots\ (n_\lambda+x)},$$

ou plus simplement

$$\Omega_\lambda = \frac{(x-a)^\lambda}{(n_1+x)(n_2+x)\ \ldots\ (n_\lambda+x)} \qquad (\lambda=1,2,\ldots,\omega)$$

$n_1, n_2, \ldots, n_\lambda$ étant des paramètres que l'on détermine conformément à la condition (1), Wronski désigne sa méthode sous le nom de méthode »primordiale» (*Réforme des mathématiques* p. 266 et suiv.).

En appliquant à ce cas le procédé général indiqué et en prenant pour $\varphi(x)$ la fonction $\dfrac{x-a}{n+x}$, on obtiendra la génération théorique du degré ω sous la forme:

$$(2)\qquad \begin{aligned} F(x) &= F(a) + \frac{D_a F}{1} P_1 \cdot (x-a) + \frac{D_a^2 F}{1\cdot 2} P_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots \\ &\ldots + \frac{D_a^\omega F}{1\cdot 2\ \ldots\ \omega} P_\omega \cdot (x-a)^\omega + S_\omega . \end{aligned}$$

Cette représentation de la fonction $F(x)$ ne constitue pas une simple série procédant par rapport aux puissances de $(x-a)$, car les fonctions P, comme le montre le calcul (*Réforme des mathématiques*, p. 310), sont des fonctions de x et des dérivées de la fonction $F(x)$. Pour $\omega=1$ et $\omega=2$ on obtient[49]

$$F(x) = F(a) + D_a F \left| 1 + (x-a)\frac{D^2 F(x)}{2 D F(x)} \right| (x-a) + S_1 ,$$

$$\begin{aligned} F(x) = F(a) &+ D_a F \left| 1 + (x-a)^2 \frac{Z}{12 X} \right| (x-a) \\ &+ \frac{D_a^2 F}{1\cdot 2} \left| 1 + (x-a)\frac{Y}{2X} + (x-a)^2 \frac{Z}{12X} \right| (x-a)^2 + S_2 , \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} X &= 2 D_x^2 F \cdot D_x^3 F - 3 (D_x^2 F)^2 , \\ Y &= \ \ D_x F \cdot D_x^4 F - 2 D_x^2 F \cdot D_x^3 F , \\ Z &= 3 D_x^2 F \cdot D_x^4 F - 4 (D_x^3 F)^2 . \end{aligned}$$

Les séries complémentaires S_1, S_2 seront aussi déterminées par la loi suprême; on peut les construire d'après une formule générale donnée par WRONSKI (*Réforme des mathématiques*, p. 315).

Quand les fonctions sont définies par leurs différentielles ou dérivées, la méthode primordiale devient une méthode générale d'intégration;[50] la formule (2) donne alors l'expression de l'intégrale cherchée. Par exemple si l'on définit $\log x$ par l'équation $dF(x) = \frac{dx}{x}$, nos formules donneront les développements suivants:

$$\log x = \log a + \frac{(x+a)(x-a)}{2ax} - \frac{4}{1}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^3 + \frac{2}{5}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^5 + \frac{3}{7}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^7 + \ldots\right],$$

$$\log x = \log a + \frac{(x+a)(x-a)}{12a^2x^2}[8ax-(a^2+x^2)] + \frac{16}{3}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^5 + \frac{3}{7}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^7 + \frac{6}{9}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^9 + \ldots\right],$$

$$\log x = \log a + \frac{(x+a)(x-a)}{60a^3x^3}\left[(x-a)^4 + 5ax\{8ax-(a^2+x^2)\}\right] - \frac{32}{5}\left[\frac{1}{7}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^7 + \frac{4}{9}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^9 + \frac{10}{11}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^{11} + \ldots\right],$$

qui peuvent être utiles pour le calcul des logarithmes.[51]

[48] Conf. MONTFERRIER, *Encyclopédie mathématique*, III, p. 457 et suiv.; E. WEST, *Exposé des méthodes générales* etc., p. 260—264; S. DICKSTEIN, *O prawie najwyzszem* II. (Sur la loi suprême, II). Prace matematyczno-fizyczne, **5**, 1894, p. 123—145.

[49] Les formules pour le troisième progrès ont été calculées par M. DURUTTE et publiées dans l'ouvrage de WRONSKI: *Accomplissement de la réforme de la mécanique céleste* (Paris 1851), Supplement p. 63—66.

[50] Voir HANEGRAEFF, *Méthode générale d'intégration* (Paris 1856).

[51] Voir S. DICKSTEIN, *O szeregach logarytmowych Wronskiego* (Sur les séries logarithmiques de WRONSKI). Prace matematyczno-fizyczne **4**, 1893, p. 88—94.

RECENSIONEN. — ANALYSES.

Heron d'Alexandrie. Les mécaniques ou l'élévateur publiées pour la première fois sur la version arabe de Qostâ ibn Lûqâ et traduites en français par **Carra de Vaux.** Extrait du Journal asiatique. Paris 1894. 8°, (4) + 194 + (4) + 115 p.

Le célèbre orientaliste J. Golius (né en 1596, mort en 1667) ayant rapporté d'Orient un manuscrit contenant la traduction arabe de l'important traité des mécaniques (ou *Baroulkos*) de Heron, déposa ce manuscrit à la bibliothéque de Leiden, où il se trouve encore. Golius le traduisit aussi en latin, mais cette traduction semble être perdue (cf. Biblioth. Mathem. 1885, 199—200), à l'exception du commencement, qui a été publié en 1785 par Brugmans. Maintenant, M. Carra de Vaux en a fait une traduction française qu'il vient de publier avec la version arabe.

L'ouvrage de Heron est divisé en trois livres, dont le premier contient des notions préliminaires sur la mécanique, le second rend compte des cinq machines simples (le treuil, le levier, la moufle, le coin, la vis sans fin), et le troisième se rapporte à quelques machines composées, en particulier les machines pour élever des fardeaux ainsi que les presses.

La traduction est précédée par une introduction, où M. Carra de Vaux donne quelques renseignements intéressants sur l'ouvrage de Heron et sur le manuscrit de la version arabe. Il en résulte que ce manuscrit est le seul qu'on en connaisse, et que l'original grec est sans doute perdu.

Dans l'introduction, M. Carra de Vaux fait observer aussi que le traité des mécaniques de Heron »est l'un des traités les plus importants que nous offre l'antiquité dans la branche des sciences mathématiques à laquelle il appartient, et l'un de ceux qui, en raison de leur étendue et de la notoriété de leur auteur, peuvent le mieux nous renseigner sur le caractère et le développement de l'antique mécanique». D'un autre côté, on trouve dans ce même traité des passages ayant un intérêt aussi au point de vue de l'histoire des mathématiques pures. Voici p. ex. le contenu des numéros 9—19 du premier livre: »Etant donnée une ligne, en trouver une autre semblable, telle que les figures semblables construites sur elles deux soient dans un rapport donné. Même problème dans le cas où les figures semblables sont à trois dimensions. Trouver deux moyennes proportionnelles consécutives entre deux lignes données. Définition

de la similitude des figures irrégulières. Définition du centre de similitude. Trouver une figure semblable à une figure donnée. Description d'un instrument destiné à tracer les figures semblables dans le plan. Transporter en un lieu quelconque du plan la figure tracée. Transporter en un lieu quelconque de l'espace une figure solide tracée. Description d'un instrument destiné à construire les figures semblables dans l'espace. Application de cet instrument au tracé des figures solides symétriques». Dans le second livre, on rencontre de même quelques théorèmes sur le centre de gravité de figures rectilignes.

Mais en dehors des passages qui viennent d'être mentionnés, le traité de HERON en contient d'autres qui semblent avoir indirectement un grand intérêt pour l'histoire des mathématiques pures. Jusqu'à présent on a admis en général que HERON a vécu vers l'an 100 avant J.-C., mais en 1893 DIELS s'est efforcé de démontrer qu'il faut placer HERON à une époque plus basse, en tout cas après J.-C. Maintenant, cette opinion de DIELS est confirmée par la description de quelques machines donnée par HERON dans le troisième livre, et en particulier par la description des presses. En effet, C. PLINIUS SECUNDUS (23—79 après J.-C.) a indiqué que la petite presse à vis et sans levier fut inventée pendant le temps de sa vie, et cette même presse est décrite dans le paragraphe 19 du troisième livre de HERON. Comme le fait remarquer M. CARRA DE VAUX, ce fait est un argument très fort en faveur de l'opinion qui rabaisse l'âge de HERON au dessous de l'époque de PLINIUS.

A notre avis, la traduction de M. CARRA DE VAUX doit contribuer beaucoup aux progrès de nos connaissances sur l'histoire des mathématiques grecques.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

M. Cantor. VORLESUNGEN ÜBER GESCHICHTE DER MATHEMATIK. DRITTER BAND. VOM JAHRE 1668 BIS ZUM JAHRE 1759. ERSTE ABTHEILUNG. DIE ZEIT VON 1668 BIS 1699. Leipzig, Teubner 1894. 8°, 251 p.

Comme l'indique le titre, la première partie du troisième tome des *Vorlesungen* de M. CANTOR est consacrée à l'exposition de l'histoire des mathématiques pendant les années 1668—1699. Après avoir signalé les ouvrages d'histoire des mathématiques, les sociétés savantes, les éditions d'auteurs classiques et les traités élémentaires de mathématiques de cette période, M. CANTOR rend compte successivement de différentes recherches

de géométrie élémentaire, et particulièrement de la *Characteristica geometrica* de LEIBNIZ, de l'arithmétique, de l'analyse combinatoire et de la théorie des rentes viagères. Ensuite il expose le développement de la théorie des séries par MERCATOR, BROUNCHER, GREGORY, NEWTON, LEIBNIZ, HALLEY, DE MOIVRE et JACQUES BERNOULLI. Après avoir traité la théorie des nombres et l'algèbre, les sections coniques et la théorie des autres courbes, il passe à l'histoire de la découverte et du premier développement du calcul infinitésimal. Ici il nous donne une analyse détaillée des écrits de NEWTON et de LEIBNIZ sur ce calcul jusqu'en 1699, ainsi que des recherches des frères BERNOULLI et de L'HÔPITAL se rapportant au même sujet. Il raconte aussi la première partie de l'histoire de la querelle sur le problème isopérimétrique; enfin il mentionne les objections de NIEUWENTIJT contre le calcul différentiel et l'attaque de FATIO DE DUILLIER contre LEIBNIZ, attaque qui donna lieu aux débats sur la priorité de l'invention des nouveaux calculs. Ces débats seront exposés dans la partie suivante du troisième tome des *Vorlesungen*, qui embrassera les années 1700—1726; une troisième partie suivra le développement des mathématiques jusqu'en 1759, qui sera le point terminal de l'ouvrage de M. CANTOR.

Par ce qui vient d'être mentionné, on voit que M. CANTOR a divisé en trois parties la période 1668—1759 et que, dans chaque partie, il s'est efforcé de traiter séparément les différentes branches des mathématiques. Il est vrai que ce procédé entraîne avec soi quelques inconvénients; ainsi p. ex. il a été nécessaire d'interrompre l'exposition de la querelle sur le problème isopérimétrique pour la reprendre plus loin. Mais d'autre part cet arrangement offre aussi des avantages essentiels, et par conséquent M. CANTOR a sans doute eu raison en s'en servant.

Si les deux tomes antérieurs des *Vorlesungen* s'adressent en premier lieu aux spécialistes dans l'histoire des mathématiques, la première partie du troisième tome doit avoir un intérêt immédiat pour tous les mathématiciens, parce qu'elle rend compte de l'invention du calcul infinitésimal, c'est à dire d'une des plus importantes découvertes qui aient jamais été faites dans le domaine des mathématiques. L'histoire de cette découverte a été déjà racontée, il est vrai, par plusieurs auteurs, mais personne d'entre eux ne l'a fait avec autant d'impartialité et d'exactitude que M. CANTOR.

En parcourant l'ouvrage de M. CANTOR, il nous a semblé qu'il soit en même temps très complet et très correct; les remarques auxquelles il nous a donné occasion, sont d'une im-

portance tout à fait secondaire. Ainsi p. ex. nous n'y avons pu retrouver aucune notice sur la formule d'interpolation de NEWTON publiée dans les *Principia* (comparez p. ex. Biblioth. Mathem. 1886, 141—142), ni aucun renseignement sur le mathématicien espagnol OMERIQUE (voir Biblioth. Mathem. 1890, 36). Nous nous permettons aussi d'ajouter que nous aurions désiré à la page 4 une indication de l'écrit historique de H. WALLERIUS: *De matheseos incrementis* (Upsaliæ 1694), cité à la Biblioth. Mathem. 1889, p. 3.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von || journal d'histoire des mathématiques publié par G. ENESTRÖM. Stockholm. 8°.
1894: 2.

Физико-математическія науки въ ихъ настоящемъ и прошедшемъ. Журналъ издаваемый В. В. Бобынинымъ. Москва. 8°.
1893: 3. — Les sciences mathématiques dans leur état actuel et passé. Journal publié par V. V. BOBYNIN.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von M. CANTOR. Leipzig. 8°.
39 (1894): 3—5. — [Analyse de l'année 1892:] Fiziko-matem. naouki **12** (1893), 1894, 257—264.

°**Albrecht, G.,** Adam Ries und die Entwicklung unserer Rechenkunst. Prag 1894.
8°, 18 p. — [0·40 Mk.]

Aubry, A., Notice historique sur la sommation des progressions géométriques décroissantes.
Journal de mathém. élément. **18**, 1894, 49—54.

°**Becker, H.,** Die geometrische Entwickelung des Infinitesimalbegriffs im Exhaustionsbeweise bei Archimedes und ihre Bedeutung für die Differentialgeometrie und die Schule. Insterburg 1894.
4°, 26 p. — [1·50 Mk.]

Bobynin, V., Sur les méthodes primitives qui ont servi à résoudre des questions arithmétiques.
Biblioth. Mathem. 1894, 55—60.

Boyer, J., Charles-Julien Brianchon d'après des documents inédits.
Revue scientifique 1_4, 1894, 592—594. — D'après les documents rapportés dans cette note, Brianchon naquit à Sèvres le 19 décembre 1783 et mourut à Versailles le 29 avril 1864.

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Dritter Band. Vom Jahre 1668 bis zum Jahre 1759. Erste Abtheilung. Die Zeit von 1668 bis 1699. Leipzig, Teubner 1894.

8°, 251 p. — [6 Mk.] — [Analyse:] Mathesis **4**$_2$, 1894, 137. (P. M.) — [Analyse de la 2e édition du 1er tome:] Nordisk Tidsskr. for Filologi (Köbenhavn) **2**$_3$, 1894, 179—181. (H. G. ZEUTHEN.) — Giornale di matem. **32**, 1894, 23—27. (G. LORIA.) — Bullet. d. sc. mathém. **18**$_2$, 1894, 102—107. (P. TANNERY.)

Cerruti, V., Elenco dei lavori scientifici di Enrico Betti.

Palermo, Circolo matem., Rendiconti **8**, 1894, 161—165.

Dickstein, S., Sur les découvertes mathématiques de Wronski.

Biblioth. Mathem. 1894, 49—54.

Dickstein, S. i Wawrykiewicz, E., Bibliografia matematyczna polska XIX. stulecia. Zeszyt próbny. Kraków 1894.

8°, 32 p. — Spécimen d'une bibliographie mathématique polonaise du 19e siècle.

Eneström, G., Quelques remarques sur l'histoire des mathématiques en Espagne au 16e siècle.

Biblioth. Mathem. 1894, 33—36.

Eneström, G., Note upon the history of the rules of convergency in the eighteenth century.

New York, Mathem. soc., Bulletin **3**, 1894, 186—187.

Eneström, G., Om Taylors och Nicoles inbördes förtjänster beträffande differenskalkylens första utbildande.

Stockholm, Vetenskapsakad., Öfversigt **51**, 1894, 177—187.

Eneström, G., Om uppkomsten af tecknen + och — samt de matematiska termerna »plus» och »minus».

Stockholm, Vetenskapsakad., Öfversigt **51**, 1894, 243—256. — [Résumé:] L'intermédiaire des mathématiciens **1**, 1894, 119—121.

Eneström, G., Om upptäckten af sättet att medelst differentiation bestämma värdet af en bråkfunktion, då täljare och nämnare samtidigt blifva noll.

Stockholm, Vetenskapsakad., Öfversigt **51**, 1894, 297—305.

Fabris, V., Pico Fonticulano e la sua geometria.

Bollettino di storia patria Antinori negli Abruzzi (Aquila) **6**, 1894, 229—238.

Favaro, A., Intorno alle meccaniche di Erone Alessandrino edite per la prima volta sulla versione araba di Costa ben Luca dal bar. Carra de Vaux.

Venezia, Istituto Veneto, Atti **5**$_7$, 1894, 1117—1132.

°**Fermat, P. de**, Oeuvres. Publiées par les soins de P. TANNERY et CH. HENRY sous les auspices du ministère de l'instruction publique. Tome second. Correspondance de FERMAT. Paris 1894.

4°, 12 + 514 p. — [19 Mk.]

°**Firmicus, Julius,** Matheseos libri VIII. Primum recensuit C. SITTL. Pars I. Libri I—IV. Leipzig, Teubner 1894.
8°, 15 + 246 p. — [2·40 Mk.]

Fontès, Pierre Bongo, arithméticien, essai d'archéologie mathématique.
Toulouse, Acad. d. sc., Mémoires **5**$_9$, 1893, 371—380.

Fontès, Sur l'ancienneté du triangle arithmétique.
Association française pour l'avancement des sciences (Congrès de Besançon) 1893, II, 236—240.

°**Franchetti, G.,** Cenni storici sulle matematiche elementari. Sassari, Satta 1893.
8°, 68 p. — [5 lire.]

G[aldeano], Z. G. de, Giuseppe Battaglini.
El progreso matem. **4**, 1894, 195—196.

Galilei, G., Opere. Edizione nazionale sotto gli auspicii di sua maestà il re d'Italia. Volume IV. Firenze 1894.
4°, 794 + (2) p. — Edition publiée sous la direction de M. A. FAVARO. — [Analyse du tome III: 1:] Bullet. d. sc. mathém. **18**$_2$, 1894, 97—102. (P. TANNERY.)

Gegenbauer, L., Bemerkung über Leonardo Pisano's »Liber Abaci».
Monatshefte für Mathem. **4**, 1893, 402.

Hultsch, F., Zur Kreismessung des Archimedes.
Zeitschr. für Mathem. **39**, 1894; Hist. Abth. 121—137, 161—172.

°**Hüniger, H.,** Der Philosoph K. Chr. Fr. Krause als Mathematiker. Eisenberg 1894.
4°, 32 p. — [1·50 Mk.]

°**Kiebel, A.,** Galilei's Untersuchung der Fallbewegung. Czernowitz 1894.
8°, 29 p. — [0·50 Mk.]

Laisant et **Humbert,** Communication sur l'état d'avancement des travaux du répertoire bibliographique des sciences mathématiques. Paris 1894.
8°, 11 p.

Loria, G., La logique mathématique avant Leibniz.
Bullet. des sc. mathém. **18**$_2$, 1894, 107—112.

Loria, G., Studi intorno alla logistica greco-egiziana.
Giornale di matem. **32**, 1894, 28—57.

Mackay, J. S., The triangle and its six scribed circles.
Edinburgh, Mathem. soc., Proceedings **1** [1883], 1894, 4—128.

Mackay, J. S., Notice sur le journalisme mathématique en Angleterre.
Association française pour l'avancement des sciences (Congrès de Besançon) 1893, II, 303—308.

Newcomb, S., Pensiero matematico moderno.
Rivista di matem. **4**, 1894, 121—128. — Traduction, par O. ZANOTTI BIANCO, de la note indiquée ci-dessus p. 29.

Pascal, E., Giuseppe Battaglini. Cenno necrologico.
Rivista di matem. **4**, 1894, 91—96.

P[eano], Un precursore della Logica matematica.
Rivista di matem. **4**, 1894, 120.

Pinto, L., Giuseppe Battaglini.
Napoli, Accad. d. sc. fis. e matem., Rendiconto $\mathbf{8}_2$, 1894, 49—54.

Quiquet, A., Aperçu historique sur les formules d'interpolation des tables de survie et de mortalité. Deuxième édition. Paris, Warnier 1893.
8°, 38 p. — [3 fr.]

°Riccardi, P., Biblioteca matematica italiana dalla origine della stampa ai primi anni del secolo XIX. Ripubblicata a cura della società tipografica modanese, con 2 nuove serie di aggiunte. I—II. Torino 1894.
4°. — [42 Mk.]

°Riesfen, Ein ungedrucktes Rechenbuch aus dem Jahre 1676. Glückstadt 1893.
4°, 26 p. — [1·20 Mk.]

Rudio, F., Erinnerung an Moriz Abraham Stern. Zürich 1894.
4°, 19 p. + portrait.

Stäckel, P., Bemerkungen zur Geschichte der geodätischen Linien.
Leipzig, Sächs. Gesellsch. d. Wissensch., Berichte (Math. Cl.) 1893, 444—467.

Steinschneider, M., Die Mathematik bei den Juden.
Biblioth. Mathem. 1894, 37—45.

Torelli, G., Giuseppe Battaglini.
Palermo, Circ. matem., Rendiconti **8**, 1894, 180—186.

Vacca, G., Intorno alla prima dimostrazione di un teorema di Fermat.
Biblioth. Mathem. 1894, 46—48.

Wassilieff, A., Lobatchewskij as algebraist and analyst.
New York, Mathem. soc., Bulletin **3**, 1894, 231—235.

ВАСИЛЬЕВЪ, А., Броннеръ и Лобачевскій. Казань 1893.
8°, 15 p. — Wassilieff, A., Bronner et Lobatchevskij. Deux épisodes de la vie des premiers professeurs à l'université de Kasan.

ВАСИЛЬЕВЪ, А., Николай Ивановичъ Лобачевскій. Казань 1894.
8°, 40 p. — Wassilieff, A., N.-I. Lobatchevskij. Discours prononcé à la séance solennelle de l'université de Kasan le 22 octobre 1893.

Weilenmann, A., Nekrolog auf Joh. Rudolf Wolf.
Zürich, Naturf. Gesellsch., Vierteljahrsschrift **39**, 1894, 1—64 + portrait.

Wittstein, A., Über die Wasseruhr und das Astrolabium des Arzachel.
Zeitschr. für Mathem. **39**, 1894; Hist. Abth. 81—94.

Question 46 [sur un *Opusculum de praxi numerorum*].
Biblioth. Mathem. 1894, 63—64. (G. Eneström.)

BESTHORN, R. O. et HEIBERG, J. L., Codex Leidensis 399, 1. Euclidis Elementa ex interpretatione Al-Hadschdschadschii cum commentariis Al-Narizii. Arabice et latine ediderunt notisque instruxerunt. I: 1. Hauniæ 1893. 8°.

Bullet. d. sc. mathém. **17**$_2$, 1893, 315—318. (P. TANNERY.) — Nyt Tidsskrift for Mathem. **4**, 1893, 92—93.

CAJORI, F., A history of mathematics. New York, Macmillan 1894. 8°.

New York, Mathem. soc., Bulletin **3**, 1894, 190—197. (D. E. SMITH.) — [Répliques:] *New York*, Mathem. soc., Bulletin **3**, 1894, 248—251. (G. B. HALSTED; D. E. SMITH.)

LORIA, G., Le scienze esatte nell' antica Grecia. Libro I. I geometri greci precursori di Euclide. Modena 1893. 4°.

The mathematical gazette (Bedford) **1**, 1894, 3—4. (J. S. MACKAY.)

LORIA, G., Della varia fortuna di Euclide in relazione con i problemi dell' insegnamento geometrico elementare. (Periodico di matematica **8**, 1893.)

Zeitschr. für Mathem. **39**, 1894; Hist. Abth. 185—186. (CANTOR.)

MEYER, F., Bericht über den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie. (Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung **1**, 1892.)

New York, Mathem. soc, Bulletin **3**, 1894, 187—190. (F. FRANKLIN.)

OBENRAUCH, Monge, der Begründer der darstellenden Geometrie. Eine historische Studie. I. Brünn 1893. 8°.

Zeitschr. für Mathem. **39**, 1894; Hist. Abth. 187—188. (CANTOR.)

REBIÈRE, A., Mathématiques et mathématiciens. Pensées et curiosités. Deuxième édition, revue et augmentée. Paris, Nony 1893. 8°.

Jornal de sc. mathem. **9**, 1894, 189. (G. T.)

REBIÈRE, A., Les femmes dans la science. Conférence faite au cercle Saint-Simon le 24 février 1894. Paris, Nony 1894. 8°.

Mathesis **4**$_2$, 1894, 135. (J. N.) — El progreso matem. **4**, 1894, 225.

WERTHEIM, G., Die Arithmetik des Elia Misrachi. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik. Frankfurt a/M. 1893. 4°.

Biblioth. Mathem. 1894, 61. (G. ENESTRÖM.)

ZEUTHEN, H. G., Forelæsning over Mathematikens Historie. Oldtid og Middelalder. Kjöbenhavn, Höst 1893. 8°.

Nyt Tidsskrift for Mathem. **4**, 1893, 84—92.

Mathematisches Abhandlungsregister. 1893. Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni.

Zeitschr. für Mathem. **39**, 1894; Hist. Abth. 113—120.

[Listes d'ouvrages récemment publiés.]

Biblioth. Mathem. 1894, 61—63. — Zeitschr. für Mathem. **39**, 1894; Hist. Abth. 110—112, 159—160, 199—200. — Fiziko-matem. naouki **12** (1893). 1894, 265—272.

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

47. Dans un traité d'algèbre rédigé en italien au 14e siècle et publié par LIBRI dans le 3e tome (p. 302—349) de son *Histoire des sciences mathématiques en Italie* (Paris 1840), le mot *cosa* a été employé pour désigner la quantité inconnue. M. CANTOR, ayant appelé l'attention sur ce fait dans le second tome (p. 145) des *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik,* ajoute: »höchstens könnte cosa bemerkenswerth erscheinen, die Übersetzung von res, während GERHARD von Cremona und LEONARDO meistens radix sagten, LEONARDO allerdings einmal auch res». Il s'ensuit de ce passage que M. CANTOR n'a rencontré le mot italien *cosa* ni le mot latin correspondant *causa* dans aucun ouvrage antérieur à l'algèbre citée. Néanmoins ce dernier mot a été employé déjà par LEONARDO PISANO dans son *Flos*. Effectivement, on y lit (*Scritti di Leonardo Pisano,* éd. BONCOMPAGNI, **2**, 1857, p. 236, ligne 18): »posui pro primo numero causam et pro quinto rem». Par conséquent, les mots *causa* et *res* semblent être pour LEONARDO deux traductions différentes du mot arabe *schai.*

Est-ce que quelque auteur antérieur à LEONARDO a fait usage du mot *causa* pour désigner une quantité inconnue?

(G. Eneström.)

Inhalt. — Table des matières.

STOCKHOLM, TRYCKT I CENTRAL-TRYCKERIET, 1894.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK — JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON — PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1894. STOCKHOLM. № 4.

NEUE FOLGE. 8. — NOUVELLE SÉRIE. 8.

BERLIN. MAYER & MÜLLER. Markgrafenstrasse 51. — Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr. — PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Über den Geburtsort des Serenos.

Von J. L. HEIBERG in Kjöbenhavn.

Als Vaterstadt des Mathematikers SERENOS gilt, so viel ich weiss, unbestritten Antissa auf Lesbos; bekanntlich hat BRETSCHNEIDER[1] sogar eine, übrigens ganz unhaltbare,[2] chronologische Bestimmung daran knüpfen wollen. Die Benennung des SERENOS als Antissäer beruht lediglich auf den Überschriften seiner beiden Abhandlungen. Ich habe wegen einer Neubearbeitung derselben die Handschriften untersucht, und es ergiebt sich, dass die wie im APOLLONIOS[3] allein massgebende Handschrift Vatic. gr. 206 folgendes hat: über *de sectione cylindri* *Σερήνου περὶ κυλίνδρου τομῆς* (ebenso Paris. gr. 2342), am Schluss *Σερήνου Ἀντινσέως φιλοσόφου περὶ κυλίνδρου τομῆς* (ebenso cod. Constantinopolitanus). Anfang und Schluss von *de sectione coni* ist unbezeichnet (auch in cod. Constantinopolitanus; Paris. gr. 2342 hat als Überschrift *Σερήνου Ἀντινέως φιλοσόφου περὶ κώνου τομῆς*, als Unterschrift *τέλος τοῦ περὶ κώνου τομῆς Σερήνου*). Das fragliche Ethnikon ist also nur einmal überliefert und zwar in der Form *Ἀντινσέως*. Diese sprachlich unmögliche Form mit HALLEY[4] als spätgriechisch für *Ἀντισσέως* zu erklären hat gar keine Gewähr; und wenn wir auch diese Erklärung gelten lassen wollten, wäre damit nichts gewonnen; denn das Ethnikon zu Antissa ist nicht *Ἀντισσεύς*, sondern *Ἀντισσαῖος*.[5] Wir müssen also in *Ἀντινσέως* etwas anderes suchen, und da

bietet sich durch die leichte Änderung eines σ in ο das Ethnikon *Ἀντινοέως* dar, d. h. aus Antinoeia[6] oder Antinoupolis in Ägypten.

Dadurch wird für die Lebenszeit des SERENOS ein *terminus post quem* gewonnen; denn Antinoupolis wurde vom Kaiser HADRIAN im Jahre 122 n. Chr. dem ANTINOUS zu Ehren gegründet. Zugleich wird er auch räumlich in die Nähe der Alexandrinischen Mathematiker, eines PAPPOS und THEON, gerückt, wo er sicher hingehört. Wir dürfen ihn also künftig SERENOS *von Antinoeia* nennen.

[1] BRETSCHNEIDER, *Die Geometrie und die Geometer vor Euklides*, S. 183—184.

[2] FR. BLASS, Neue Jahrbucher für Philologie und Pädagogik **105**, 1872, S. 34.

[3] APOLLONII *Pergaei quae Graece exstant cum commentariis antiquis*, ed HEIBERG, II S. LVI.

[4] In seiner Ausgabe S. 1 Anm.

[5] Z. B. THUKYDID III, 18, 2 und Inschriften.

[6] *Stephanus Byzant. ed.* WESTERMANN, S. 44, 34 *Ἀντινόεια πόλις Αἰγύπτου ἀπὸ Ἀντινόου παιδός· τὸ ἐθνικὸν Ἀντινοεύς.*

Die Mathematik bei den Juden.

Von MORITZ STEINSCHNEIDER in Berlin.

Orientalische Autoren im IX. und X. Jahrhundert.

13. Mit der arabischen Wissenschaft zog auch der Islam in die Studirstuben der Juden. Es ist weder leicht, noch befriedigend, die Motive zu untersuchen, welche den Religionswechsel überhaupt bewirken; Liebe, Ehrgeiz, Eigennutz, religiöser Indifferentismus und dergl. werden sicherlich, ausser einer, im reifen Alter gewonnenen neuen Überzeugung, bei den meisten Renegaten, oder Proselyten, von Einfluss gewesen sein; es ist für uns hier nur die allgemeine Frage zu beantworten: *Gehören abgefallene Juden in die Kulturgeschichte derselben?* Wir nehmen vor Allem Abstand von den geborenen Juden, welche von Eltern oder Anderen der neuen Religion zugeführt werden; hingegen ist es gewiss nicht unbefangene Geschichtsforschung, welche in den jüdischen Abtrünnigen nur für nachteilige Seiten seiner Persönlichkeit die Abstammung verantwortlich macht. Es wird also in der Kulturgeschichte darauf ankommen, ob der betreffende Gelehrte unter jüdischem Einflusse seine erste Bildung erhalten habe. Das ist allerdings auch nicht überall nachweislich, am wenigstens bei den Juden unter den Arabern, über welche wir oft nur aus arabischen Quellen schöpfen können, denen die Erziehung des Renegaten ferne lag.

Diese allgemeine Erörterung soll nur rechtfertigen, wenn in der folgenden Zusammenstellung jüdische Renegaten vorkommen, ohne dass überall ihre jüdische Erziehung nachweisbar ist. Bei dem ersten, den wir hiermit einführen, ist allerdings die Sache unzweifelhaft.

ABU'L-TAJJIB SIND BEN ALI (829—833?) war ein berühmter Sternbeobachter.[1] Die älteste Quelle, der *Fihrist* des NADIM (S. 275, s. II, 122, deutsch von SUTER: *Das Mathematiker-Verzeichniss* etc., Zeitschr. f. Mathem. **38**, 1893; Hist. lit. Abtheil. S. 29, dazu S. 63), erzählt, dass SIND auf Veranlassung MA'AMUN's zum Islam überging und dessen Astronom wurde. Er ist derjenige, welcher die Synagoge hinter dem Thor der Schamâsijja in dem Harîm der Wohnung des MUIZZ AL-DAULA baute.[2] Er arbeitete unter den Stern-Beobachtern, ja sogar an der Spitze aller.

KIFTI, dessen Artikel bei CASIRI (I, 341) und SÉDILLOT (*Proleg. des tables astron. d'Oloug Beg,* p. IX) ungenau mitge-

teilt und übersetzt ist, rühmt SIND's Kenntnis des Sternenlaufes, des Gebrauchs astronomischer Instrumente, wie des Astrolab, und nennt Bagdad ausdrücklich. SIND erprobte (*imta'hana*) die Orte der Sterne, wurde aber in seiner Arbeit durch den Tod MA'AMUN's unterbrochen.

Die astronomischen Tafeln, welche von mehreren Astronomen MA'AMUN's hergestellt wurden, heissen die Ma'amunischen. KIFTI bemerkt, dass die Tafeln, welche SIND ausarbeitete, von den Astronomen »bis auf den heutigen Tag» angewendet werden.

Unklar ist mir die Rolle, welche SIND in einer Katastrophe des berühmten AL-KINDI spielte. OSEIBIA (I, 207, Zeile 9. v. u.) teilt eine Stelle aus einem Buche des AHMED BEN JUSUF mit,[3] welche HAMMER (III, 242, Z. 2) so auffasst, dass die Brüder AHMED und MUHAMMED, Söhne des MUSA BEN SCHAKIR,[4] Ränke geschmiedet hätten, um »SAID» [lies SIND] BEN ALI vom Khalifen MUTAWAKKIL zu entfernen. FLÜGEL (*Al-Kindi*, S. 16) liest heraus, dass die Brüder »mit Hilfe» des Juden SIND den KINDI in Missgunst brachten. Diesmal scheint der, sonst unzuverlässige HAMMER der Wahrheit näher zu kommen als FLÜGEL. Es heisst im Texte wörtlich: »Sie schickten SIND nach Bagdad weg und entfernten ihn von MUTAWAKKIL»; dann kommt erst die Verläumdung des KINDI. Das Wegschicken »nach Bagdad» bedarf der Erklärung; MUTAWAKKIL residirte in Sermenrei; aber jedenfalls war SIND nicht Spiessgeselle der ränkevollen neidischen Brüder.

Die Schriften SIND's scheinen bis auf n. 6. sich nicht erhalten zu haben. Wir stellen 5 voran, deren Titel der *Fihrist* erwähnt, ohne den Inhalt anderweitig zu bestimmen; KIFTI, dem das Biographische die Hauptsache ist, begnügt sich mit der Bemerkung: SIND verfasste Schriften über Rechenkunst und Astronomie, welche bekannt (berühmt) sind. HAGI KHALFA kennt nur die astronomischen Beobachtungen. Die 5 Titel sind folgende:

1. *al-Munfa'salât wa'l-Mutawassatat*, wörtlich »die Vereinzelten und die Mittleren»; SUTER (S. 63) vermutet: »die Apotomeen und Medialen».

2. die Schneidenden (HAMMER: »die Symmetrie» !).

3. die indische Rechnung (d. h. Arithmetik; vgl. REINAUD, *Mémoire sur l'Inde*, p. 302; WOEPCKE, *Mémoire sur l'introduction des chiffres* p. 181).

4. »Sammlung und Trennung» (SUTER: Vermehrung und Verminderung).

5. Algebra (HAMMER: »Kabbale» !).

Dazu kommen (unter fortgesetzter Zählung):

6. die (Ma'amunischen) Tafeln, von denen oben die Rede gewesen ist.

7. Compendium des X. Buches von EUKLID, worüber das Nähere in meinem Art. »*Euklid bei den Arabern*» (1886), S. 4.

8. Frage (oder Problem), welche AHMED BEN MUSA BEN SCHAKIR dem SIND vorlegte, und: »Fragen (Probleme), welche zwischen SIND und AHMED verhandelt wurden», erwähnt *Fihrist* (S. VII, SUTER S. 24: »über die Frage etc.») nicht unter SIND, sondern nur unter AHMED, und zwar fehlen die letzteren in 2 mss. (s. Lesarten S. 24), wie bei KIFTI (CASIRI, I, 418, vgl. Biblioth. Mathem. 1887, S. 74 n. 11 u. 13); es ist aber jedenfalls daraus zu schliessen, dass auch SIND auf die Fragen einging. Ein persönliches Verhältnis zwischen den beiden Gelehrten ist oben besprochen worden.

9. Dem SIND wird eine Abhandlung beigelegt, worin er von seiner Sendung zur Ausmessung eines Grades (zwischen Wasit und Tadmor, oder Palmyra) erzählt. Diese Abhandlung wird von IBN JUNIS in den Hakim'schen Tafeln citirt.[5]

10. Eine Notiz über eine, oder mehrere Schriften SIND's ist wiederum an einer isolirten Stelle des *Fihrist* zu finden (bei SUTER S. 30, 64; auch bei FLÜGEL Zeitschr. der deutschen morgenländ. Gesellsch. **13**, 1859, 630); KIFTI hat diese »Erzählung» (Nachricht) an seinen Artikel »Dja'afar» gefügt; aber die Stelle fehlt bei CASIRI (I, 352), was SUTER nicht wissen konnte. Die eigentliche Quelle ist ein Buch von der Hand des IBN AL-DJAHM, das ist der Barmekide MUHAMMED (*Fihrist* II, 110 zu 245 Anm. 1).

Danach hätte SIND eine »Einleitung» (in die Astronomie oder Astrologie) verfasst und dem ABU MA'ASCHAR geschenkt, welcher sie sich selber zuschrieb;[6] letzterer erlernte die Sternkunde nämlich erst im späteren Alter, und seine Intelligenz reichte nicht aus zur Abfassung dieses Buches, wie zu der der neuen Tractate (*Makalât*)[7] über die Nativitäten und des Buches über die Conjunctionen, welches dem IBN AL-BAZJAR beigelegt wird;[8] alle diese Schriften sind von SIND.

Dieser Gelehrte war jedenfalls schon ein im Judentum erzogener Mann, als er von MA'AMUN dem Islam zugeführt wurde, und hat schon als Jude sich durch Talent oder Wissen dem Khalifen bekannt gemacht.

14. Anno 887—98 lebte und lehrte, nach gewöhnlicher Annahme, der Gaon, d. h. Rector der Hochschule zu Sura in Babylon, NACHSCHON (NA'HSCHON, wahrscheinlich BEN ZADOK),

welchem die Erfindung einer Periode von 347 Jahren (= 13 Cyklen zu 19 Jahren) für die Kalenderberechnung beigelegt wird, zu finden in fast allen mss. über Kalenderkunde (sogen. »*Ibronot*»), in ms. Paris 1032 mit Tabellen, zuerst hebräisch gedruckt 1521 in dem Werke des JOSEF BEN SCHEMTOB (worüber an seinem Orte), auch unter dem Titel *Canones festivitatum* mit lateinischer Übersetzung von SEB. MÜNSTER, in seiner Sammelschrift *Calendarium hebraicum* (Basil. 1527), auch lateinisch von JAC. CHRISTMANN, in seinem Sammelwerke *Calendarium* (Francof. a. M. 1594), wo der Namen NAHASSON lautet. Mehr in meinem *Catal. l. h. in Bibl. Bodleiana* p. 2019.

[Zum Jahre 893 ist eine *Fiction* zu verzeichnen, nämlich der angebliche Abgesandte IMMANUEL ASSALONI in Gnesen, bei STERNBERG, *Geschichte der Juden in Polen*, S. 7; es genügt, die ganze Notiz als Erfindung zu bezeichnen.]

15. Sehr zu bedauern ist es, dass von einem anderen berühmten Gaon die Nachrichten und Reste mathematischer Schriftstellerei so ungenügend auf uns gekommen sind.

SA'ADIA Gaon BEN JOSEF, arabisch SA'ÎD BEN JUSUF AL-FAJJUMI (gest. 941), war von Ägypten nach Babylon zum Lehramt berufen. Prof. JOSEPH DERENBOURG in Paris hat zum 1000. Geburtsjahr SAADIAS 1892 eine Sammlung der Schriften und Fragmente begonnen, die langsam vorschreitet. ABR. IBN ESRA (st. 1167) bezeichnet SAADIA als »Haupt der Redner an allen Orten», das heisst als denjenigen, mit welchem die Pflege aller Zweige der jüdischen Disciplinen beginnt und in sichtbarer Continuität sich fortpflanzt.[9] Er ist in Allem epochemachend; seine etwaigen Vorgänger hat er in den Schatten der Vergessenheit gestellt. Er ist ein Schüler der Araber, schrieb fast alles in ihrer Sprache, sogar seine Bibelübersetzung in arabischer Schrift, nicht mit hebräischen Lettern, wie es in der arabischen Literatur der Juden allmälig üblich wurde.

Unter solchem Einflusse verfasste er eine Abhandlung über Erbrecht, oder Erbschaftsrechnung, unter dem Titel *Kitab al-Mawârîth*, wovon ich ein Fragment in hebräischer Schrift in der Bodleiana in einem Fragmentenheft wiederaufgefunden habe (*Catal. Bodl.* p. 2160). Das Fragment scheint beim ersten Anblick ein arithmetisches zu sein; es behandelt den Gegenstand hauptsächlich nach Grundsätzen der Erbteilung, für welche jüdische Quellen nicht bekannt sind; die ganze Methode erinnert an die arabische Disciplin der *Farâidh* (Erbteilung), deren Vertreter als *Faradhi* bezeichnet werden, was auch Familienamen geworden ist.[10] Diese Wissenschaft ist ein Zweig der Rechts-

lehre (*Fikh*). — Eine hebräische Übersetzung jenes Fragments von I. S. FUCHS, wovon ein Specimen in der von FUCHS redigirten hebräischen Zeitschrift ha'Hoker (»Revue Hébraique, Études littéraires» etc., Paris 1891, gedruckt in Krakau) p. 41 abgedruckt ist, wird von Herrn Dr. JOEL MÜLLER hier mit einer Einleitung herausgegeben werden.[11]

SA'ADIA hat sich auch mit dem Kalender beschäftigt und eine Monographie darüber (Buch *Ibbur*, in hebräischer Sprache?) verfasst. Diesem verlorenen Buche gehören wahrscheinlich allerlei, meist gereimte hebräische Formeln, oder »Schlüssel» zur kürzeren Berechnung der Quatember und der Neumonde nach kurzen Cyklen (»9 Pforten») und dergl., welche man mit, oder ohne Namen des Verf. in allen mss. und in Drucken mit verschieden lautenden Erklärungen und Beispielen findet.[13]

Aber auch in seinen Bibelcommentaren und in besonderen polemischen Abhandlungen gegen die Secte der Karäer (oder Karaiten) behandelt er die, zwischen ihnen und den Rabbaniten (Anhängern des Talmud) bis heute streitigen Fragen, den Kalender betreffend.[14] SA'ADIA ist ein Apologet der Tradition, also nicht ein kritischer Historiker — und wer war es zu seiner Zeit? — Es ist ihm wahrscheinlich, dass die Sprüche SALOMONIS sich im Munde des Volkes bis zur schriftlichen Sammlung des biblischen Buches erhielten, eben so kann die phantastische Kosmogonie des Buches *Jezira* (s. oben § 11) dem Inhalte nach vom Patriarchen ABRAHAM herrühren. Ähnlich ist seine Behauptung, dass die Juden von jeher den Neumond nach blosser Berechnung bestimmten und die Wahrnehmung (Zeugenaussage) ein secundäres Moment für den Gerichtshof war. —

Um hier mit Asien abzuschliessen, greifen wir in der Zeit etwas vor. Um 997 lebte der jüdische Mathematiker BISCHR BEN FIN'HAS (Pinchas) BEN SCHUEIB, angeblich ein Freund des Christen ÎBN ZAR'A, der im J. 997 an ihn eine Widerlegung jüdischer Religionslehren richtete;[15] nach einem Zusatz OSEIBIA's (I, 236) hatte auch BISCHR den IBN ZAR'A widerlegt. Hier ist der Namen offenbar corrumpirt (s. Lesarten S. 29): BISCHR »BEN BISCHR, genannt IBN ANAJA». BISCHR ist vielleicht ein Nachkomme des jüdischen Astrologen SCHUEIB, der zu Anfang des IX. Jahrhunderts zwischen bekannten Astrologen in hoher Stellung erwähnt wird,[16] und der an seiner Stelle erwähnt wäre, wenn ich mehr hätte heranbringen können.

HOTTINGER weiss von einer Arithmetik BISCHR's, welche von arabischen Schriftstellern oft erwähnt werde; ich finde aber keine andere von ihm unabhängige Quelle.

[1] Quellen, s. in meinem *Euklid bei den Arabern* S. 90, wo lies: Zeitschr. D.M.G. Band **25** zu S. 170; s. auch FLÜGEL, *Diss. de interpret.* p. 32 n. 71.

[2] Die Stelle bei KIFTI ms. fehlt bei CASIRI. SUTER übersetzt *Kauisa* mit »Tempel (Observatorium)», was unstatthaft ist, und fügt hinzu: »welcher in der Residenz Bagdad steht» (etwa aus KIFTI?). MUIZZ eroberte Bagdad ein Jahrhundert nach MA'AMUN, also bezeichnet NADIM nur den Platz. Der spanische Richter 'SÂID (über welchen s. *Al-Farabi* p. 144) bei HAGI KHALFA, III, 466 (die indirecte Quelle für [HAMMER], *Encyklopäd. Übersicht*, S. 363), macht Schamâsijja zu einer Stadt im Bezirk von Damaskus. — HAMMER, *Literaturgesch.* III, 254, fügt noch hinzu, dass SIND 2 Sternwarten baute, wovon Nichts bei NADIM.

[3] *'Husn al-Ukba*, s. Biblioth. Mathem. 1888, S. 114. Gewährsmann ist der bekannte Mathematiker ABU KAMIL SCHUDJA.

[4] Biblioth. Mathem. 1887, S. 44 und weiter unten N. 8.

[5] Cap. II, nach SÉDILLOT, bei DELAMBRE, *Hist. de l'astronomie* III, 97 (vgl. daselbst p. 139: Mondbreite von 5° aus den astronomischen Tafeln). — Als College SIND's wird dort ABDAL-MALIK »al-Mezurudi» [sic] genannt, richtiger KHALID BEN ABD AL-MALIK aus Merw; s. HAGI KHALFA III, 466. SÉDILLOT, *Prolégom.* p. X.; Zeitschr. f. Mathem. **12**, 1867, 39, Anm. 66, wo aber »Calet filius alimelit alcemini» im Commentar zum *Centiloquium* nr. 30, nach dem Originale und der hebräischen Übersetzung 'SALI'H BEN AL-WALID AL-TAMIMI; Zeitschr. der deutschen morgenl. Gesellsch. **24**, 1870, 347 b); vgl. SALI'H B. AL-MALIK AL-TAMIMI AL-KHORASANI, *Fihrist*, S. 7 Zeile 21.

An einer anderen Stelle des IBN JUNIS ed. CAUSSIN (p. 67) erzählt SIND, dass er die Armilla gesehen habe, womit der bekannte Astronom JA'HJA IBN ABI MANSUR (den ich mit *Almeon* in europäischen Quellen identificire) beobachtete. Gehört diese Stelle derselben Abhandlung?

[6] Das Plagiat wäre demnach die vielfach bearbeitete »Einleitung» des berühmten Astrologen (s. mein *Hebr. Übersetz.* S. 566), welcher zuerst Geschichtschreiber war (daselbst S 567, Anm. 211).

[7] Hier nicht »Abhandlungen», wie SUTER übersetzt.

[8] SUTER hat erst in letzter Correctur [die ich seiner Gefälligkeit verdanke] dafür: »an IBN BAZJAR gerichtet» gesetzt. Das Buch des IBN BAZJAR erwähnt NADIM bald darauf

(SUTER S. 30). — ABU MA'ASCHAR bestritt Angaben von SIND (IBN JUNIS l. c. p. 59; HAMMER III, 262, Anm. 1).

[9] Die Bibliographie über SAADIA nimmt in meinem *Catal. Bodl.* p. p. 2156—2224 ein. Von diesem Artikel (SA'ADIA) habe ich mit einigen anderen über berühmte Männer einige Sonder-Abzüge machen lassen unter d. T.: *Specimen Catalogi libr. hebr.* etc. (Berolini 1857.)

[10] Ich habe ein Verzeichnis der betreffenden Autoren und Schriften, so wie derjenigen Autoren auf anderen Gebieten, welche den Familienamen FARADHI (mitunter in den Quellen verstümmelt) führen, seit langer Zeit gesammelt, aber noch nicht veröffentlicht.

[11] Herr FUCHS behauptet in seiner Vorbemerkung (S. 11), dass SA'ADIA nirgends die Textworte des Talmuds angebe, aus welchen er »Alles» (!) geschöpft habe. Dieser junge Gelehrte hätte wissen müssen, dass SA'ADIA's Quelle nicht durchaus der Talmud sei; wieviel fremden Ursprungs sei, hoffen wir von MÜLLER zu erfahren, den wir auf gedruckte arabische Quellen über den Gegenstand hingewiesen haben.

[12] SAADIA FAJJUMI [wohl Überschrift des Redacteurs], *der Gaon, über den jüdischen Kalender, von* S. D. LUZZATTO, im »Orient», herausg. von I. FÜRST, **12**, 1851, S. 102 und 133. Vgl. meinen *Catal. Bodl.* p. 2170 und Addenda.

[13] Gesammelt bei LUZZATTO, l. c.; die Kalenderprophezeiung in ms. München 289 ist unecht?

[14] Z. B. aus der im J. 926—927 verfassten arabischen Schrift (*al-Tamjiz*), hebräisch bei ABRAHAM BAR CHIJJA (LUZZATTO, l. c. S. 133—134; *Catal. Bodl.* p. 2165).

[15] Siehe mein *Polem. u. apologet. Lit.* S. 149, wo 2 Handschriften des Werkes angegeben sind. Cf. Hebr. Bibliogr. 1862, S. 31.

[16] OSEIBIA I, 131, Zeile 5; französisch bei SANGUINETTI, Journal Asiat. 1855, t. **5**, 455; cf. **6**, 460.

On the use of a single symbol to denote the incommensurable number 3·14159....

By W. W. ROUSE BALL in Cambridge.

M. ENESTRÖM contributed to the Bibliotheca Mathematica for 1889 (p. 28) a valuable note on the introduction in the eighteenth century of a single symbol to indicate the number which represents the ratio of the circumference of a circle to its diameter.

It may be interesting to add that this number is represented by π in W. JONES's *Synopsis palmariorum matheseos* (London 1706) p. 243, 263, et seqv. For instance, on p. 243 he says: — »In the circle the *Diameter* is to *Circumference* as

$$\overline{\frac{16}{5} - \frac{4}{239}} - \frac{1}{3}\,\overline{\frac{16}{5^3} - \frac{4}{239^3}} + \frac{1}{5}\,\overline{\frac{16}{5^5} - \frac{4}{239^5}} - \&c.$$

$$= 3,14159, \&c = \pi.$$»

This use of a single symbol to denote the incommensurable number 3·14159 . . . is slightly earlier than the instances cited in the note to which reference is made above.

Miscellen zur Geschichte der Mathematik im 14. und 15. Jahrhundert.

Von MAXIMILIAN CURTZE in Thorn.

Die unedierten Sachen, welche ich nachfolgend veröffentlichen will, befinden sich in der Handschrift der Königl. Hof- und Staatsbibliothek zu München N:o 14908, von welcher GERHARDT in den Monatsberichten der Königl. Akademie zu Berlin vom Jahre 1870, S. 401 eine vorläufige, jedoch höchst mangelhafte Beschreibung gegeben hat. Indem ich mir vorbehalte, auf diese Handschrift an anderer Stelle weitläufiger und mit hochinteressanten Auszügen zurückzukommen — sie ist sowohl für die Geschichte der Arithmetik und Algebra wie diejenige der praktischen Geometrie von ganz eminenter Bedeutung, so hervorragend, wie es GERHARDT auch noch nicht einmal ahnen lässt —, begnüge ich mich hier damit eine Reihe von Kleinigkeiten, welche der Schreiber der Handschrift, ein gewisser Frater FRIDERICUS aus dem Kloster St. Emmeran zu Regensburg, theils abgeschrieben, theils selbst verfasst hat, mit den nöthigen sachlichen und geschichtlichen Bemerkungen abdrucken zu lassen. Sie werden zeigen, dass auch noch um jene Zeit die Regeln, welche GERBERT in seiner Geometrie gegeben hatte, und die bekanntlich zum grössesten Theile bis auf HERON von Alexandria zurückverfolgt werden können, in unbeschränktem Gebrauche waren, dass aber auch schon manche neue Errungenschaft daneben benutzt wurde. Jedenfalls hat der Schreiber nicht gesehen, dass mehrere der mitgetheilten Regeln einander gegenseitig ausschliessen.

Der erste und längste Abschnitt fusst absolut auf der GERBERTschen Geometrie, sowie auf dessen Brief an ADELBOLD und des letzteren Brief an GERBERT über den Inhalt der Kugel. Dabei sind aber auch hier schon später erst bekannt gewordene Thatsachen benutzt. So findet sich Beispiels halber neben dem Werthe des ARCHIMEDES für π, also neben $\frac{22}{7}$, der Werth $\sqrt{10}$ und $\frac{62832}{20000}$ benutzt, welche beide zuerst bei den Indern gefunden sind, und welche auch PEURBACH kannte,[1] dieser aber so, dass er ihren verschiedenen Grad der Annäherung hervorhebt,

während sie bei unserm Verfasser als gleichwerthig neben einander auftreten. Es findet sich weiter neben der Verwandlung einer Kreises in ein gleichgrosses Quadrat, die umgekehrte Aufgabe ebenfalls behandelt: ein Quadrat in einen gleichgrossen Kreis zu verwandeln. Während das erste *circulum quadrare* heisst, nennt sich die andere Aufgabe *quadratum circulare,* beide Ausdrücke von CANTOR als schon früher vorhanden nachgewiesen und zwar bei ALBERTUS DE SAXONIA.[2] Die genaue Ausziehung der Quadratwurzel wird gelehrt nach der Art des JOHANN VON GMUNDEN.[3] Die Fussnoten werden genauere Gleichheiten nachweisen.

Die zweite Notiz ist stereometrisch, handelt aber zunächst von der Bestimmung eines Kreisabschnittes, wenn Durchmesser und Sagitta gegeben sind. Sie beruht wieder auf der Benutzung neuerer Hilfsmittel. Als Gewährsmänner nennt Verf. EUKLID, PTOLOMEUS und BOHETIUS. Der eigentliche Zweck, den Inhalt eines Fasses zu finden, welches nicht völlig gefüllt ist, wird in N:o IV wieder aufgenommen, welche die Anweisung gibt eine *virga visoria,* wie bekanntlich der Kunstausdruck ist, zu verfertigen.

Das dazwischenliegende Stück N:o III schliesst sich insofern an N:o II an, als darin die Berechnung eines Stückes gelehrt wird, wenn won den dreien: Durchmesser des Kreises, Sehne und Sagitta zwei bekannt sind.

N:o V zeigt wie eine Säule, deren Länge grösser ist als ihr Durchmesser in eine andere verwandelt werden kann, bei welcher Durchmesser und Höhe einander gleich sind.

N:o VI erweitert den Begriff des Gnomon eines Quadrates auf Gnomon eines Würfels. Endlich zeigt N:o VII, dass die Diagonale eines Quadrates gleich der Quadratwurzel aus dem doppelten Quadrate der Seite sein muss.[4]

Durch die Veröffentlichung dieser Kleinigkeiten hoffe ich einen, wenn auch bescheidenen, Beitrag für die genauere Kenntniss der Mathematik des ausgehenden Mittelalters geliefert zu haben.

[1] CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Matematik*, II, S. 168.
[2] CANTOR, a. a. O. II, 132.
[3] CANTOR, a. a. O. II, 164.
[4] Auch hier sind Anklänge an ALBERT VON SACHSEN vorhanden.

I.

Anonyme Abhandlung über Geometrie.

| 301′ | I. Si autem vis mensurare planum in longum et latum tunc planum aut erit circulare aut angulare. Si circulare, tunc medietas dyametri ducatur in medietatem circumferenciae, et productum dabit aream circuli.[1]

Vel aliter. Multiplica dyametrum in se ipsum et hanc summam iterum multiplica per 11, et productum divide per 14, et numerus quociens denotabit aream.

II. Quantitas vero circumferenciae habetur sic. Multiplicatur dyameter per tria et addatur septima pars eius ei, et productum dabit quantitatem circumferenciae.

III. Si vero e contrario volueris scire, scilicet per circumferenciam dyametrum, subtrahe 22^{am} partem circumferenciae ab ipsa circumferencia, et quod remanet, divide per tria, et numerus quociens dabit tibi dyametrum.[2]

Vel sic. Multiplica circulum in semet ipsum et quod exierit divide per 10, et illius exinde provenientis quaere radicem, qui erit circuli dyameter.[3]

Vel aliter. Multiplica circulum in 20 000, et divide quod colligitur per 62 832, et quod tibi proveniet ex hac divisione erit dyameter.[4]

IV. Si vis scire dyametrum circuli infra circumferenciam orthogonam tangentem omnia latera orthogoni, adde quantitatem
| 302 lineae orthogoni quantitati basis, et ex hac summa | quantitatem *podismi* subtrahe, et residuum erit quantitas circuli dyametri. Unde si linea orthogona sit 8 pedum, et basis sit 15, et *podismus* 17, erit illa dyameter 6 pedum.[5]

V. Si autem superficies fuerit triangula et aequilatera, mensura sic. Dividatur unum latus trianguli in duas partes aequales, et a puncto divisionis ad angulum oppositum protrahatur una linea recta. Sic dicta ducatur in unam partem lateris divisi, et habetur quantitas trianguli.

Vel aliter. Divide unum latus in duo media per lineam exeuntem ab angulo opposito ad sui medio, et inde ducatur unum latus trianguli in medietatem lineae dividentis triangulum,

et productum dabit aream. Et nota quod latus trianguli aequilateri est longius linea dividente ipsum triangulum in septima parte, unde si latus fuerit 7 pedum, linea dividens erit 6 pedum.[6]

VI. Si autem triangulus habet duo latera aequalia et tercium inaequale, dividatur latus inaequale in duo aequalia, et a puncto divisionis trahatur linea ad angulum oppositum, et una medietas lateris ducatur in lineam protractam ab angulo ad punctum divisionis, et productum dabit aream. Vel ducas totam basim | in medietatem lineae perpendiculariter ductae et habebis |302′ idem.

VII. Si autem trium laterum inaequalium, ab angulo ad latus oppositum trahatur linea perpendicularis, et illud latus, super quod cadit perpendicularis, ducatur in perpendicularem, et producti medietas dabit aream. Vel multiplica illud latus, super quod cadit perpendicularis, in medietatem perpendicularis et prôductum dabit aream.[7]

VIII. Si vis scire aream trianguli orthogonii, duc basim in orthogonam, et medietas producti dabit aream. Vel duc medietatem basis in lineam orthogonam, vel medietatem orthogonæ in basim, et idem proveniat.

IX. Si autem superficiem quadratam vis mensurare duc unum latus in alterum, vel in se ipsum et productum dabit aream quadrati.

X. Quod si quadranguli superficiem vis metiri, ducatur minus latus in maius, et productum dabit aream.

XI. Si autem aream elimpharifae volueris habentis duo latera opposita aequedistancia et alia duo latera aequalia, sed non aequedistancia, adde unum latus aequedistancium alteri, | et quod |303 provenit ex addicione, multiplica per quantitatem orthogonae, et medietas producti dabit aream. Vel sic. Multiplica illud, quod provenit ex dicta addicione, per medietatem orthogonae, et productum dabit aream. Vel multiplica medietatam eius, quod provenit ex dicta addicione, per orthogonam et habebis idem.

XII. Si autem velis scire elimpharife habentis duo latera opposita et aequalia non tamen aequedistancia, quorum unum latus constituet duos angulos super aequedistancia rectos, quod orthogonum dicitur, adde unum latus aequedistancium alteri, et quod provenit, multiplica per quantitatem orthogonae, et medietas producti dabit aream. Vel multiplica illud, quod provenit ex addicione, per medietatem orthogonae, vel per ipsum orthogonam multiplica medietatem eius, quod provenit, et habebis iam idem ut prius.[8]

XIII. Quod si superficiei penthagonae vis aream invenire, et si erit aequalium laterum et aequalium angulorum, tunc unum latus in se ipsum ducatur, et productum ternario multiplicetur, et a summa exeunte subtrahatur quantitas unius lateris semel, et medietas tocius erit area.[9]

Aliter. Vel aliter. Duc unum latus in medietatem suae orthogonae, vel orthogonam in medietatem lateris, et productum
| 303′ multiplica per 5 | et habebis penthagona.

XIV. Hextagonum simili modo invenies, sed multiplica per 6, heptagonum autem per 7 etc. Sic deinceps potes aream cuiuslibet figurae angularis et rectilineae sive fuerit regularis sive irregularis invenire: Divide ipsam in triangulos et mensurando quodlibet triangulum per se per artem praedictam.

XV. Scias, quod radix areae alicuius circuli est costa alicuius quadrati aequalis illi areae; et per hoc posses quadrare circulum.[10] Et si praecise non posses invenire radicem alicuius numeri, adde numero illi, cuius radicem vis extrahere, multas ciffras, quia, quanto plures ei addas, tanto praecisius erit opus, et oportet ipsas ciffras esse in numero pari. Ut si sit numerus 2, cuius radicem vis extrahere, ei adde 6 ciffras, et proveniet talis numerus 2 000 000, a quo extrahe radicem, cuius radix erit hic 1414, a qua radice oportet aufferre tot figuras, quot fuerunt ciffrae in medietate ciffrarum prius additarum, ut cum additis sex ciffris, debent aufferre 3 primae figurae ab ipsa radice, et numerus residui erit numerus integrorum radicis quaerendae, qui in hoc casu erit 1. Deinde multiplica per 60 numerum ablatum a prima radice, scilicet 414, et a producto
| 304 protrahe tot | figuras, sicut prius, videlicet tres primas figuras, quae sunt 840, et residuum, quod est 24, erit numerus minutorum radicis quaerendae. Postea adhuc illum numerum subtractum qui est 840, multiplica per 60, et a producto subtrahe suas 3 figuras primas, quae sunt 400, et residuum, quod est 50, erit numerus secundorum radicis. Adhuc cum numero ultimo subtracto, qui est 400, operabis ut prius, et post multiplicacionem per 60 et subtractionem trium primarum figurarum a producto remanebunt 24, qui erunt tercia radicis quaerendae, et igitur satis praecise radix hic: 1 integrum et 24 minuta et 50 secunda, et 24 tercia. Et sic semper in omnibus numeris sumptis non quadratis operaberis, et numquam cessas in opere, donec figurae auferendae sint omnes cifrae, et sic radicem uniuscuiusque numeri praecisius, quo posses inveniri.[11]

XVI. Si autem aream alicuius quadrati multiplicaveris per 14 et productum diviseris per 11, radix residui erit dyameter

alicuius circuli aequalis illi quadrato. Unde si costa quadrati sit 6 pedum cum quinta parte unius, dyameter circuli sibi aequalis erit 7 pedum, *et per hoc potest circulare quadratum.*[12]

XVII. Si vis scire excessum quadrati ad circulum scriptum infra illud quadratum ad maius, quo posset scribi, | subtrahe |304′
aream circuli ab area quadrati, et quod remanet, erit excessus. Ut si dyameter circuli sit 7 pedum, excessus erit 10 cum dimidio, unde in tali figura costa quadrati est dyameter circuli et e converso.

XVIII. Si vis scire excessum circuli ad quadratum scriptum infra illum circulum, duc dyametrum circuli in se ipsum, et medietas producti dabit aream illius quadrati, quam subtrahe ab area circuli et residuum erit eorum excessus.

XIX. Scias, quod si infra aliquod quadratum scribatur unus circulus ad maius, quo possit scribi, et infra illum circulum scribatur eciam aliud quadratum ad maius, quo possit scribi: oportet, quod illud quadratum maius sit duplum ad minus quadratum, quod poterit probari per duas regulas.

XX. Si vis mensurare latum et profundum simul, si vis igitur putei profunditatem metiri rotundi, ab uno latere putei respice cum quadrato terminum oppositi lateris in fundo putei, et notetur quantitas dyametri latitudinis putei. Accipiatur igitur in hora consideracionis numerus punctorum umbrae rectae et multiplica quantitatem dyametri latitudinis putei per 12, et productum divide per numerum punctorum umbrae rectae, et exibit profunditas putei.[13]

XXI. Si autem vis mensurare rem secundum latum | et |305
profundum, ut si corpus quadratum aequilaterum mensurare volueris, cubes ipsum et habebis eius mensuram; et per hoc potes invenire capacitatem vasis quadrati aequilateri.

XXII. Si autem corpus quadratum oblongum volueris mensurare, ut columpnae aequilaterae, duc superficiem latitudinis in longitudinem et habebis eius grossiciem, et si superficies latitudinis in una extremitate fuerit maior alia, aequa maiorem cum minore hoc modo. Sume differenciam earum subtrahendo minorem de maiore, deinde medietatem differenciae subtrahe a maiori superficie vel adde eam minori superficiei, et erit ipsa aequata. Vel adhuc aliter. Adde superficiem minorem maiori, et medietas summae erit superficies latitudines aequata. Quam si duxeris in longitudinem ipsius columpnae, habebis grossiciem eius. Et hoc modo potes invenire capacitatem omnium vasorum circularium, eciam putei quadrilateri, et hoc modo penitus potes mensurare grossiciem et capacitatem omnium corporum oblon-

gorum et rotundorum, et columpnae rotundae, et putei rotundi, et dolii habentis recta latera, et tonnarum. Et si superficies isto-
|305* rum corporum in una extremitate fuerit maior alia | aequabis eam penitus, ut prius.[14]

XXIII. Si autem vis scire capacitatem dolii non habentis latera recta, ut dolii, quod est amplius in medio, tunc superficies latitudinis medii aequatur cum superficie extremitatum per artem praedictam. Quam superficiem aequatam si duxeris in longitudinem dolii, habebis capacitatem dolii.

Si igitur quadratum illius lineae, per quam lineam superficiem extremitatis dolii mensurasti, valeret quantitatem denariati vini, posses scire, quot denariati vini esset in toto dolio.[15]

XXIV. Si igitur vis scire quantitatem corporis spaerici, cubes dyametrum eius, et habebis corpus quadratum maius ipso corpore spaerico. Sed excessum eius ad corpus spaericum sic invenies. Quantitatem illius quadrati divide per 21, et numerum quociens multiplica per 11, et productum erit excessus quadrati ad corpus spaericum. Vel aliter inveneris quantitatem illius corporis spaerici, ut si multiplicaris per 10 illum numerum quociens, qui provenit ex ductione quantitatis praedicti corporis quadrati per 21, nam ille numerus, qui provenit, erit quantitas corporis spaerici praedicti.[16]

Unde si dyameter illius spaerae sit 7 pedum, et cubetur
|306 ipsa, ut sepcies 7 sepcies, et pro | venient 343 pedes, et haec est quantitas corporis quadrati, quod est maius corpore spaerico. Et si haec quantitas, scilicet 343, dividatur per 21, provenient 16 pedes cum tercia unius pedis. Quos 16 pedes cum tercia unius si multiplicaveris per 11, provenient 179 pedes cum duabus terciis unius, et haec est quantitas spaerae dictae. Vel si illos 16 pedes cum una tercia multiplicaveris per 10 provenient 163 pedes cum una tercia, et hic est excessus unius corporis quadrati ad ipsam spaeram. Unde si istos 163 pedes cum una tercia subtraxeris de quantitate corporis quadrati, scilicet a 343 pedibus, habebis eciam quantitatem corporis spaerici dicti, scilicet 179 pedes cum duabus terciis unius.

XXV. Si vis scire superficiem corporis spaerici, duc dyametrum eius in se ipsum, et illam summam tunc multiplica per 22, et productum divide per 7, et numerus quociens dabit superficiem spaerae. Vel aliter. Duc dyametrum in circumferenciam et productum dabit superficiem spaerae. Ut si dyameter erit 7 pedum, circumferencia erit 22, et superficies spaerae est 154.

XXVI. Scias eciam, si dyameter unius spaerae sit dupla ad dyametrum alterius spaerae, quod superficies unius qua-

drupla erit ad superficiem alterius. Et similiter | si dyametrus unius circuli sit dupla ad dyametrum alterius circuli, scias, quod tunc area unius quadrupla erit ad aream alterius, et quorum dyametri sunt duplae, et circumferenciae erunt duplae. Et scias, quod si radices sunt duplae, quadrata erunt quadrupla.[17] |306v

1456.

XXVII. Item omnis quadratus continet circulum infra se scriptum in proporcione triparciente undecimas, id est sicut 14 ad 11. Item circulus continens quadratum in se tenet eum ut 11 ad 7. Item circulus extra quadratum continet plus in duplo quam circulus infra quadratum.

[1] Gleich GERBERT, Cap. 56, 2. Absatz.

[2] Gleich GERBERT, Cap 56, 1. Abs. Hier ist $\pi = \frac{22}{7}$ gesetzt.

[3] Hier ist $\pi = \sqrt{10}$ genommen.

[4] Hier endlich findet sich $\pi = \frac{62832}{20000}$.

[5] Vergleiche GERBERT, Cap. 59. Hier ist die Anwendung des Wortes *podismus* für Hypotenuse, welche sich bei GERBERT, aber an anderer Stelle findet, höchst bemerkenswerth. Aus dieser Verwechselung wurde gefolgert, dass GERBERT den *Codex Arcerianus* gekannt haben musste. Jedenfalls folgt aber aus der augenblickligen Anwendung, dass unser Verfasser GERBERT gelesen haben muss.

[6] Diese Bemerkung ist dem Briefe GERBERTS an ADELBOLD entnommen. An einer andern Stelle der Handschrift 14908 wird diese nämliche Beziehung als aus der *Geometria Gilberti* (!) entnommen hingestellt. Es war also wohl der Geometrie der Brief an ADELBOLD hinzugefügt worden.

[7] Dass hier und im Folgenden für dieselbe Rechnung 2 bis 3 dem Wesen nach identische Anweisungen gegeben werden — auch das ist GERBERTISCH — hat darin seinen Grund, dass man diejenige Rechnung wählen soll, bei welcher die Halbierung ohne Rest geschehen kann.

[8] Die beiden letzten Absätze stammen, wie schon die angewendeten Worte bezeugen, aus arabischer Quelle.

[9] Gleich GERBERT, Cap. 55, Absatz 3. Es ist eigenthümlich, dass hier für das Fünfeck einmal die Fünfeckszahl benutzt wird, und dann sogleich die richtige Berechnung der Fläche folgt. Nur für das 5-eck ist die falsche Formel gegeben worden.

[10] Hier zeigt der Verfasser, dass er einen richtigen Begriff von der Quadratur des Kreises besitzt; er weiss auch, dass dieselbe nur näherungsweise, *praecisius quo possis*, geschehen kann.

[11] Wie schon in der Einleitung gesagt ist, hat auch JOHANN v. GMUNDEN diese eigenthümliche Verquickung der Decimal- und Sexagesimal-Rechnung in Anwendung gebracht. Weitere Untersuchungen haben mir gezeigt, dass diese Methode auf JOHANNES DE LINERIIS zurückgeht. Nebenbei übrigens die Bemerkung, dass aus den Handschriften der K. K. Hof-Bibliothek zu Wien sicher hervorgeht, dass der Vatersname JOHANNS VON GEMUNDEN SCHINDEL war.

[12] Wenn bei dieser Circulation des Quadrates wirklich 7 herauskommen sollte, so müsste die Seite um eine Kleinigkeit grösser sein als $6\frac{1}{5}$.

[13] Gleich GERBERT, Cap. 20.

[14] Hier, wie fast in allen mittelalterlichen Schriften, ist also die falsche Formel $V = \frac{d_1^2 + d_2^2}{8}\pi h$ in Anwendung gekommen.

[15] Hier würde die Formel heissen: $V = \frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}{12}\pi h$.

[16] Das ist entnommen dem Briefe ADELBOLD'S an GERBERT bis auf das angewendete Beispiel.

[17] Diese und die folgende Nummer sind sicherlich von Bruder FRIDERICUS hinzugefügt worden, und zeigen Früchte seiner Studien an.

Zur Geschichte des Josephspiels.

Von Maximilian Curtze in Thorn.*

In der Handschrift Codex lat. Monacensis N:o 14836, dem 11. Jahrhundert angehörend, findet sich (Blatt 80') Folgendes:

»Quatuor. et pentas. duo. monas. tris. mias. unus
»Hinc dias. ambo. trias. unus. dias. et duo. monas.

»Quorum quidem versuum universalis regula tali poterit monstrari experiencia, ut non solum sicut in his versibus auferendi auferantur, sed etiam quovis numero, quos volueris tollantur. »Ponantur enim quilibet numeri duplici proportione constituti, »quorum quem vis remanere, duplus ponatur, quem vero vis »auferre, subduplus ponatur. Computo solummodo per VIIII, »vel VIII, vel quemcumque numerum voluero, et quem VIIII, »vel VIII vel quicumque numerus, per quem computavi, monstraverit, tollo, et inde duplos tuli, subduplus pono, et eosdem »duplos, quo ordine positi, si auferendi sunt, aufero.»

Dass es sich hier um das sogenannte Josephspiel handelt, ist klar. Die Verse geben die Anleitung, wie die Aufstellung zu bewerkstelligen ist, wenn, wie gewöhnlich, der 9[te] Mann ausgemerzt werden soll. Offenbar handelt es sich hier nicht um etwas Neues, sondern etwas Allbekanntes, nur die Erweiterung auf jede beliebige Abzählezahl, um so kurz zu sagen, nimmt der Verfasser dieser Notiz für sich in Anspruch. In späterer Zeit wurden zu dem nämlichen Zwecke Verse benutzt, in denen die fünf Vokale — nur diese hatten für die Lösung Bedeutung — das leisteten, was oben die Zahlworte thuen.

In der Handschrift Codex lat. Monacensis N:o 14809 finden sich folgende Merkverse (Blatt 76, Z. 1—6):

»Rex angli cum veste bona dat signa serena (10)
»Non dum pena minas a te declina degeas (9)
»Arte parare mea veniant adistere secte (8)
»Larga dei pietas bene manes omnia papam (6)
»Ibant per montes, querebant desidiosa (12) proponendo »videas.
»Item 15 christiani et 15 Judei.»

Hier bedeuten die in Klammern hinzugefügten Zahlen die jedesmalige Abzählezahl des betreffenden Spruches. Die Handschrift ist aus dem 15. Jahrh. (1455—1464).

* Vgl. Eneström, *Anfrage 41;* Biblioth. Mathem. 1893, 31—32.

RECENSIONEN. — ANALYSES.

G. Bellacchi. INTRODUZIONE STORICA ALLA TEORIA DELLE FUNZIONI ELLITTICHE. Firenze, G. Barbera 1894. IV + 316 p.

È tendenza generale della moderna analisi l'atteggiarsi a scienza così completamente autonoma ed indipendente che, non soltanto non invoca ajuto alcuno dalle discipline sorelle, ma sdegna perfino di soffermarsi a quelle applicazioni che varrebbero ad estollerla agli occhi di coloro i quali dalla scienza pura esigono incessanti servizi per l'interpretazione dei fatti naturali. In conseguenza, mentre gli analisti dei secoli decorsi, giudicarono non sprecato il molto tempo e la molta fatica spesi nell' applicare l'analisi alla geometria, gran parte dei moderni analisti sembra col fatto propugnare opinioni diametralmente opposte. Il sistema moderno ha indubbiamente la qualità di fare spiccare più chiaramente i caratteri distintivi della scienza analitica; ma le trattazioni che ad esso rigorosamente s'informano, per essere assai astratte, possono offrire difficoltà non agevolmente sormontabili e riuscire meno atte a destare quell' ardente interesse che è prima radice dell' amore alla scienza, primo stimolo alla ricerca scientifica. Salutiamo pertanto con soddisfazione la comparsa di un' opera, come quella del Prof. BELLACCHI, destinata a fungere in parte di preparazione ed in parte di complemento agli ammaestramenti somministrati dalle migliori fra le moderne esposizioni della teoria delle funzioni ellittiche, avendo essa per tema la descrizione dell' èra di incosciente preparazione e di successiva formazione di questo ramo di matematica.

A meglio dichiararne il contenuto e l'ordinamento, trascriviamo quì i titoli degli undici capitoli in cui essa è divisa: I. Archi delle linee piane a differenza rettificabile. II. Addizione di due integrali ellittici. III. Coniche confocali. IV. Curve rettificabili per integrali ellittici. V. Superficie quadriche. VI. Curvatura delle superficie quadriche. VII. Periodicità delle funzioni ellittiche. VIII. Le funzioni $\wp(u)$ di EISENSTEIN e $\sigma(u)$ di WEIERSTRASS. IX. Il teorema di ABEL. X. Le serie di JACOBI. XI. Funzioni di una variabile complessa.

Deploriamo nel libro del Prof. BELLACCHI l'assenza di un indice dei nomi e di una lista bibliografica che lo avrebbero trasformato in un' opera di consultazione raccomandabilissima, qualità che oggi le manca a cagione della grande varietà dei soggetti trattati, tra cui esiste un legame intimo che spesso soltanto un lungo studio rivela, e a cagione anche, diciamolo pure,

della forma un pò-farraginosa e dello stile non sempre limpido dell' autore. Ciò non ostante ci sembra che lo scritto che abbiamo annunciato possa riuscire di non ispregievole giovamento ai professori che desiderano trovare applicazioni delle funzioni ellittiche ed a quelli che conoscendone già la teoria aspirano ad essere messi a parte delle scaturigini che ebbe; essa inoltre, mostrando come la teoria delle funzioni ellittiche debba la vita alle indagini intorno a molteplici problemi geometrici, varrà indubbiamente a modificare le idee di chi, non avendo mai aperto il gran libro della storia, a torto inclina a disconoscere i debiti che l'analisi ha verso la geometria.

Genova. GINO LORIA.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von || journal d'histoire des mathématiques publié par G. ENESTRÖM. Stockholm. 8°.
1894: 3.

Физико-математическія науки въ ихъ настоящемъ и прошедшемъ. Журналъ издаваемый В. В. Бобыининымъ. Москва. 8°.
11 (1892): 3. — Les sciences mathématiques dans leur état actuel et passé. Journal publié par V. V. BOBYNIN.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von M. CANTOR. Leipzig. 8°.
39 (1894): 6.

Alexander Macfarlane.
The electric world (New York) **24**, 1894, 357. — Notice biographique, avec portrait.

Cajori, F., Was the binomial theorem engraven on Newton's monument?
New York, Americ. mathem. soc. 1_2, 1894, 52—54.

Cantor, M., Fürst Baldassarre Boncompagni Ludovisi. Ein Nachruf.
Zeitschr. für Mathem. **39**, 1894; Hist. Abth. 201—203.

Curtze, M., Zur Biographie des Rheticus.
Altpreussische Monatsschrift **31**, 1894, 491—496.

Descartes, R., La géométrie. A Paris, Chez Charles Angot, ruë saint Jacques, au Lion d'or. M. DC. LXIV. Avec privilege du roy.
8°, (4) + 111 p. — Réimpression, insérée aux pages 1—111 de l'ouvrage: *La géométrie d'*AUGUSTE COMTE. *Nouvelle édition précédée de la géométrie de* DESCARTES. Paris, Bahl 1894.

Dickstein, S., Sur les découvertes mathématiques de Wronski.
Biblioth. Mathem. 1894, 85—87.

Doehlemann, K., Georg von Vega.
Zeitschr. für Mathem. **39**, 1894; Hist. Abth. 204—211.

Eneström, G., Sur la part de Jean Bernoulli dans la publication de l'»Analyse des infiniment petits».
Biblioth. Mathem. 1894, 65—72.

Reye, Th., Wilhelm Stahl.
Journ. für Mathem. **114**, 1894, 45—46.

Riccardi, P., Intorno ad alcune edizioni dell' »Algorismus» del Sacrobosco.
Biblioth. Mathem. 1894, 73—78.

Steinschneider, M., Die Mathematik bei den Juden.
Biblioth. Mathem. 1894, 79—83.

Suter, H., Zur Frage über den Josephus sapiens.
Biblioth. Mathem. 1894, 84.

Wasilieff, A., Nicolai Ivanovitch Lobachevsky. Address pronounced at the commemorative meeting of the imperial university of Kasan, october 22, 1893. Translated from the russian, with a preface by G. B. HALSTED. Austin 1894.
8°, VIII + 40 p.

Zeuthen, H. G., M. Maurice Cantor et la géométrie supérieure de l'antiquité.
Bullet. des sc. mathém. **18**$_2$, 1894, 163—169.

Question 47 [sur l'usage du mot *causa* pour désigner un quantité inconnue].
Biblioth. Mathem. 1894, 96. (G. ENESTRÖM.)

CAJORI, F., A history of mathematics. New York, Macmillan 1894. 8°.
The nation (New York) **58**, 1894, 316—317. [C. S. PEIRCE.] — The physical review (Ithaca) **2**, 1894, 146—152. (A. L. BAKER.)

CANTOR, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Dritter Band. Vom Jahre 1668 bis zum Jahre 1759. Erste Abtheilung. Die Zeit von 1668 bis 1699. Leipzig, Teubner 1894.
Biblioth. Mathem. 1894, 89—91. (G. ENESTRÖM.)

HERON D'ALEXANDRIE, Les mécaniques ou l'élévateur publiées pour la première fois sur la version arabe de Qostâ ibn Lûqâ et traduites en français par CARRA DE VAUX. Paris 1894. 8°.
Biblioth. Mathem. 1894, 88—89. (G. ENESTRÖM.) — Bullet. d. sc. mathém. **18**$_2$, 1894, 206—211. (P. TANNERY.)

LORIA, G., Le scienze esatte nell' antica Grecia. Libro I. I geometri greci precursori di Euclide. Modena 1893. 4°.
Zeitschr. für Mathem. **39**, 1894; Hist. Abth. 184—185. (CANTOR.)

TANNERY, P., La correspondance de Descartes dans les inédits du fonds Libri étudiée pour l'histoire des mathématiques. Paris, Gauthier-Villars 1893. 8°.
Zeitschr. für Mathem. 39, 1894; Hist. Abth. 182—184. (CANTOR.)

TANNERY, P., Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne. (Mémoires de la société des sciences de Bordeaux 1_4, 1893.)
Zeitschr. für Mathem. 39, 1894; Hist. Abth. 187—188. (CANTOR.)

WEISSENBORN, H., Die Berechnung des Kreis-Umfanges bei Archimedes und Leonardo Pisano. Berlin, Calvary 1894. 8°.
Zeitschr. für Mathem. 39, 1894; Hist. Abth. 186—187. (CANTOR.)

Mathematisches Abhandlungsregister. 1893. Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. December.
Zeitschr. für Mathem. 39, 1894; Hist. Abth. 232—240.

[Listes d'ouvrages récemment publiés.]
Biblioth. Mathem. 1894, 91—95. — Zeitschr. für Mathem. 39, 1894; Hist. Abth. 230—232.

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

48. A la page 41 de ses *Zeittafeln zur Geschichte der Mathematik, Physik und Astronomie bis zum Jahre 1500* (Leipzig 1893), M. F. MÜLLER indique que BOËTIUS a écrit un traité d'arithmétique, »worin die Mensa Pythagorica (Einmaleinstafel) erwähnt wird». A en juger d'après ces mots, BOËTIUS, dans le traité cité, aurait inséré la table ordinaire de multiplication sous le nom de *Mensa Pythagorica,* et il l'aurait attribuée ainsi à PYTHAGORAS. Mais il n'en est rien; en effet, on sait qu'une tablette à calculer (*abacus*) se trouve dans la géométrie qui porte le nom de BOËTIUS et que cette tablette y est attribuée aux Pythagoriciens, tandis que l'arithmétique de BOËTIUS contient la table de multiplication, mais sans attribution aux Pythagoriciens. M. CANTOR a fait remarquer de plus (*Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker,* 1863, p. 205) que, dans une édition de la géométrie de BOËTIUS publiée à Bâle en 1570, ainsi que dans quelques manuscrits relativement récents, la table ordinaire de multiplication a été introduite par méprise à la place de l'*abacus,* et que, pour cette raison, la table de multiplication a été appelée ordinairement »table de PYTHAGORAS».

Quel est le premier auteur qui a donné expressément à la table ordinaire de multiplication le nom de »table de PYTHAGORAS»? (G. Eneström.)

Index.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK

JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON

PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1895.

NEUE FOLGE 9.

NOUVELLE SÉRIE 9.

STOCKHOLM
G. ENESTRÖM.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
MARKGRAFENSTRASSE 51.

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM, 1895.

PARIS
A. HERMANN.
RUE DE LA SORBONNE 8.

Inhalt. — Table des matières.

ERRATA.

Page 59 ligne 21, au lieu de *1851* lire *1850*.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK



JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON — PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1895. STOCKHOLM. N° 1.

NEUE FOLGE. 9. — NOUVELLE SÉRIE. 9.

BERLIN. MAYER & MÜLLER. Markgrafenstrasse 51. — Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr. — PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

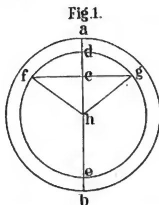
Miscellen zur Geschichte der Mathematik im 14. und 15. Jahrhundert.

Von Maximilian Curtze in Thorn.

II.

Porcionis vasis datae capacitatem invenire.

[*F. 394'*] Esto vas, cuius absoluta seu medii eius dyameter [fig. 1] sit *ab* virga 16 parcium, et eius pars distaaperta *A* quator parcium, aequata autem dyameter sit *de* 14 parcium,[1] cuius circumferencia *fdge* 44 parcium et centrum *h*. Erit igitur *dc* pars scilicet dyametri aequatae distaaperta 3 parcium et *ch* residuum semidyametri aequale 4 parcium. Et ducantur lineae *fcg* perpendiculariter super *dh*, et *hf* et *hg*. Stantibus hiis ita propositum melius aggrediar. Restat ponere modum quaerendi circuli porcionem, gracia cuius subiungam hoc theorema.



Datam circuli porcionem sub certa dyametri parte cordaque eius contentam invenire.

Sit porcio circuli quaerenda *gefc*. Quia igitur [*f. 395*] *ch* est 4 parcium, cuius quadratum est 16, et *hf* semidyameter circuli est 7, cuius quadratum est 49, ablata igitur quadrato *ch* de quadrato *hf* per penultimam primi Euclidis remanet qua-

dratum *fc* 33 parcium, cuius radix est linea *cf* 5 parcium et $\frac{3}{4}$ unius fere.[2] Ecce tota linea *fg* erit 11 partes et $\frac{1}{2}$ secundum quantitatem, qua dyameter *de* est 14 parcium, ergo secundum quantitatem, qua dyameter *de* est 120 parcium, erit *fg* 98 parcium et $\frac{4}{7}$, quod est 34 minuta fere. Patet sic: *de*, prout est 14, fit primus numerus, *fg* 11 et $\frac{1}{2}$ secundus, *de* vero prout est 120 tercius. Duc igitur secundum in tercium et divide per primum, et patet. Ergo arcus *fdg* pro tali corda erit 110 parcium et 27 minutorum fere, prout tota circumferencia *fdge* est 360 parcium. Sed quia talis est proporcio circumferenciae ad arcum, quae est areae circuli ad aream sectoris eiusdem arcus, ut vult PTOLOMEUS in Almagesti dictione sexta[3] capitulo septimo dicendo: *et quia proporcio orbium ad arcum erit aequalis proporcioni superficierum eorum ad superficies sectorum,* erit superficies sectoris, scilicet superficies *fhdg*, 47 parcium et $\frac{1}{4}$ unius partis. Patet sic. Sit circumferencia circuli, scilicet 360, primus numerus, et arcus *fdg*, scilicet 110 et 27 minuta, secundus, et area circuli, scilicet 154 tercius. Duc igitur secundum in tercium etc. Area autem circuli invenitur ex ductu medietatis dyametri, scilicet 7, in medietatem circumferenciae, scilicet 22 etc. [*f. 395'*] Et quia *ch*, ut patuit, est 4 parcium et *cf* est 5 parcium et $\frac{3}{4}$ unius, ducto igitur *ch* in *cf* provenit superficies trianguli *hfg*, scilicet 23 parcium, ut patet per BOHECIUM in sua geometria practica.[4] Subtraham igitur hanc superficiem trianguli *hfg* de superficie sectoris *hfdg*, quae erat 47 parcium et $\frac{1}{4}$, et remanet superficies porcionis circuli *fdgc* 24 parcium et $\frac{1}{4}$ unius. Subtraham de superficie tocius circuli *fdeg*, quae est 154 parcium, et remanet superficies porcionis maioris circuli *gefc*, quae est 129 parcium et $\frac{3}{4}$ unius, quod erat secundo propositum.

Virgae visor igitur seu geometer accipe tocius circuli *fdgc* superficiem, quae est 154, pro primo numero, et superficiem porcionis circuli *gefc*, quae est 129 et $\frac{3}{4}$ unius, pro secundo, et tocius fundi aequati seu circuli *fdge* capacitatem secundam virgam seu artem tuam inventam virga 40 metretas pro numero tercio, et duc secundum in tercium etc., et proveniet capacitas porcionis fundi aequati, scilicet *gef* 33 parcium et $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{29}$. Quod est 42 [*f. 396*] minuta phisica, per quam multiplicabo longitudinem vasis dolii, et producitur capacitas porcionis vasis, quae quaeritur, quod erat propositum principale; et hoc erit porcionis vasis datae capacitatem invenire.

1458. Alexius episcopus.

[1] Nach der früher gegebenen Regel würde nur 12 als Durchmesser erscheinen.

[2] Der Werth $5\frac{3}{4}$ ist dadurch gefunden, dass 33 mit $\frac{16}{16}$ erweitert ist, und dann statt $\sqrt{528}$ die $\sqrt{529}$ in Rechnung gezogen wurde.

[3] Das Wort *sexta* fehlt im Manuscripte. In der Ausgabe des Almagest: *Almagestum Cl. Ptolomei Pheludiensis etc. . . . Felicibus astris eat in lucem: Ductu Petri Liechtenstein Coloniensis Germani Anno Virginei partus 1515. Die 10 Ja. Venetijs ex officina eiusdem litteraria*, finden sich die im Texte angeführten Worte buchstäblich auf Blatt 68[a] Z. 44—45 im 7. Cap. der *Dictio sexta.*

[4] Hier geht also der Verfasser nicht auf GERBERT sondern auf die Geometrie des BOËTIUS zurück.

III.

[*F. 405'*] *Proposicio prima. Cognita dyametro circuli et sagitta arcus porcionis eius, quantitatem cordae invenire.*

Multiplica sagittam per dyametrum et ex producto subtrahe quadratum sagittae, et remanebit quadratum medietatis cordae. Extrahe igitur radicem, quam dupla, et habebis cordam.[1]

Vel aliter. Subtrahe sagittam a dyametro, et residuum multiplica per sagittam, tunc radix producti est medietas cordae.[2]

Secunda proposicio. Cognita corda et dyametro sagittam invenire.

Subtrahe quadratum medietatis cordae a quadrato medietatis dyametri, et residui accipias radicem, quam subtrahe a semidyametro, et remanebit sagitta.[3]

Tercia proposicio. Cognita corda porcionis circuli et sagitta dyametrum invenire.

Divide quadratum medietatis cordae addito quadrato sagittae per sagittam, et habebis dyametrum.[4]

[1] $\frac{c}{2} = \sqrt{sd - s^2}.$

[2] $\frac{c}{2} = \sqrt{(d-s)s}.$

[3] $s = \frac{d}{2} - \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}$; es ist die Gleichung

$$s^2 - sd + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = 0$$

nach s aufgelöst worden, da der kleinere Abschnitt gemeint ist, so musste das untere Zeichen genommen werden.

[4] $$d = \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + s^2}{s}.$$

IV.

[*F. 400'*] Divide unam liniam (!) in quot partes volueris scilicet in 4, 5, 6, 10, 12, et mitte primum punctum intactum. Et secundum punctum divide in tres partes inaequales tali modo: divide in 19 partes aequales et recipe pro prima divisione 8 partes aequales, et pro secunda recipe 6 partes, et pro tercia 5. Iterum tercium punctum divide in 5 partes inaequales. Et divide primo in 20 partes aequales, et pro quinta accipe $4\frac{1}{2}$, et pro sexta $4\frac{1}{4}$, et pro septima 4 aequales, pro octava $3\frac{3}{4}$ et pro nona $3\frac{1}{2}$. Quartum punctum divide in 7 partes aequales; iterum punctum 5um in 9 partes aequales, et punctum 6um in 11 partes aequales, et punctum 7um in 13 partes aequales, punctum octavum in 15 partes aequales. Iterum punctum 9um in 17 partes aequales et punctum 10^{m} in 19 partes aequales et sic augmentando per 2 et sic ascendendo. Et sic reliqua signa facilis sunt divisionis, quia omnia dividuntur in partes, quae inter se sunt aequales. Confecta igitur hac »virgae«[1] parte potes numero certo quodlibet signum ponere; 1 pro primo signo, et 2 pro secundo et 3 cum tercio signo, et sic de aliis. Quodlibet signum impositum repraesentabit unam mensuram, pro qua facies virgam usitatam.

1458. Jacobi apostoli martyris.

[1] Die Auszeichnung des Wortes *virgae* durch Anführungszeichen findet sich im Manuscripte.

V.

[*F. 400*] Quadra dyametrum columpnae, et quadratum duc in altitudinem columpnae eiusdem, et producti extrahe radicem cubicam, quia ipsa est dyameter circuli, qui circulus est basis columpnae cubicae[1] quaesitae.

Proposicio ex secunda duodecimi EUCLIDIS, quae est:

Omnium duorum circulorum est proporcio alterius ad alteram tamquam proporcio quadrati dyametri unius ad quadratum dyametri alterius.

Sicut igitur habet se quadratum ad circulum, sic cubus ad columpnam eiusdem altitudinis rotundam. Non enim alio modo

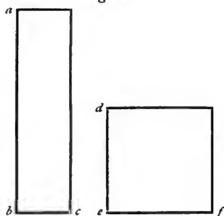
ymaginatur mathematicus de quadrato ad cubum, cuius cubi idem quadratum est basis, vel de circuli ad columpnam rotundam, cuius columpnae idem circulus est basis, nisi sicut de puncto, linia (!) et superficie. Modo sicut ymaginatur, quod punctus serpens producit liniam (!), et linia (!) mota ad latus producit superficiem, et superficies in altum ducta gignit corpus; sic omnino quadratum in altum directe gradiens et terminum sui lateris non excedens generat cubum, et circulus columpnam rotundam. Similiter ergo, quae est proporcio quadrati dyametri ad circulum, eadem est cubi, cuius latus est dyameter basis columpnae, ad columpnam.[2] Item per 2^m duodecimi EUCLIDIS sic se habet quadratum dyametri circuli unius ad quadratum dyametri circuli alterius, sicut circulus ad circulum.

1458. Jacobi apostoli.

[*F. 401'*] *Datam columpnam rotundam altera parte longiorem in columpnam cubicam reducere.*

Sit data columpna [fig. 2] altera parte longior *abc* cuius latus altitudinis *ab* virga ut 16 sit longius lateris latitudinis *bc*, quod sit virga ut 2. Ducatur ergo dyameter *bc* scilicet 2, in se ipsam, et productum ducatur in altitudinem columpnae datae, scilicet 16, et producitur columpna quadrata, cuius capacitas est 64. Cuius capacitatis quaeratur radix cubica, quanto praecisius potest, quae est 4. Super radicem, quae est 4, erigam cubum *def*, cuius cubi basis erit quadratum *ef*, scilicet 16; ergo basis harum quadratarum columpnarum ipsarum altitudinibus erunt mutuae seu muthalkesiae (!). Sicut enim se habet basis columpnae *def*, scilicet 16, ad basim columpnae *abc*, scilicet ad 4, sic e converso altitudo columpnae *abc* scilicet 16, ad altitudinem *def*, scilicet ad 4. Ergo per secundam partem 35^{ae} undecimi EUCLIDIS columpnae quadratae *abc* et *def*, seu columpna et cubus sunt aequales.

Fig. 2.



Linea igitur *ef* facta dyametro circinabo circulum *ef*, et eo basi facto erigam columpnam [*f. 402*] rotundam in eadem altitudine *ef* seu *ed*. Et quia per 2^{am} duodecimi EUCLIDIS sicut se habet quadratum *ef* ad quadratum *bc*, sic circulus *ef* ad circulum *bc*, ergo bases harum columpnarum rotundarum erunt similes altitudinibus earum mutuae, ergo per secundam partem duodecimi EUCLIDIS ipsae columpnae rotundae erunt similiter

aequales, ergo etc. Et conficiatur quaerendo capacitatem utriusque earum singillatim; idem proveniet utrobique. Similiter est de dyametro ut 4 et altitudine ut 32 etc. duplicando.

Nota. Columpnam rotundam altera parte longiorem, cuius basis dyameter est ut 16, et axis ut 35 ad columpnam cubicam modo vulgari redigere.

Excessum axis columpnae super dyametrum basis eius, scilicet 19, divide in 4 partes aequales, et proveniet scilicet $4\frac{3}{4}$. Super dyametrum basis columpnae additum producit dyametrum basis columpnae cubicae quaesitae, quod est 20 et $\frac{3}{4}$, quod est prope veritatem, quia verior dyameter est 20 et 46 minuta.[3]

Si vero axis columpnae praedictae dyametrum basis eius, scilicet ut 16, in 9 tantum excesserit, tunc illius excessus accipe $\frac{2}{7}$, quod est 2 et $\frac{4}{7}$, et super dyametrum basis columpnae adde, et proveniet dyameter basis columpnae cubicae, scilicet 18 et $\frac{4}{7}$ unius.[4]

Si vero axis columpnae rotundae praedictae dyametrum basis eius, scilicet 16, tantum in 2 excedat, tunc accipe $\frac{1}{3}$ illius excessus, quod est $\frac{2}{3}$ unius, quod adde super dyametrum basis eius, et proveniet dyameter basis columpnae rotundae cubicae quaesitae, scilicet 16 et $\frac{2}{3}$ unius, quod est similiter prope veritatem.[5] Quod totum probare et examinare poteris, ut supra de columpna rotunda.

[1] *Columpna cubica* ist ein Cylinder, dessen Höhe gleich seinem Durchmesser ist, er heisst *cubicus,* weil er in einen Würfel einbeschrieben werden kann.

[2] Die genetische Entstehung der Linien, Flächen und Körper, wie sie der Verfasser hier auseinandersetzt, ist nicht ohne Interesse.

[3] Nach obiger Regel wurde der Durchmesser 20,77 sein. $20\frac{3}{4}$ ist also um 0,02 zu klein, dagegen $20\frac{46}{60}$ um $\frac{2}{600}$ zu klein.

[4] Hier wäre also die Axe des Cylinders $= 25$ und nach der Regel müsste der Durchmesser $= \sqrt[3]{6400}$ werden, d. h. $= 18{,}566$. $18\frac{4}{7}$ ist aber 18,561, also ist auch hier die praktische Regel fast genau richtig.

[5] Hier müsste nach obiger Regel der richtige Durchmesser $= \sqrt[3]{4608} = 16{,}64$ sein; er wird aber $= 16{,}66$ berechnet.

VI.

[*F. 396*] *Nota.* Quia vult CAMPANUS circa 43^{am} primi EUCLIDIS et ipse EUCLIDES diffinicione 2^{a} secundi quod duo

supplementa cum quadrato circa dyametrum consistente complent gnomonem, scilicet superficialem, qui gnomon additus quadrato gignitur quadratum novum, et hoc est quod dicit ARISTOTELES: *Quadratum addito sibi gnomone crescit, sed non mutatur,*[1] id est, facit quadratum maius sed a quadrati specie non recedit. Modo sicut hoc sit in superficie, ita praecise fit idem in solido. Solum postquam haec ducuntur in se superficialiter, illa, scilicet pro gnomone cubico seu solido, debent in se duci seu fieri solide. Et sic a quadrato et supplementis superficialibus producuntur supplementa solida et quadrata vel cubelli solidi, qui gnomonice cubum constituunt. Cubicum dico, quia additus cubo priori alium constituit.

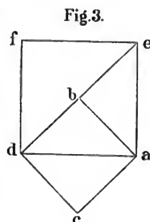
1458. In vigilia Mariae Magdalenae.

[1] Die Stelle des ARISTOTELES, ist bei BOËTIUS *In Aristotelis praedic.* p. 212 der Ausgabe Basileae 1570 abgedruckt in folgender Fassung: *Si quadrato addatur gnomon, crescit quidem quadratum, non tamen commutatur.*

VII.

[*F. 394*] *Dyametri quadrati ad costam eiusdem medietas duplae proporcionis esse demonstretur.*

Sit [fig. 3] quadratus *adef*, cuius dyameter *ed*, quam divide per medium in puncto *b*, et describatur aliud quadratum *bdca*, cuius dyameter necessario erit costa quadrati prioris *ad*. Sequitur igitur, sicut se habet dyameter quadrati maioris *ed* ad costam quadrati eiusdem *ad*, sic se habet *ad* dyameter quadrati minoris ad costam quadrati eiusdem minoris *bd*. Sed primi scilicet *ed* ad ultimum, scilicet *bd*, est proporcio dupla per ypothesin, et cum proporcio extremorum componitur ex proporcionibus intermediorum, ut vult EUCLIDES diffinicione 19ª septimi, et deducitur in secundo libro de 36 modis proporcionum[1] sufficienter. Cum autem inter mediis sit proporcio continua, sequitur necessario, quod *ed* ad *ad* est medietas duplae proporcionis, et *ad* ad *ab* in reliqua medietas proporcionis duplae eiusdem.[2]



1458. In die Margarethae.

[1] Diese Abhandlung findet sich in vielen mittelalterlichen Handschriften. Es ist die Abhandlung des AHMED BEN JUSUF

De proporcionibus et proporcionalitate. Sie steht z. B. im Codex Db 86 der Dresdener Bibliothek.

[2] Hier ist die Bezeichnung der $\sqrt{2}$ durch *medietas proporcionis duplae* nach Art des ORESME in dessen *Algorismus proportionum* gewählt.

Zum Schlusse bemerke ich noch, dass die Handschrift der Königl. Hof- und Staatsbibliothek zu München Cod. lat. N° 56 von Blatt 219 an das unter N° I abgedruckte Stück ebenfalls, wenn auch in etwas anderer Reihenfolge, sowie nicht in genau demselben Umfange enthält. Der Wortlaut ist jedoch bis auf orthographische Kleinigkeiten vollständig derselbe.

Per Leon Battista Alberti.

Di GINO LORIA a Genova.

Nel rileggere di recente le pagine (Bd. II, 268—270) delle *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik,* che M. CANTOR consacrò a LEON BATTISTA ALBERTI mi accadde di avvertire in esse poche inesattezze e certe lacune che mi sembra opportuno di rettificare e colmare, fidando che l'illustre storico vorrà accogliere con animo sereno queste mie osservazioni fatte, non per rilevare qualche nèo nella sua grande opera, ma per approntargli i materiali capaci di renderla più vicina alla desiderata perfezione e per delineare con maggiore esatezza i lineamenti di una fra le più eminenti personalità del secolo XV.

Anzitutto qualche parola di biografia.[1] La famiglia ALBERTI è una delle più illustri ed antiche della Toscana; oriunda dal Casentino, fino dal sec. XIII la troviamo in Firenze godente il diritto di risiedere nel supremo ufficio del consolato; ebbe parte attivissimo nelle lotte che durante il Medio Evo dilaniarono la patria di DANTE ed ebbe in conseguenza da patire di quando in quando persecuzioni ed esigli. Appunto durante uno di questi bandi da LORENZO ALBERTI nacque, probabilmente in Genova ai 14 o ai 18 di Febbrajo del 1404, il celebre architetto di cui intendiamo occuparci. La prima educazione di questo venne fatta del padre; alla morte del quale (24 Maggio 1421) troviamo LEON BATTISTA studente di diritto canonico a Bologna, ove poi ventiquattrenne conseguì la laurea dottorale. Non è questo il luogo di narrare le vicende dell' uomo di cui ci occupiamo, le avventure che ebbe, i lunghi e numerosi viaggi che condusse a termine, gli svariati uffici che coprì, nè tampoco di tracciare partitamente un quadro della sua poliedrica attività intellettuale,[2] la quale gli meritò di prendere posto in quella nobile schiera di pensatori enciclopedici che hanno per prototipi nell' antichità EUDOSSO da Cnido e nei tempi moderni LEONARDO DA VINCI.[3] Giova però ricordare come una sua invenzione ottica fatta in giovanile età lo dimostri di buon' ora ben nutrito di cognizioni scientifiche e come le sue scritture *Della Statua, Della Pittura,* e *Gli Elementi di pittura*[4] abbiano somministrato a scultori e pittori i più sani precetti artistici fondati sopra proposizioni matematiche.

Un opuscolo di *Prospettiva* venne a lui attribuito ed in conseguenza pubblicato dal BONUCCI, ma che gli appartenga in realtà è assai dubbio; siccome però sembra assicurato che l'ALBERTI si sia occupato di quell' argomento, così si può sperare che un giorno ritorni alla luce il suo scritto che vi si riferisce, se vero è che *quidquid sub terra est in apricum proferet aetas*. La sua grande opera intitolata *Arte aedificatoria* gli procurò tal fama che in conseguenza (fatto questo che non è ipotetico come sembra credere il CANTOR) un poeta cantò:

Nec minor EUCLIDE est ALBERTUS: vincit et ipsum
VITRUVIUM: quisquis celsas extollere moles
Affectat, nostri relegat monumenta BATISTAE;

in essa sono citati dei *Commentarii delle cose matematiche* scritti in latino, ne' quali »insegnava partitamente» in qual modo e con quali ragioni si descrivono e disegnano gli angoli coi numeri e con le linee, »precetti, i quali si aggirano sui pesi e sulla misura delle superficie e de' corpi, e che i Greci appellano podismati ed embadi», ma qual sorte abbiano avuto ci è totalmente ignoto. Per converso è stata conservata una raccolta non priva d'interesse di problemi geometrici,[5] intitolata *Ludi matematici* e dedicata al principe MELIADUSO fratello di LEONELLO D'ESTE marchese di Ferrara. Questo libretto fu composto (probabilmente prima del 1450) per soddisfare ad un desiderio del principe al quale è dedicato, quello cioè di conoscer le regole per misurare la superficie dei terreni. I precetti esposti sono (l'ALBERTI medesimo avverte) non originali ma desunti da COLUMELLA, SAVASORDA (geometra ebreo del sec. XI) e LEONARDO PISANO. LEON BATTISTA vi aggiunse l'esposizione di procedimenti per misurare le altezze, le distanze, le profondità per mezzo di triangoli, non tacendo delle costruzione e dell' uso di certi strumenti dei quali sarebbe fuor di luogo il ragionare quì; soltanto facciamo un eccezione per quel meccanismo[6] (chiamato più tardi *bolide albertiana* ed a torto attribuito talvolta all' HOOK)[7] destinato a misurare la profondità che ha il mare ne' punti in cui non può giungere lo scandaglio.[8]

Una breve appendice ai citati *Ludi matematici* fu di recente pubblicata, coll' ajuto di F. SIACCI, dal prelodato biografo dell' ALBERTI.[9] Essa contiene la quadratura della lunula avente per arco esterno una semicirconferenza che diciannove secoli avanti IPPOCRATE da Chio aveva considerata e misurata. L'autore l'espone nell' intento di dimostrare erronea »l'oppenione» (che egli fa risalire sino ad ARISTOTELE) »de molti che dicono che le figure contente da linee curve et circolare perfettamente non

si dà la loro quadratura». Osserviamo che egli stesso non seppe trattenersi da una generalizzazione affrettata — simile a quella che alcuni vogliono non abbia saputo evitare quel geometra greco — che egli manifesta, come chiusa alla sua memorietta con le parole: »che come è trovato il quadrare questa figura lunare contenta da due curve linee, che similmente è possibile quadrare il circolo».

Da questi brevi cenni ci sembra risultare che LEON BATTISTA ALBERTI (la cui esistenza finì a Roma l'anno 1472) piuttosto che un continuatore del movimento intellettuale che ha le proprie origini nel periodo aureo della geometria greca, deve di preferenza collegarsi al più antico scrittore conosciuto di geometria pratica, ERONE d'Alessandria, col quale egli ha commune la tendenza a compiere anche quelle ricerche geometriche che sono destitute di immediata applicazione pratica, tendenza di cui difficilmente si troverebbe traccia fra gli eredi diretti della geodesia greca, cioè gli agrimensori romani.

[1] Cfr. GIROLAMO MANCINI, *Vita di Leon Battista Alberti* (Firenze 1882); opera che è frutto di coscienziose ricerche, che largamente sfruttammo nel redigere il presente articolo, ed a cui rimandiamo il lettore desideroso di completare le nostre notizie e valutare i documenti che ne dimostrano l'esatezza. Cfr. la recensione fattane dal FAVARO nel Bullettino di bibliogr. d. sc. matem. **16**, 1883, p. 325—332.

[2] Vedi LEON BATTISTA ALBERTI, *Opere volgari per la più parte inedite e tratte dagli autografi annotate e illustrate dal Dott.* ANICIO BONUCCI (4 vol., Firenze 1844—1847).

[3] Cfr. il bell' articolo di W. R. THAYER, *Leonardo da Vinci as a pioneer in science* in The Monist (Chicago), July 1894.

[4] ALBERTI, *Gli elementi di pittura per la prima volta pubblicati* (Cortona 1864).

[5] È quella che il BARTOLI nel 1668 pubblicò modificandone arbitrariamente il titolo in *Piccolezze matematiche,* sotto il quale viene citata dal CANTOR (l. c. p. 263).

[6] Cfr. CAVERNI, *Storia del metodo sperimentale in Italia* **1** (Firenze 1891) p. 72.

[7] Cfr. gli Atti della Società reale di Londra, Seduta del 12 febbrajo 1665.

[8] A complemento del testo diamo qui gli enunciati dei problemi trattati nei *Ludi:* I. Del modo di misurare l'altezza di una torre da un luogo discosto da cui la si vede. II,

III. Come possa misurarsi l'altezza di una torre da un luogo discosto da cui si vede la cima di essa. IV. Problema analogo nella ipotesi che la torre sia inaccessible ma ne sia visible il piede e la cima. V. Come possa misurarsi la largezza di un fiume d'in sulla sponda. VI. Come si giunga a sapere quanto sia alta una torre di cui solo apparisce la cima. VII. Modo per misurare la profondità d'un pozzo insino all' acqua. VIII. Modo per misurare la profondità di qualunche mare. IX, X. Costruzione di orologi. XI. Modo per conoscere l'ora della notte col solo vedere. XII. Modo di misurare i campi. XIII. Modo di regolare le acque correnti. XIV. Modo di misurare un peso enormamente maggiore di quel che possa comportare una stadera. XV. Problema di balistica. XVI. Modo di misurare il circuito di una terra. XVII—XIX. Procedimenti e strumenti per misurare le distanze. XX. Esposizione del *problema della corona* di ARCHIMEDE.

[9] LEONIS BAPTISTAE ALBERTI *Opera inedita et pauca separatim impressa*. HYERONIMO MANCINI *curante* (Florentiae 1890), p. 305—307: De lunarum quadratura, Cod. magliab. VI f° 77, 243.

Zur Geschichte des Jakobsstabes.

Von H. Suter in Zürich.

In den Artikeln: *Die erste Anwendung des Jakobsstabes zur geographischen Ortsbestimmung*[1] und *Levi ben Gerson und der Baculus Jacobi*[2] betrachten S. Günther und M. Steinschneider den in Avignon 1344 verstorbenen jüdischen Gelehrten Levi ben Gerson als den Erfinder oder wenigstens den ersten Beschreiber des Jakobsstabes. Ich glaube nun diese Ansicht durch folgende Mitteilung rectificieren zu können.

In dem biographischen Werke des Ibn Challikân, betitelt: *Wafajât el a'jân* (Tod der Vornehmen) befindet sich[3] die Biographie des Kemâl ed-Dîn Mûsâ ben Abî'l-Fadl Jûnis, die ich in ihren wesentlichen Stellen wiedergebe, da der genannte ein in Mathematik sehr bewanderter Gelehrter war.

»Abû'l-Fath Mûsâ ben Abî'l-Fadl Jûnis ben Muhammed ben Man'a ben Mâlik ben Muhammed, zubenannt Kemâl ed-Dîn el-Fakîh esch-Schâfi'î, studierte in Mosul unter seinem Vater, begab sich dann nach Bagdad im Jahre 571 (1175—76) an das Collegium en-Nizâmijja, und arbeitete daselbst unter dem Repetitor es-Sadîd es-Salamâsî. Zu jener Zeit war daselbst Lehrer (des Rechtes) der Schaich Ridâ esch-Schîrâzî Abû'l-Chair Ahmed ben Isma'îl ben Jûsuf ben Muhammed ben el-'Abbâs el-Kazwînî; Kemâl ed-Dîn studierte hier die Rechtscontroversen und die Grundzüge (des Rechtes), ebenso die Literatur unter Kemâl(ed-Dîn) Abû'l-Barakât 'Abderrahmân ben Muhammed el-Anbârî. Vorher schon hatte er beim Schaich Abû Bekr Jahja ben Sa'dûn el-Kortubî studiert und sich ausgezeichnet. Hierauf wandte er sich wieder nach Mosul zurück und lag fleissig der Arbeit ob und lehrte nach dem Tode seines Vaters in der Moschee, die nach dem Emîr Zain ed Dîn, dem Beherrscher von Arbela, benannt ist. Diese Moschee habe ich gesehen, sie ist nach Art eines Collegiums gebaut und heisst auch das Kemâlische Collegium, es erhielt diesen Namen, weil Kemâl ed-Dîn solange in demselben wirkte und zu ihm, als er berühmt geworden, von allen Seiten die Theologen herbeiströmten. In allen Gebieten zeigte er ein reiches Wissen und vereinigte in sich die Kenntniss so vieler Disciplinen, wie selten Einer. Er zeichnete sich besonders in den mathematischen Wissenschaften aus; ich sah ihn in Mosul im Monat Ramadân

626 (1229) und bin öfters bei ihm ein- und ausgegangen, da zwischen ihm und meinem Vater intime Freundschaft bestanden hatte. Es wurde mir freilich nicht zu Teil, Unterricht von ihm zu erhalten, denn ich konnte nicht lange in Mosul bleiben und verreiste bald wieder nach Syrien. Die Theologen behaupteten, dass er eine genaue Kenntniss von 24 Disciplinen hatte; zu diesen gehörte das Schâfîtische Recht, hierin war er der erste seiner Zeit. — — — Er war bewandert in der Philosophie, Logik, Physik, Metaphysik, Medicin; er kannte die mathematischen Wissenschaften, den EUCLIDES und die Astronomie, die Kegelschnitte, die verschiedenen Mittel (wahrscheinlich die verschiedenen Konstructionen der beiden mittleren Proportionalen) und den *Almagest,* ebenso die verschiedenen Arten der Rechenkunst, nämlich die Algebra, die Arithmetik und die Regel der beiden Fehler; dann die Musik und die Ausmessung der Figuren, eine Disciplin in welcher er nicht seines Gleichen hatte, man sähe dann etwa nur auf die oberflächliche Kenntniss dieser Dinge, nicht auf ihre tiefere Ergründung und Wahrheit. Er fand auch in der Wissenschaft der Amulete und magischen Quadrate[4] Verfahren, auf welche bisher Niemand gekommen war. Er machte auch in der arabischen Sprache und Flexionslehre so vollkommene Untersuchungen, dass er im Stande war das Buch des SÎBAWAIH und die *Idâh* und die *Takmila* des ABÛ ʿALÎ EL-FÂRISÎ und den *Mufassal* des ZAMACHSCHARÎ zu lesen. In der Interpretation (des Korân) und in der Traditionswissenschaft und was damit in Verbindung steht, und der Namenkenntniss (von Männern der Geschichte) hatte er eine grosse Sicherheit. Er kannte die Epochen und Tage der arabischen Geschichte, das Datum der Schlachten, viele Poesien und Gespräche auswendig. Juden und Christen hörten bei ihm die Thora und das Evangelium, und er erklärte ihnen diese beiden Bücher so gut, dass sie anerkennen mussten, sie würden keinen finden, der ihnen diese Bücher so auslegen könnte, wie er. Er war in jeder Disciplin so bewandert, wie wenn er nur diese allein studiert gehabt hätte; kurz, man hat von keinem, der vor ihm war, gehört, dass er alle jene Disciplinen mit seinem Wissen umfasst habe. — — — Es stand ATHÎR ED-DÎN EL-MUFADDAL EL-ABHARÎ (der Verfasser der *Taʿlîka fîʾl-chilâf,* der astronomischen Tafeln und anderer berühmter Werke)[5] auf dem Gipfel seines Ruhmes, als er noch das Buch in die Hand nahm und sich zu seinen Füssen setzte und ihm vorlas (d. h. von ihm die Erklärung des Vorgelesenen erhielt), und zur selben Zeit beschäftigten sich die Studierenden mit den Werken des ATHÎR,

was ich mit eigenen Augen gesehen habe; Athîr studierte auch noch (unter Kemâl ed-Dîn) den *Almagest*. Es erwähnt ihn (Kemâl ed-Dîn) auch Abû' l-Barakât ben Mustaufî, wenn er in seiner Chronik von Arbela sagt: er war weise, bahnbrechend in jeder Wissenschaft, besonders in denen der Alten, wie Geometrie, Logik und andern. Das beweisen die Lösungen der Schwierigkeiten im Euklides und Almagest für den Schaich Scharaf ed-Dîn el-Muzaffar ben Muhammed ben el-Muzaffar et-Tûsî el-Kârî (d. Korânleser), den Erfinder des Linear-Astrolabiums, bekannt unter dem Namen »der Stab». Ferner sagt Ibn el-Mustaufî: Es kamen ihm Fragen zu aus Bagdad über die schwierigen Partien dieser Wissenschaft, die er mit geringer Anstrengung löste und die Beweise dazu gab. — — — Im Jahre 633 (1235—36) war ich in Damaskus, wo damals ein Mann lebte, der in den mathematischen Wissenschaften sich auszeichnete; er fand einige schwierige Punkte in arithmetischen, algebraischen und Vermessungs-Aufgaben und im Euklides, diese schrieb er alle auf ein Blatt Papier und schickte sie nach Mosul (zu Kemâl ed-Dîn); nach einigen Monaten kam die Antwort zurück und das Räthselhafte und Verborgene war enthüllt und klar gelegt. — — — Er (Kemâl ed-Dîn) wurde geboren am Donnerstag den 5. Safar 551 (1156) in Mosul und starb daselbst am 14. Schaʿbân 639 (1242), er wurde auf dem nach seiner Familie benannten Gottesacker begraben, neben dem Gottesacker *Gassân*, ausserhalb des Thores *ʿIrâk.*» [6]

Aus der gesperrt gedruckten Stelle ersehen wir, dass Scharaf ed-Dîn el-Muzaffar ben Muhammed et-Tûsî, ein Zeitgenosse des Kemâl ed-Dîn Mûsâ ben Jûnis, der Erfinder des Linear-Astrolabiums, genannt der Stab (*el-ʿassâ*) war. Dorn führt in seiner Abhandlung *Drei astronomische Instrumente mit arabischen Inschriften*, etc.[7] zwei verschiedene Instrumente an, das Linear-Astrolabium und den Stab des Tûsi, bemerkt aber gar nichts über ihre Beschaffenheit, auch nicht in welchen Schriften er dieselben citiert gefunden habe. In dem *Mémoire sur les instruments astronomiques des Arabes*[8] von L. A. Sédillot ist an mehreren Stellen (pg. 27, 36 und 191) von dem »astrolabe linéaire ou la baguette de Nasir ed-Din Tousi» die Rede, aber nirgends eine Beschreibung desselben zu finden; Sédillot verspricht pg. 191 eine Arbeit über Nasîr ed-Dîn, in der er dann über die »baguette de Tousi» handeln werde, deren Beschreibung das Ms. arab. N:o 1148[9] auf Blatt 120 ff. enthalte, allein diese Arbeit Sédillot's ist meines Wissens nie erschienen.

Dass nun hier und bei IBN CHALLIKÂN das Linear-Astrolabium und der Stab des Tûsî als ein und dasselbe Instrument bezeichnet werden, macht es mir *sehr wahrscheinlich*, dass dieses Instrument der Jakobsstab sei, obgleich MAX GUCKIN DE SLANE im 3. Bd. seiner Übersetzung des IBN CHALLIKÂN (pg. 474) der Ansicht ist, dieses Instrument sei nicht identisch mit dem Jakobsstab, für diese Behauptung aber gar keine Gründe anführt. Klarheit ist in diese Sache nur zu bringen durch Veröffentlichung der betreffenden Stellen des Ms. ar. 1148, fol. 120 ff.; vielleicht würde Herr Baron CARRA DE VAUX in Paris die Güte haben, diese Arbeit zu übernehmen.

Nach dem, was ich oben aus IBN CHALLIKÂN citiert habe, ist SÉDILLOT (resp. ABÛ'L-HASAN 'ALÎ von Marokko) im Irrthum begriffen, wenn er dieses Instrument dem NASÎR ED-DÎN ET-TÛSÎ zuweist, der gleiche Abstammungs-Beiname (*et-Tûsî*) hat jedenfalls zu dieser Verwechslung geführt. Übrigens würden die zeitlichen Beziehungen auch nicht stimmen; SÉDILLOT gibt in dem *Traité des instruments astronomiques des Arabes, composé au 13. siècle par* ABOUL HHASSAN ALI de Maroc, etc. (Paris 1834) pg. 13—14, als Jahr der Abfassung dieses Werkes 1229 oder 1230 an, allein die wissenschaftliche Tätigkeit NASÎR ED-DÎNS fällt in die Jahre 1240—74; ich halte freilich die Gründe, die SÉDILLOT für Annahme jener früheren Abfassungszeit beibringt, nicht für stichhaltig, ich glaube, dass 'ALÎ von Marokko eher gegen das Ende des 13. Jahrhunderts gelebt hat.

Nachträglich sei bemerkt, dass in KAZWÎNÎ's Cosmographie (Edid. WÜSTENFELD, 1848—49, Bd. II., pg. 310) eine Stelle sich findet, die sich auf KEMÂL ED-DÎNS mathematische Leistungen bezieht, und von Interesse ist; ich gebe sie im Folgenden wieder:

»Von Mosul stammt auch der Schaich KEMÂL ED-DÎN BEN JÛNIS, er vereinigte alle Disciplinen in seinem Wissen, keiner kam ihm gleich zu seiner Zeit in jedem Wissenszweig, über den man mit ihm disputieren mochte, gleich als ob er der Begründer dieser Wissenschaft gewesen wäre. Was die mathematischen Disciplinen betrifft, so stand er einzig da in ihrer Kenntniss; zu dem Wunderbaren, was ich von ihm vernommen habe, gehört folgendes: Die Franken (Europäer) sandten zur Zeit des MELIK EL-KÂMIL[10] Fragen nach Syrien, deren Beantwortung sie erbaten; es waren dies Fragen aus der Medicin, aus der Philosophie und der Mathematik; die medicinischen und die philosophischen beantworteten die Leute (Gelehrten) Syriens selbst, aber den geometrischen waren sie nicht gewachsen; da

aber EL-MELIK EL-KÂMIL verlangte, dass alle Fragen beantwortet würden, so sandte man die geometrische an MUFADDAL BEN ʿOMAR EL-ABAHRÎ, in Mosul, unsern Lehrer, der seines Gleichen in der Geometrie nicht hatte; doch die Beantwortung derselben war ihm zu schwer, er übergab sie daher dem Schaich IBN JÛNIS, der sie studierte und löste, die Aufgabe war folgende: Es sei ein Bogen gegeben, man ziehe seine Sehne und verlängere sie über den Kreis hinaus und konstruiere auf der verlängerten Sehne ein Quadrat, dessen Fläche gleich sei derjenigen des Bogenstückes.[11] Hierauf fand dann EL-MUFADDAL den Beweis dazu, machte aus dem Ganzen eine Abhandlung und sandte sie nach Syrien an EL-MELIK EL-KÂMIL. Als ich (KAZWÎNÎ) nach Syrien reiste, sah ich die vortrefflichsten Gelehrten Syriens in Verwunderung über diese Abhandlung, sie lobten auch die Auffindung des Beweises, denn er war ein seltenes Erzeugniss zu jener Zeit.»

[1] Biblioth. Mathem. 1890, pg. 73 und ff.

[2] Ibid. pg. 107.

[3] Kairenser Ausgabe vom Jahre 1310 d. H. (1892—93), 2. Bd. pg. 132—134.

[4] Andere Mss. des IBN CHALLIKÂN haben statt *aufâk,* was eben »Amulete oder auch magische Quadrate» bedeutet, *aukât,* und dann müsste es durch »Zeiten» oder auch »Zeitbestimmungen» wiedergegeben werden, welche Lesart MAX GUCKIN DE SLANE vorzieht.

[5] War ein bedeutender Mathematiker, Astronom und Logiker; er starb nach HADSCHÎ CHALFA (VI, 473 und III, 538) ums Jahr 660, nach einer andern Stelle (I, 502) desselben Autors um 700, die erste Angabe wird wohl die richtigere sein.

[6] Aus dem biographischen Werke *Fawât el-wafajât* des MUHAMMED BEN SCHÂKIR EL-KUTBÎ, welches eine Fortsetzung und Ergänzung desjenigen von IBN CHALLIKÂN ist, entnehme ich, dass KEMÂL ED-DÎN der Lehrer NASÎR ED-DÎN ET-TÛSÎ's war; diese Notiz findet sich in der Biographie des NASÎR ED-DÎN (Bulâker Ausgabe vom Jahre 1283 (1866), 2. Bd. pg. 186—189).

[7] In den Mémoires de l'acad. impér. des sciences de St. Pétersbourg, VII. Série, Tome IX, pg. 84 und 87.

[8] Mémoires présentés par divers savants à l'acad. roy. des inscriptions etc. I. Série, Tome I.

[9] Dieses Mscrpt., sowie N:o 1147, enthalten die Abhandlung

des ABÛ'L-HASAN 'ALÎ von Marokko über die astronomischen Instrumente der Araber. N:o 1147 und einige Partien aus 1148 wurden übersetzt von I. I. SÉDILLOT und herausgegeben von dem Sohne L. A. SÉDILLOT unter dem Titel: *Traité des instruments astronomiques des Arabes, composé au treizième siècle par* ABOUL HHASSAN ALI *de Maroc, intitulé* etc. (Paris 1834—1835, 2 tomes). In dieser Ausgabe finden sich nun eben gerade diejenigen Stellen des Ms. 1148 nicht, die die Beschreibung des Stabes des Tûsî ent halten.

10 EL-MELIK EL-KÂMIL war der mit FRIEDRICH II. in freundschaftlichen Beziehungen stehende bedeutendste Ejjubide, der Sultan von Egypten, der von 1228 bis zu seinem 1238 erfolgten Tode auch im Besitze des grössten Teils von Syrien war. Wahrscheinlich kamen diese wissenschaftlichen Fragen von europäischen Gelehrten durch Vermittlung FRIEDRICHS II. an EL-MELIK EL-KÂMIL, resp. nach Syrien.

11 Also Quadratur eines Segmentes; die Stelle oben, wo von der Ausmessung der Figuren die Rede ist, wird sich also wesentlich auf diese Aufgabe beziehen.

Die Mathematik bei den Juden.

Von Moritz Steinschneider in Berlin.

Afrika.

16. Auch hier halten wir uns nicht ganz genau an dem Faden der Chronologie, indem wir einen Blick auf diesen Weltteil werfen, um dann uns von jenem weiter leiten zu lassen.

Wir beginnen mit der allgemeinen Bemerkung, dass die Entwickelung der sogenannten profanen Wissenschaften unter den Juden mit den äusseren Schicksalen dieses, allmälig in alle Welt zerstreuten Volkes selbst zusammenhänge; namentlich mit dessen Verhältnissen zu den Ländern, worin es Aufnahme oder Aufenthalt fand und an dem Culturzustande der Eingebornen und Heimischen mehr oder weniger teilnahm, ohne irgendwo ausser *allem* Zusammenhang mit den Glaubensgenossen anderer, oft an den Enden des damals bekannten Erdkreises liegenden Erdstriche zu kommen. Dem Culturhistoriker begegnet hier die, von einem *Einzelnen* nicht wohl zu lösende Aufgabe, mit den vertriebenen und sonst fleissig wandernden und damit Zusammenhang und Anhänglichkeit erhaltenden Juden Länder und Zeiten mit ihren allgemeinen Culturzuständen zu durchforschen, um die, in jüdischen Quellen zu findende Kenntnis und Wissenschaft auf deren, nahe oder fern liegenden, Ursprung zurückzuführen, mitunter auf sonderbaren und ermüdenden Kreuz- und Querwegen. Wie schwer, oft unmöglich, ist es da, festzustellen, was den andersgläubigen Bewohnern des Heimatlandes eines Juden, was einem fremden Lande, vielleicht durch persönlichen oder schriftlichen Verkehr, entlehnt, was einer etwaigen alten vererbten Kunde, was dem Genie und der Erfindung des Einzelnen angehöre. Diese Erörterung war hier am Orte, wo wir zuerst jene weite Wanderung antreten und, vom Laufe der Zeit geleitet, oft zu grossen räumlichen Sprüngen gezwungen sein werden.

Die Culturgeschichte der Juden im Mittelalter hat sich an eine, hauptsächlich im *Ritus* hervortretende, Dichotomie gewöhnt, nämlich: Juden unter *Muslimen*, oder unter *Christen*. Erst in neuester Zeit, wo überhaupt die Geschichte der profanen Wissenschaften unter ihnen zur Beachtung kam, fand man diese Zweiteilung in diesem engeren Kreise am meisten maassgebend, das heisst in der Grundzügen; Einzelnes muss mit Rücksicht auf

besondere verschiedenartige Umstände auch in seiner Besonderheit untersucht und aufgefasst werden. Hier soll nur eine kurze Bemerkung diese allgemeine Vorbetrachtung abschliessen.

Sie betrifft den Zusammenhang der Juden in Bezug auf eine *Autorität.*

Schon in der babylonischen Gefangenschaft entwickelte sich eine *politische* oberste Autorität unter wenig bekannten Umständen und dauerte durch das ganze Mittelalter. Die Inhaber dieser Würde, welche ihr Geschlecht, mit Recht oder Unrecht, von König DAVID ableiteten, wurden (im sing.) *Resch Geluta,* d. h. Exilarch genannt.[1] Die oberste Autorität in Palästina war eigentlich die sogenannte grosse Synode, später das Synhedtion, welchem 3 Würdenträger vorstanden. Der angemaassten Macht der fremdgeschlechtlichen »Könige» aus der Familie des HERODES gegenüber bildete sich allmälig eine Autorität der *Gelehrsamkeit* aus, welche in *Scholarchen* ihre Vertretung fand. Das Geschlecht des HILLEL (kurz vor Christus) erhielt den Titel *Nasi* (Fürst, auch »Patriarch»), der später von angeblichen Abkömmlingen dieser Familie und verschiedenen sonst angesehenen Familien geführt wurde,[2] — mit mehr oder weniger freiwilliger Unterwerfung seitens der Länder und Städte, — teils von Regierungen zur bequemen Ausführung der Judenverordnungen, insbesondere der drückenden Judensteuer, bestätigt oder eingeführt wurde. Aus den stets gepflegten Talmudschulen stammt auch der Titel *Rab* oder *Rabbi* (Lehrer), der, durch die freie Wahl einer Gemeinde, Genossenschaft u. dergl. mit einer gewissen Stellung verbunden, sich in *Rabbenu* (unser Lehrer) verwandelte, woraus unser »Rabbiner» geworden, der nichts weniger als »Geistlicher» zu nennen ist. Eine quellenmässige Geschichte der Autorität im Judentum ist merkwürdigerweise noch heute ein Desideratum, obwohl sie auch von Wichtigkeit für alle practischen Fragen im Judentum ist.[3] Die Schwankungen in den Begriffen und Bezeichnungen erschweren allerdings die an sich weitschichtige Untersuchung, für welche einzelne Vorarbeiten existiren. Dabei ist auch der äussere Einfluss der Landesregierung auf das jüdische herkömmliche Recht zu beachten. Unter den vielfachen und veränderten Einrichtungen zur Feststellung und Abgrenzung einer Autorität ist das sogenannte »Gaonat» von grösster Bedeutung für die jüdischen Studien im Mittelalter.

17. Unter der Herrschaft der Khalifen zu Bagdad blühten in der Nähe der Residenz 2 hohe talmudische, mit einander wetteifernde Schulen zu Sura (oder Syra) und Pumbedita, deren Rector, oder Präsident, den Titel *Gaon* führte, ein Wort, das

in der Bibel »Hochmut» bedeutet,[4] aber nach seiner Etymologie auch für »Hoheit» angewendet werden konnte, später auch andern ausgezeichneten Gelehrten und Rabbinern beigelegt wurde. Die Chronologie dieser Scholarchen interessirt uns hier nicht.[5] Diese Schulen, wie alle anderen jüdischen bis zur Zeit MENDELSOHN's, beschäftigen sich ausschliesslich mit dem Studium der Hauptquelle des jüdischen Rechts, dem Talmud, also nur indirect mit der Bibel; unter Recht (hebr. *Halacha*, Vorschrift) muss man aber hier die »Gottesrechtslehre» verstehen, welche, wie das indische *Dharma* und das arabische *Fikh*, auch die religiösen Pflichten begreift, welche nach Methode und Analogie des eigentlichen Rechtes behandelt wurden, daher auch in einander griffen, so dass der Richter ebensowohl Sittenrichter war. MAIMONIDES fasst die *literarische* Thätigkeit der *Gaonim* (heb. plural, man schreibt auch *Gäonim, Geonim,* deutsch Gaonen oder Geonen) unter drei Formen zusammen: sie schrieben Gutachten, Erläuterungen zum Talmud, fortlaufend oder lexicalisch, und Vorschriften (Resultate der Discussion, Monographien) über einzelne Themata der juridischen und ritualen Praxis. Von der 2. Art hat sich fast nichts erhalten, von der dritten Art ist oben § 15 ein Beispiel aus der Erbschaftskunde von SAADIA, dem berühmtesten und universalsten Gaon angeführt worden. Von den *Gutachten,*[6] welche in chaldäischer, arabischer, oder hebräischer Sprache in alle Welt bis nach *Spanien* hin, den Unkundigen und Zweifelnden meistens eine kurze Belehrung erteilten, besitzen wir bereits ungefähr 10 verschiedene gedruckte Sammlungen, die nur wenige Original-Doubletten, aber eine grössere Anzahl von hebräischen Übersetzungen aus dem Arabischen und einige jüngere Stücke aus verschiedenen Ländern enthalten. Dr. JOEL MÜLLER hat eine »Einleitung in die Responsen der babylonischen Geonen» (in hebräischer Sprache, Berlin 1891) verfasst, worin er die Antworten nach chronologischer Folge der einzelnen Autoren ordnet und aus ihrem Inhalt Characteristisches oder Beachtenswerthes hervorhebt, wozu ein Realindex fehlt. Ohne dieses verdienstliche Buch vollständig gelesen zu haben, möchte ich doch behaupten, dass keine Anfrage ein Thema der *profanen Wissenschaft* betrifft, und um dies zu constatiren und zu verwerten, musste den Lesern dieser Blätter in einer anscheinenden Abschweifung eine oberflächliche Schilderung der Sachlage geboten werden, um so mehr, als vor Kurzem ein christlicher amerikanischer Schriftsteller sich nicht entblödete, die jüdischen »Akademien» Babylon's als die Erhalter der Wissenschaft überhaupt hinzustellen.[7] In Wahrheit

haben theologische Schulen, hier so wenig, als sonst irgendwo und irgendwann, aus eigenem Interesse eine von ihnen unabhängige Wissenschaft gefördert; hier heisst es »*quoique, non parce que*». Das schliesst allerdings nicht aus, dass einzelne jener Rectoren persönlich an der allgemeinen Bildung Anteil nahmen; einem der letzten (SAMUEL) scheint der eigene Schwiegersohn (HAIS) es übel vermerkt zu haben, ohne dass man den Gegner fremder Studien für einen Mystiker zu halten hat, wozu ihn die pseudepigraphischen Ausgeburten Westeuropa's im XIII. Jahrh. machen wollten. Auf SA'ADIA's Kentnis profaner Wissenschaft werden wir bald zurückkommen müssen. Für die Juden unter arabischer Herrschaft bildeten die babylonischen Rectoren gewissermaassen die höchste Autorität, wie der Khalif für die gläubigen Muhammedaner, nicht ohne allen Zusammenhang zwischen beiden. Das Khalifat war aber bereits zu einer Schattenherrschaft herabgesunken, als der letzte Gaon, HAI, der schon College seines Vaters SCHERIRA gewesen war, nach weithin gerühmter 40-jähriger Amtsführung seine Würde mit sich ins Grab nahm (Ostern 1038). Ein Versuch, ihm einen Nachfolger zu geben, missglückte; dieser floh vor den Grausamkeiten des Herrschers bis nach *Spanien*. Damit schwand auch der Schein einer Vereinigung der Diaspora unter ein sichtbares Oberhaupt; denn die Exilarchen, mitunter unwissende Reiche, welche ihre Würde erkauft hatten, waren längst in ihrer Rivalität mit den Rectoren unter dieselben in Ansehn gesunken; die Gottes*gelehrsamkeit* erhob sich zur *alleinigen* Autorität und bildete in ihrer teilweisen Vererbung den einzigen jüdischen Adel von allgemeiner Anerkennung.

Wie aber mit dem östlichen Khalifat allmälig ein westliches in Spanien und Afrika (die Fatimiden) zu wetteifern begann, so wurde auch schon zur Zeit der letzten Gaonim eine, vielleicht aus Palästina nach dem römischen Italien gebrachte, jüdische Gelehrsamkeit durch das zufällige Schicksal von vier Gelehrten aus Bari im X. Jahrhundert[8] nach Spanien und *Afrika* verpflanzt; sie lockerte die Abhängigkeit von Babylon und bereitete neue selbständige Schulen vor, denen die Literatur der Gaonim nur als Quelle alter Traditionen galt. Um diese Zeit (X. Jahrh.) treten uns *überhaupt* sichere Literaturreste der Juden *ausserhalb Asiens* entgegen[9], und wir werfen einen flüchtigen Blick auf *Afrika* mit besonderer Rücksicht auf unser eigentliches Thema.

In diesem Weltteil sind die Hebräer eine Nation geworden, deren Schicksal auch grossenteils von dem ältesten Kulturvolk

desselben, dem *ägyptischen,* abhing. In Ägypten lebten auch zuerst *Juden* in enger Verbindung mit dem wissenschaftlichen Geiste der *Griechen.* Der »*Alexandrinismus*«, der ohne jüdischen Einfluss unerklärlich ist, hat nicht bloss einen Anteil an dem Christentum, sondern auch an der Philosophie, an der Wissenschaft des ganzen Mittelalters innerhalb der drei Religionen der civilisirten Welt. Hier wäre die Frage aufzuwerfen: Gab es unter den alexandrinischen Juden keinen *Mathematiker* von Bedeutung? Mir ist keiner bekannt; ich habe aber auch nicht Specialstudien auf diesem Gebiete gemacht. Aus den ersten Jahrhunderten unserer Zeitrechnung sind literarische Reste ägyptischer Juden meines Wissens nicht erhalten.[10] Aus den späteren Jahrhunderten, vielleicht nur aus einem kurzen Zeitraum (VIII—IX. Jahrh.?) stammt ein Schatz von hebräischen Papyrus-Fragmenten, welche in neuester Zeit, neben syrischen und arabischen, im Fajjum[11] aufgefunden, jetzt in Oxford, Wien und Berlin (im ägyptischen Museum)[12] aufbewahrt werden. So weit bis jetzt bekannt ist, enthalten sie Privatdocumente und Ritualien.

Aus dem Fajjum wurde SAADIA Gaon im Jahre 928 nach Sura als Rector berufen, wo es an einem würdigen, allen Parteien imponirenden Gelehrten fehlte. Es gilt dies als Zeugnis allerdings nur für den Kenner des jüdischen Gesetzes, abgesehen vom Charakter. SAADIA hat sich aber selbst ein Zeugnis philosophischer Bildung ausgestellt in einer arabischen, höchst wahrscheinlich noch in Fajjum, also vor seinem 40-ten Lebensjahre, verfassten Schrift, welcher wir hier einige Worte widmen wegen des Zusammenhanges mit einem hierher gehörenden Probleme. SAADIA commentirte das oben (§ 11) besprochene »Buch der Schöpfung« in arabischer Sprache, welchen Commentar MAYER LAMBERT aus dem einzigen Ms. (in hebräischen Lettern) in arabischen Typen mit französischer Übersetzung kürzlich herausgegeben hat.[13] Als Einleitung zum Commentar giebt SAADIA eine Kritik von neun Ansichten über die Schöpfung oder den Ursprung der Welt, wie er Ähnliches in seinem, im J. 933 in Babylon verfassten »Buch der Religionen und Dogmen« thut. Das Buch *Jezira* stellt als Principien der Welt die 10 Zahlen und 22 Buchstaben auf. SAADIA widmet den Buchstaben auch eine phonetische und philologische Erläuterung, auf das Wesen und System der Zahlen lässt sich der, sonst auf die Principien eingehende Commentator nicht ein, obwohl er der Zahl ein solches Gewicht beilegt, dass er im »Buch der Religionen« in der Widerlegung der kritisirten Ansichten wie ein genauer Buchhalter die Argumente im Einzelnen zu zählen und die Summen

zu ziehen niemals vergisst. Doch finden wir auch in obigem Commentar Spuren arithmetischer Beschäftigung. S. 84 der französischen Übersetzung giebt er die Regel für die Progression der Wörter nach der Zahl der Buchstaben; S. 89 bespricht er den Vorzug der ungeraden Zahl für die Bildung der Quadrate : $1+3=4$, $+5=9$, $+7=16$, $+9=25$, $+11=36$; das stammt aus nicht-jüdischer Quelle.[14] S. 105 kritisirt er die Zahl 221 der Permutationen der Buchstaben, welche nach Hörensagen ein ungenannter Erklärer aufrecht erhalten wollte, während es 231 heissen müsse. Saadia hatte, ohne Zweifel von Fajjum aus, mit einem Zeitgenossen in Afrika über wissenschaftliche Gegenstände correspondirt und indirect einen Mathematiker von Bedeutung zur Erklärung des »Buches der Schöpfung« veranlasst, worin der Commentator sich auf seine mathematischen Schriften beruft. Diesen, erst vor vierzig Jahren aufgegrabenen Mathematiker des X. Jahrh. in Afrika vorzuführen, ist die eigentliche Aufgabe dieses Paragraphen. Wir finden uns aber hier vor einem der vielen verwickelten *Probleme*, welche die jüdische Literaturgeschichte durch ihre eigentümlichen Sprachverhältnisse darbietet.

Eine erschöpfende Darlegung der Quellen und der verschiedenen, daraus entsprungenen Hypothesen ist an dieser Stelle unmöglich; ich muss, und darf, auf die Erörterung der Hauptmomente in meinem Werke: *Die hebräischen Übersetzungen* etc. (S. 394 ff.) verweisen und mich hier auf eine äusserst kurze Zusammenfassung der Grundlagen beschränken.

In der alten *Kyrenaika* fanden sich schon zur Zeit des zweiten Tempels jüdische Einwohner.[15] In der Nähe des alten Kyrene erhob sich später *Kairuan*,[16] die Residenzstadt des ersten Khalifen von der Dynastie der Fatimiden, dem man jüdischen Ursprung vorwarf.[17] In Kairuan fand der, aus Babylon verbannte Exilarch Ukba (um 920?) eine ehrenvolle Aufnahme.[18] Dort lebten im X. Jahrh. bis ins XI. hinein mehrere rühmlich bekannte jüdische Gelehrte, einige in schriftlichem Verkehr mit den letzten babylonischen Gaonim. Uns interessirt hier namentlich Isak b. Salomo al-Israîli, jetzt gewöhnlich Isak Israëli genannt, im Mittelalter kurzweg als »Ysaacus« berühmt.[19] Dieser philosophisch gebildete Arzt, der in sehr hohem Alter gegen Mitte des X. Jahrh. starb, verfasste in arabischer Sprache verschiedene philosophische und medicinische Werke, in welchen er die Ansichten der *griechischen* ersten Autoritäten (Aristoteles, Hippokrates, Galen) zusammenfasste. Unter den medicinischen Werken, welche schon im XI. Jahrh. durch Con-

STANTINUS AFER's willkürliche lateinische Bearbeitung in Europa bekannt wurden, wird noch heute die *Urologie* für bedeutend gehalten. In dem nicht minder berühmten Werke über die Fieber findet sich im Original und in der hebräischen Übersetzung (IV, 6) eine *arithmetische und astronomische* Stelle, wofür CONSTANTIN eine Verweisung auf das Buch *Pantegni* gesetzt, so dass man versucht war, auch dieses Buch dem ISAK zuzuschreiben; es gehört aber dem ALI BEN ABBAS, und ist die Einschaltung aus ISRAELI kaum erklärlich. Von Schriften ISAK's aus dem Gebiete der Mathematik ist Nichts bekannt.[20]

In Kairuan hat man, vielleicht erst durch SAADIA veranlasst, mit der Erklärung des »Buches der Schöpfung» vom Standpunkt der damaligen Naturphilosophie sich ernstlich beschäftigt und verschiedene hebräische, teils defecte Handschriften, aus denen nur wenige Excerpte gedruckt sind, bieten verschiedene Namen von Autoren und Übersetzern, ausser einem jüngeren Auszuge. Die Kritik ist noch immer nicht zu einem *sicheren* Ergebnis gelangt. Zwei in den mss. vorkommende Verweisungen auf eine *Urologie* können wohl nur aus einem, auch sonst bezeugten Commentar des ISAK herrühren, und mochten wörtlich von einem weiteren Bearbeiter aufgenommen sein. Ein ms. identificirt aber ISAK mit dem bisher nur als Philologen bekannten ABU SAHL DUNASCH (= DSU-NAS) BEN TAMIM, dem Babylonier.[21] Ein dritter angeblicher Autor aus Kairuan, JAKOB BEN NISSIM (Ende X. Jahrh.) ist für uns nicht beachtenswert, da er sicherlich nicht der Mathematiker war, um den es sich hier handelt.

Der unsichere Commentator des »Buches der Schöpfung» erzählt, dass SAADIA noch im Fajjum mit dem Arzte ISAK BEN SALOMO in wissenschaftlichem Briefverkehr gestanden habe, als er selbst (der Commentator) noch nicht 20 Jahr alt [also vor 900 geboren] war. Als SAADIA's Commentar ihm zu Gesichte kam, war er neugierig, ob SAADIA darin diejenige Kentnis *profaner Wissenschaft* bekunde, welche zur richtigen Auslegung jenes Buches erforderlich sei. Als er diese grossenteils vermisste, verfasste er einen weitläufigen Commentar, worin er die ungenügenden Erklärungen SAADIA's beleuchtete. Aus diesem Commentar zog der Verfasser später, jedenfalls nach dem Tode SAADIA's (941), einen Auszug, in welchem die eigene Erklärung des Buches als Hauptzweck in den Vordergrund trat, die Kritik SAADIA's, mit ausgesprochener Achtung vor dem Wissen und dem Style des kritisirten Gelehrten, nur als Nebensache angesehen wird. Alles, was wir davon besitzen, stammt aus diesem Auszuge.

Als Verfasser dieses Commentars dürfen wir, mit dem nötigen Vorbehalt, nach dem vorhandenen Material, den genannten DUNASCH ansehen, über welchen MUNK (l. c.) die ihn betreffenden Nachrichten gesammelt, unter Anderem nachgewiesen hat, dass DUNASCH Arzt, vielleicht auch Schriftsteller auf dem medicinischen Gebiete war.

In dem betreffendem Commentar citirt der Verfasser 3 mathematische Schriften, die er verfasst hat:

1) ein Werk über die *indische Rechnung*, genannt *'Hisab al-Gobar,* was der hebräische Übersetzer durch »Staubrechnung» erklärt. Diese interessante Notiz hat schon vor einem halben Jahrhundert REINAUD (*Mémoire sur l'Inde,* 1842) nach einer Mitteilung MUNK's verwertet. Ich habe dasselbe vor beiden gethan,[22] zugleich darauf hingewiesen, dass an derselben Stelle von der sogenannten *Knöchelrechnung* die Rede sei.[23]

2) ein *astronomisches* Werk, welches der Verfasser als Antwort auf Anfragen, die aus Constantine[24] (?) zu ihm gelangten, an ABU JUSUF CHISDAI (oder 'HASDAI) B. ISAK geschickt hatte, in 3 Teilen: 1. über Beschaffenheit (Construction) der Himmelssphären; 2. die Notwendigkeit der Rechenkunst für die Kenntnis der Construction der Himmelssphären; 3. über den Weg (Lauf) der Sterne. MUNK vermutet, dass es sich (zuletzt?) um den jüdischen Kalender handelte. CHISDAI ist ohne Zweifel der jüdische Mäcen in Cordova, genannt IBN SCHAPRUT, oder BASCHRUT, welcher bei der zweiten arabischen Übersetzung des DIOSKORIDES als Dolmetsch für die Pflanzennamen benutzt wurde.[25] Ob er die Anfragen nach Constantine, oder über Constantine nach Kairuan (an DUNASCH?) richtete, ist aus dem Citate nicht zu ersehen.

3) ein grosses *astronomisches* Werk, verfasst für den (oder gewidmet dem) fatimidischen Khalifen MANSUR ISMAIL BEN AL-KAJIM (gest. 953), in dessen 2. Teil der Verf. die *Schwäche gewisser astrologischer Principien* (oder Regeln) darlegte. Der Wortlaut dieser interessanten Stelle ist leider in den mir zugänglichen mss. unklar; in meiner Copie ist von »Ascendenten» die Rede. Es wäre wichtig zu wissen, ob der Verfasser die *Astrologie überhaupt bekämpfte.* Zwei für AL-MANSUR verfasste Schriften anzunehmen, liegt kein genügender Grund vor.[26]

[1] F. LAZARUS, *Die Häupter der Vertriebenen*, etc. (Jahrb. für jüd. Gesch. u. Lit. 10, 1890).

[2] ZUNZ, in *Benjamin of Tudela,* ed. ASHER, II, 215.

[3] S. HOLDHEIM, *Über die Autonomie der Rabbinen und das Princip der jüdischen Ehe.* Schwerin 1843.

[4] Vor den Fall kommt »Hochmuth«; Sprüche SALOMO's 13, 18.

[5] Die wahrscheinlichen Daten für die letzte Zeit gab ich im *Catalog libr. hebr. in Bibl. Bodl.*, p. 2617 unter SIMON KAHIRA.

[6] Z. FRANKEL, *Entwurf einer Geschichte der Litteratur der nachtalmudischen Responsen.* Progr. Breslau 1864.

[7] S. meinen Art.: *Die Juden und die profanen Wissenschaften,* im Magazin für die Wiss. d. Judenth. 1893, S. 229—235.

[8] Gegen grundlose Hypothesen darüber s. GEIGER in Hebr. Bibliogr. III, 3, dazu A. BERLINER, *Chananel* S. XXIX; HOCHSTÄDTER und HOCK in Jüd. Literaturbl. 1882, n. 41 und 44.

[9] Im VIII. Jahrh. wird die Ankunft eines Juden als »Événement« bezeichnet; s. HOUZEAU *et* LANCASTER, *Bibliographie générale de l'astronomie* I (1887) p. 144.

[10] Weder EBERS berühmter Roman: *Die ägyptische Königstochter,* noch CH. KINGSLEY's *Hypatia* (London 1874), hat für die Juden Ägyptens ein unbefangenes historisches Auge.

[11] »Das Fajjum« ist ein Bezirk, worin die Stadt Fajjum das alte Pithom sein soll.

[12] Zeitschr. für Ägyptologie 1879, S. 93—96, abgedruckt im Magazin f. d. Wiss. des Jud. 6, 1879, S. 249.

[13] P. 89 (franz.) citirt SAADIA offenbar seinen Commentar zu Exodus 26, 1, wie IBN ESRA; danach ist in meinem *Catal. Bodl.* p. 2186 die Zahl 25, 40 zu berichtigen. Vom Commentar zum »Buch der Schöpfung« existiren 2 unedirte hebräische Übersetzungen; der ihm untergeschobene gedruckte Commentar ist, nach MUNK, »die grösste Beleidigung, die man SAADIA anthun konnte«.

[14] CANTOR, *Vorlesungen* I, 135 bezeichnet die Summirung der ungeraden Zahlen als pythagoräisch. Ist etwa SAADIA's Quelle NIKOMACHOS?

[15] S. L. RAPOPORT, Biogr. des Chananel (hebr.) S. 16. Anm. 3.

[16] YACUT (JACUT), Geographisches Wörterbuch, herausg. v. WÜSTENFELD, Bd. IV (1869) S. 212. D'HERBELOT, *Bibl. Orient.* s. v. Cairavan, deutsch II (1787) S. 73; ABU ABD ALLAH MUHAMMED AL-BÂDJI AL-MASUDI, *al-Khala'sa* etc. Tunis 1283 H. [1866—1867], S. 5.

[17] Art. »Juden« (von S. CASSEL) in ERSCH *und* GRUBER's *Encyklopädie* Bd. 27, S. 201.

[18] In der Erzählung des bald darauf lebenden NATAN, des »Babyloniers», wird Kairuan nicht genannt, aber von einem späteren Europäer, ABR. JARCHI, bei GRAETZ, *Gesch. der Juden* V, 298, 314, 472. Die arabischen Lobgedichte auf den Khalifen, mehr als 300, waren schwerlich alle von UKBA selbst verfasst, wie GRAETZ S. 298 annimmt.

[19] Quellen für alle Folgende in meinem: *Die hebräischen Übersetzungen* etc. § 223 und 479.

[20] Mathematisches findet sich manchmal unerwartet in der *medicinischen* Literatur des Mittelalters; so enthält das Prooemium der Chirurgie des HEINRICH VON MANDEVILLE (Anf. XIV. Jahrh.), herausg. von I. L. PAGEL (Berlin 1892), p. 14—16 eine *Doctrina et ars sciendi computare per figuras algorismi.*

[21] S. MUNK, *Notice sur Abou'l-Walid* etc. Paris 1851 (Extr. de l'année 1850 du Journ. Asiat. t. XVI p. 50), p. 14; dazu weitere medicinische Citate in VIRCHOW's *Archiv*, Bd. **85**, S. 360.

[22] Im Art. »Jüdische Literatur» in ERSCH *und* GRUBER's *Encyclopädie* Bd. **27**, 1848 (englisch London 1857), Ende § 21.

[23] Anderes über diese Rechnungsart s. Hebr. Bibliogr. XXI, 40; *Die hebr. Übersetz.* S. 400; s. auch GÜNTHER, *Gesch. des mathem. Unterrichts* etc. S. 9 und 189; M. STERNER, *Principielle Darstellung der Rechenkunst. I. Geschichte der Rechenkunst*, München und Leipzig [1891] S. 107.

[24] MUNK nimmt Anstoss an Constantine in Afrika, als einem unbedeutenden Orte und deutet den Namen *Constantinopel?*

[25] *Die hebr. Übersetz.* S. 978.

[26] JAKOB IBN KILLIS, der Wezir, als Jude geboren (930), vielleicht auch als solcher gestorben (62 Jahr alt), wird von HAMMER (V, 125) fälschlich zu einem Rechenlehrer in Bagdad gemacht; s. Hebr. Bibliogr. VIII, 118; *Die hebr. Übersetz.* S. 391; vgl. auch *Lettera del* ... VINC. MORTILLARA *al* ... *Silv. de Sacy*, Palermo 1837 (Estr. dal Giornale di scienze etc. di Sicilia), p. 5.

RECENSIONEN. — ANALYSES.

Répertoire bibliographique des sciences mathématiques. Première série. Fiches 1 à 100. Paris, Gauthier-Villars 1894. 8°, 100 feuillets.

Le travail préparatoire de la Commission du *Répertoire bibliographique des sciences mathématiques* (voir Biblioth. Mathem. 1890, 39—42) est actuellement assez avancé pour permettre à la Commission de commencer la publication des matériaux réunis. Cette publication n'aura pas lieu par cahiers mais par séries de 100 fiches, c'est à dire feuillets déliés, imprimés sur un seul côté. Sur chaque feuillet sont mentionnés 9 mémoires ou notes mathématiques se rapportant à une certaine section de l'*Index du répertoire bibliographique des sciences mathématiques,* et au haut se trouve la signature de cette section, ainsi p. ex. **A3k** pour la théorie des équations des troisième et quatrième degrés. Pour chaque mémoire ou note sont indiqués: l'auteur, le titre (ou bien sa traduction en français ou en allemand), la signature du recueil où il a été inséré, le volume et les pages où il se trouve, enfin l'année de publication du volume.

Les 900 titres de la première série se rapportent aux 9 premières classes de l'*Index,* c'est à dire à celles désignées par les lettres A—I; les classes présentant la plus grande fréquence sont A (algèbre) et D (théorie des fonctions).

Il est naturel que, dans une publication dont les matériaux sont fournis par un grand nombre de collaborateurs, il se glissera, au commencement, de petites inconséquences et fautes d'orthographe, et nous ne nous arrêterons pas à signaler ici les corrections nécessaires ou les changements désirables à des points particuliers. Mais nous ne pouvons pas omettre de regretter que la Commission ait adopté, pour désigner les recueils de sociétés savantes et les journaux, non pas les abréviations systematiques de MM. Houzeau et Lancaster dans leur *Bibliographie générale de l'astronomie* (voir tome II, 1882, p. 1—85), mais des abréviations nouvelles arbitrairement choisies, dont plusieurs sont absolument impossibles à interpréter sans recours à la clef; ainsi p. ex. *A. S. C.* (équivalant à *Christiania, Fhd* de MM. Houzeau et Lancaster) signifie Forhandlinger i Videnskabsselskabet i Christiania (dans la clef de la Commission on ne trouve pas ce titre même, mais une traduction française: »Traités de l'académie des sciences de Christiania»). Espérons que, dans la bibliographie définitive, la Commission fera usage d'abréviations plus convenables.

Stockholm. G. Eneström.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von || journal d'histoire des mathématiques publié par G. ENESTRÖM. Stockholm. 8°.
1894: 4.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von M. CANTOR. Leipzig. 8°.
40 (1895): 1.

°Abhandlungen über Variations-Rechnung herausgegeben von P. STÄCKEL. Theil I: Abhandlungen von Johann Bernoulli (1696), Jacob Bernoulli (1697) und L. Euler (1744). Theil II: Abhandlungen von Lagrange (1762, 1770), Legendre (1786) und C. G. J. Jacobi (1837). Leipzig, Engelmann 1894.
8°, 144 + 110 p. — [3·60 Mk.]

Ball, W. W. R., On the use of a single symbol to denote the incommensurable number 3·14159....
Biblioth. Mathem. 1894, 106.

°**Bellacchi, G.**, Introduzione storica alla teoria delle funzioni ellittiche. Firenze, Barbera 1894.
8°, IV + 316 p. — [6 lire.] — [Analyse:] Biblioth. Mathem. 1894, 117—118. (G. LORIA.)

Bertini, E., Commemorazione del prof. Felice Casorati.
Milano, Istituto Lombardo, Rendiconti **25**, 1892, 1206—1236.

Brill, A. und **Nöther, M.**, Die Entwickelung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit.
Deutsche Mathematiker-Vereinigung, Jahresber. **3** (1892—1893), 107—566.

Cantor, M., Zahlensymbolik.
Neue Heidelberger Jahrbücher **5**, 1895, 25—45. — Notice historique.

Capelli, A., Giuseppe Battaglini. Cenno biografico.
Giornale di matem. $\mathbf{1}_2$, 1894, 205—208.

Curtze, M., Miscellen zur Geschichte der Mathematik im 14. und 15. Jahrhundert.
Biblioth. Mathem. 1894, 107—115.

Curtze, M., Zur Geschichte des Josephspiels.
Biblioth. Mathem. 1894, 116.

Curtze, M., Die abgekürzte Multiplication.
Zeitschr. für Mathem. **40**, 1895; Hist. Abth. 7—13.

Favaro, A., Serie decima di scampoli Galileiani.
Padova, Accad. d. sc., Atti e memorie **11**, 1895, 11—43.

Favaro, A., Nuovi contributi alla storia del processo di Galileo.
Venezia, Istituto Veneto, Atti $\mathbf{6}_7$, 1895, 88—97.

Günther, S., Der Plan geomagnetischer Korrespondenzbeobachtungen vor Humboldt und Gauss.
Feestbundel aan P. J. Veth (1894), 93—97.

Heiberg, J. L., Über den Geburtsort des Serenos.
Biblioth. Mathem. 1894, 97—98.

Index du répertoire bibliographique des sciences mathématiques. Errata, additions et modifications. Liste alphabétique des abréviations conventionnelles employées pour désigner les principaux recueils. Paris 1894.
8°, 10 p.

Lampe, E., Nachruf für Ernst Eduard Kummer.
Deutsche Mathematiker-Vereinigung, Jahresber. **3** (1892—1893), 13—28.

Mehmke, R., Zur Geschichte der Rechenmaschinen.
Deutsche Mathematiker-Vereinigung, Jahresber. **3** (1892—1893), 59—62.

Ovidio, E. d', Per Giuseppe Battaglini.
Torino, Accad. d. sc., Atti **29**, 1894, 458—460.

Répertoire bibliographique des sciences mathématiques. Première série. Fiches 1 à 100. Paris, Gauthier-Villars 1894.
8°, 100 feuillets. — [2 fr.]

Steinschneider, M., Die Mathematik bei den Juden.
Biblioth. Mathem. 1894, 99—105.

Teixeira, A. J., Biographia do dr. Rodrigo Ribeiro de Sousa Pinto.
Jorn. de sc. mathem. **12**, 1894, 3—10.

Wittstein, A., Historische Miscellen. II.
Zeitschr. für Mathem. **40**, 1895; Hist. Abth. 1—6.

Question 48 [sur l'introduction du terme: »table de PYTHAGORAS» pour la table ordinaire de multiplication].
Biblioth. Mathem. 1894, 120. (G. ENESTRÖM.)

CAJORI, F., A history of mathematics. New York, Macmillan 1894. 8°.
Educational review **8**, 1894, 91—93. (G. B. HALSTED.) — The school review **2**, 1894, 513—514. (J. M. TAYLOR.)

CANTOR, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Dritter Band. Vom Jahre 1668 bis zum Jahre 1759. Erste Abtheilung. Die Zeit von 1668 bis 1699. Leipzig, Teubner 1894. 8°.
Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{18}_2$, 1894, 227—230. (P. TANNERY.)

FIRMICUS, JULIUS, Matheseos libri VIII. Primum recensuit C. SITTL. Pars I. Libri I—IV. Leipzig, Teubner 1894. 8°.
Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{18}_2$, 1894, 211—212. (P. TANNERY.)

KARAGIANNIDES, A., Die nichteuklidische Geometrie vom Alterthum bis zur Gegenwart. Berlin, Mayer & Müller 1893. 8°.
Zeitschr. für Mathem. **40**, 1895; Hist. Abth. 37—38. (M. MEYER.)

Loria, G., Della varia fortuna di Euclide in relazione con i problemi dell' insegnamento geometrico elementare. (Periodico di matematica **8**, 1893.)

Jorn. de sc. mathem. **12**, 1894, 16—17.

Vivanti, G., Il concetto d'infinitesimo e la sua applicazione alla matematica. Mantova, Mondovi 1894. 8°.

Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{18}_2$, 1894. 230—233. (P. Tannery.) — Mathesis $\mathbf{5}_2$, 1895, 18. (P. M.)

[Listes d'ouvrages récemment publiés.]

Biblioth. Mathem. 1894, 118—120. — Zeitschr. für Mathem. **40**, 1895; Hist. Abth. 39—40.

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

49. On demande une recherche biographique et bibliographique sur un ou plusieurs des mathématiciens espagnols antérieurs au 16ᵉ siècle, dans laquelle sera donnée une notice circonstanciée sur leurs études, les services qu'ils ont rendus à l'enseignement, et leurs ouvrages imprimés, avec une analyse détaillée et raisonnée des principaux d'entre ces derniers.*

(Académie des sciences de Madrid.)

50. Où peut on trouver des notices biographiques sur le mathématicien anglais Braikenridge (première moitié du 18ᵉ siècle), auquel on doit quelques recherches sur la génération de courbes (voir p. ex. Loria, *Il passato e il presente delle principali teorie geometriche* [1887], p. 12).

(G. Eneström.)

* Question mise au concours pour l'année 1896. Prix: 1,500 francs.

Inhalt. — Table des matières.

Stockholm, tryckt i Central-Tryckeriet, 1895.

@@HEADING1@@ BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK

JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON — PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1895. STOCKHOLM. N° 2.

NEUE FOLGE. 9. — NOUVELLE SÉRIE. 9.

BERLIN. MAYER & MÜLLER. Markgrafenstrasse 51.

Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr.

PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Mathematisch-historische Miscellen.

Von MAXIMILIAN CURTZE in Thorn.

1. Noch einmal über den de la Hire zugeschriebenen Lehrsatz.

Im Jahrgang 1888 dieser Zeitschrift, S. 65—66, habe ich nachgewiesen, dass der Satz:

> Wenn ein Kreis im Innern eines festen Kreises von doppeltem Radius rollt, so beschreibt jeder Punkt des rollenden Kreises einen Durchmesser des festen,

COPPERNICUS angehört. In letzter Zeit ist jedoch die Übersetzung eines Abschnittes einer arabischen Schrift der NASÎR-EDDÎN ATTÛSÎ erschienen, aus welcher unzweifelhaft hervorgeht, dass schon dieser hervorragende Gelehrte obigen Satz gekannt und bewiesen hat.

Dem hochinteressanten Werke P. TANNERY's: *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne* (Paris 1893) ist als *Appendice* VI ein Abschnitt angefügt worden, in welchem Herr CARRA DE VAUX über die astronomischen Werke des NASÎR EDDÎN ATTÛSÎ berichtet, speciell über dessen *Memento d'Astronomie*. In diesem geht der Verfasser mit einzelnen Behauptungen des PTOLOMÆUS ins Gericht und bringt seine Verbesserungen an. In XI. Capitel dieses *Memento*, dessen vollständige Übersetzung CARRA DE VAUX hinzugefügt hat, heisst es nun gleich am Anfang:

> *Lemme*. Deux cercles sont dans un même plan; le diamètre de l'un est la moitié du diamètre de l'autre; on

les donne tangents intérieurement, et l'on donne un point sur le plus petit, le point de contact; puis on fait mouvoir ces deux cercles de mouvements réguliers, en sens opposés, tels que le mouvement du petit soit double du mouvement du grand; le petit accomplit deux tours pendant que le grand en accomplit un. On démontre que le point donné se meut sur le diamètre du grand cercle, qui passait au départ par le point de contact, allant et venant entre ses deux extremités.

Darauf folgt der richtige strenge Beweis. Es ist klar, dass es sich hier um den nämlichen Satz handelt, welchen COPPERNICUS im IV. Cap. des III. Buches seiner *Revolutiones* ebenso ausspricht und dem Wesen nach in identischer Art beweist. Solange jedoch nicht eine mittelalterliche Übersetzung des obigen Beweises von ATTÛSÎ nachgewiesen ist, dürfte die selbständige Nacherfindung des COPPERNICUS nicht in Zweifel gezogen werden können, von welcher NICOLAUS MULLER in seiner Ausgabe von 1617 sagt:

»Miro artificio docetur hoc capite ex duobus motibus circularibus confici posse motum in lineam rectam sursum ac deorsum reciprocando. Quod sane commentum est COPERNICI ingenio dignum.»

Ebensowenig ist die selbständige Nacherfindung LODOVICO FERRARI's und DE LA HIRE's anzuzweifeln.

2. Weiteres über das Josephspiel.

Die älteste im Abendlande bis jetzt bekannte Fassung des fraglichen Spieles hat MOMMSEN im Jahrgang 1854 des Rheinischen Museums für Philologie S. 298 nach dem *Codex Einsidelensis № 326* aus dem Anfange des X. Jahrhunderts Blatt 88' veröffentlicht. Ich erlaube mir diese Form des Räthselspieles, welche eine sehr milde Auffassung desselben behandelt, hier folgen zu lassen, da dieselbe in mathematischen Kreisen nicht bekannt zu sein scheint.

Quadam nocte Niger dux nomine, Candidus alter
Forte subintrarunt unica tecta simul.
Candidus exhibuit secum ter quinque nitentes
Totque Niger nigros more colore pares.
»Candide, de nostris primus quis», dixerat alter
»Providet excubias, nam tua dicta sequar»?
Haec placido contra respondit Candidus ore:
»Judicio quemquam nolo gravare meo,
»Ne nova lis socios per me conspiret in arma;
»Sed tibi consilium non removebo meum.

»Ordine disponam socios discumbere cunctos,
»Quos sors nona legat noctis in excubias.
»Candida sed sedeat nigris commixta catervis,
»Ut me velle viros fallere nemo putet».
Quattuor eximii candoris, quinque nigelli,
Candiduli bini, unicus atque niger.
Splendentes trini, furcato pelle nigellus,
Candidus hinc unus carboneique duo,
Fulgentes bini furcato tegmine trini,
Candidus hinc unus carboneique duo,
Candiduli bini splendentes pelle decora,
Quos sequitur cunctos unicus atque niger.
Hoc super ingenio cunctos sors nona nigellos
Sic cecidit; turba candida sorte caret.
Dux Niger excubias solus cum milite furco
Pervigil ingratus duxit ad usque diem,
Ast placitum tota carpebet nocte soporem
Candidus ingenio praeditus atque sui.

Dass hier die Regel genau mit der von mir früher gegebenen

Quator et pentas. duo. monas. tris. mias. unus.
Hinc dias. ambo. trias. unus. dias. et duo. monas.

übereinstimmt, ist augenfällig. Weiter geht aber aus dem Alter der Handschrift hervor, dass im Cod. lat. Monac. 14826 wirklich von einer lange bekannten Sache gesprochen wird, und dass der Schreiber sicher sein konnte, auch ohne weitere Auseinandersetzung mit seinen Versen verstanden zu werden.

In dem *Codex Bernensis 704* (Sec. XII.) Bltt 11ª findet sich folgende Fassung des Spieles, welche ich deshalb hier hinzufüge, weil sie dieselben beiden Verse enthält, wie Cod. lat. Monac. 14876. Ich entnehme dieselbe dem Werke: *Carmina medii aevi maximam partem inedita. Ex Bibliothecis Helveticis collecta ed.* H. Hagen. Bernae 1877, S. 145.

Sors cuiusdam de XV Christianis totidemque Iudaeis.

Bis duo nam nivei praesunt et quinque nigelli
His supponuntur clari duo postque secuntur,
Unius et taetri interimunt vestigia terri
Albi lacte magis, unus albus et alter habetúr.
Hos duo fuscati, crystallini quoque bini
Tres titubant nigri lactantis robore victi.
Post duo corvini et nivei sunt denique bini,
Orbem tam furvus demum determinat unus.

Item de sorte supradicti episcopi.

Quattuor et pentas, duo monas tres mias unus,
Hinc dias ambo, trias, unus duo et duo monas.

Es ist somit ein Zeugnis aus dem X., eins aus dem XI. und eins aus dem XII. Jahrh. nachgewiesen.

Zum Schlusse möchte ich noch auf eine Abhandlung von Prof. H. SCHUBERT in Hamburg hinweisen, der im letzten Jahrgang der POTONIÉ'schen Naturwissenschaftlichen Wochenschrift (Berlin) ausführlich über die damals bekannte Geschichte dieser Spielerei und über die mathematische Theorie derselben gehandelt hat.

3. Der Algorismus des Sacrobosco.

Der Algorismus, welcher unter dem Namen des SACROBOSCO gedruckt ist, und über dessen *bekannte* älteste Ausgaben Professor RICCARDI im Jahrg. 1894 (S. 73—78) dieser Zeitschrift so genaue Daten gegeben hat, ist schon bedeutend früher als 1501 dem Drucke übergeben worden. Ich erlaube mir das hier mitzutheilen, was in dem *Catalogue Libri 1861*[1] darüber angegeben ist, wobei ich nur bemerke, dass LIBRI offenbar *die Identität mit dem Algorismus des* SACROBOSCO *nicht erkannt hat.*[2]

485. *Arithmetic.* ANIANI (*Magistri*) *Compotus Manualis metricus cum Comento, et Algorismus.*

Very scarce fine copy 4to. *Argentinae per Johannem Pryss* 1488.

Professor DE MORGAN considers this Compotus the only work of the sort printed in the XV:th Century. The *Algorismus* is an early treatise on arithmetic beginning by *Omnia quae a primaeva,* and ascribing to an imaginary philosopher, *Algus,* the origin of the Arabic *ars numerandi.* This exceedingly scarce book appears to be the *first arithmetical work* ever printed in a French town (Strasbourg). This edition of the *Algorismus* has remained unknown to M. BRUNET, for in the new edition of his *Manuel,* in which he has devoted a special article to *Algorismus,* it is not mentioned.

Das Exemplar ist in der Auction mit 19 s. bezahlt worden. Aus dem von LIBRI Mitgetheilten ist wohl absolut sicher, dass es sich um den fraglichen *Algorismus* handelt. Eine Handschrift desselben aus dem Jahr 1356 im Besitze der Königl. Hof- und Staats-Bibliothek zu München (Cod. lat. 14684) hat die Unterschrift »Explicit algorismus sive arismetrica practica«. Auch in ihr ist *Algus* derjenige, von dessen Namen der Titel

Algorismus abgeleitet ist. An denselben schliesst sich unmittelbar der *Tractatus de Spera* des SACROBOSCO an. Letzterer hat den Namen des Verfassers im Explicit: »Explicit tractatus spere editus a magistro JOHANNE DE SACROBOSCO anglico qui istum tractatum sumpsit de astrologia ALPHRAGANI», während der *Algorismus* anonym ist. In der Handschrift Cod. lat. Monac. 14908 aus dem XV. Jahrh. findet sich der letzte Abschnitt von *Progressio* an aus Cod. lat. Monac. 14684 abgeschrieben. Der Schreiber hat jedoch die Unterschrift falsch gelesen; und setzt dafür: »Explicit algorismus sive arismetrica punctura». Beide Codices gehörten früher dem Kloster St. Emmeram zu Regensburg. Weder der Handschriftenkatalog, noch GERHARDT in seiner Beschreibung des Cod. lat. Monac. 14908 in den Monatsberichten des Berliner Akademie[3] haben die Identität dieses Stückes mit SACROBOSCO's Algorismus erkannt.[4]

[1] *Catalogue of the mathematical, historical, bibliographical and miscellaneous portion of the celebrated library of M.* GUGLIELMO LIBRI *etc. Part the first, A—L., etc. which will be sold by Auction etc. on Thursday, the 25-th of April, 1861, & Eleven following days, etc.* Printed by I. Davy and Sons, 137, Long Acre, London. XXXII + 4 Taf. + 475 S. gr. 8°. S. 56, 11—21.

[2] Das folgt aus der Anmerkung, welche a. a. O. S. 65 zu HALLIWELL's *Rara mathematica* hinzugefügt ist: »Professor DE MORGAN, however, has shown that Mr. HALLIWELL was wrong in publishing SACROBOSCO as inedited, as it had been printed in Venice in 1523.»

[3] *Catalogus codicum latinorum bibliothecae regiae Monacensis. Tomi II pars II, codices num. 11001—15028 complectens.* München 1876. IV + 288 S. 8°. — S. 250. — Monatsberichte der Berliner Akademie 1870, S. 407. Anm.

[4] Ich habe nachträglich gesehen, dass Herr Prof. A. FAVARO in seiner Abhandlung über PROSDOCIMO DE' BELDOMANDI (Bullettino di bibliogr. d. sc. matem. 12, 1879, S. 1 u. ff.) schon die Existenz dieser ältesten Ausgabe des *Algorismus* von SABROBOSCO nachgewiesen hat.

4. Zur Zahlentheorie aus dem XV. Jahrhundert.

Aus Cod. lat. Monac. 14908 Blatt 504' setze ich Folgende hierher; die Ordnungszahlen habe ich der Erklärung halbe hinzugefügt.

1. Omnis quadratus, cuius prima figura est par, est per 4 divisibilis.
2. Omnis quadratus in primis locis habet parem numerum ciffrarum.
3. Nullus quadratus recipit in primo loco 2, 3, 7 vel 8, sed »alios» bene.
4. Omnis quadratus est simpliciter vel subtracta unitate per 3 divisibilis.
5. Subtrahendo a quadrato duplum suae radicis minus 1 habebitur immediate praecedens; vel addendo sibi duplum plus 1 occurrit immediate sequens.
6. Si quadratus fuerit impar, remota 1 per 4 est divisibilis.
7. Si prima figura fuerit impar, secunda semper est par.
8. Numquam omnes figurae possunt esse impares, sed bene pares.
9. Quando 4 est in primo loco, semper par est in secundo loco.
10. Quando 6 est in primo loco, semper impar in secundo loco.
11. Omnis cubicus, cuius prima figura est par, est in 8 divisibilis, et numerus quociens est eciam cubicus.
12. Numerus ciffrarum in primis suis locis semper est per 3 divisibilis.
13. Proba de cubicis per 7 est 1, 6, vel 0; et proba per 9 est 1, 8 vel 0.
14. Proba in quadratis per 7 est 1, 2, 4, 0; et proba per 9 est 1, 4, 7 vel 0.
15. Item cubicus recipit omnes digitos in primo loco et 0.

1464.

Primus locus ist hier die Einerstelle. Die 15 Nummern sagen also aus:

1. Das Quadrat einer geraden Zahl ist stets durch 4 theilbar.
2. Sind am Ende einer Quadratzahl Nullen vorhanden, so müssen diese in gerader Zahl dasein.
3. Kein Quadrat hat die Form $10n+2$, $10n+3$, $10n+7$, $10n+8$, sondern es können nur die Formen $10n$, $10n+1$, $10n+6$, $10n+9$ vorkommen.
4. Jede Zahl muss eine der Formen haben $3n$, $3n\pm 1$, also hat jedes Quadrat eine der Formen $9n^2$, $9n^2\pm 6n+1$. Es ist also entweder selbst durch 3 theilbar, oder wenn 1 subtrahirt wird.
5. Sagt aus, dass $a^2-(2a-1)=(a-1)^2$, und $a^2+(2a+1) = (a+1)^2$ ist.
6. $(2a+1)^2-1=4a^2+4a$, also durch 4 theilbar.
7. Jede ungerade Zahl hat die Formen $2n+1$, $2n+3$, $2n+5$,

$2n+7$, $2n+9$; ihre Quadrate sind $4n^2+4n+1$, $4n^2+12n+9$, $4n^2+20n+25$, $4n^2+28n+49$, $4n^2+36n+81$, woraus die Richtigkeit der Behauptung ohne weiteres hervorgeht.

8. Der erste Theil folgt schon aus dem Vorhergehenden, für den zweiten Theil ist $8^2=64$ schon beweisend.
9. In der Einerstelle kann 4 nur entstehen, wenn die Basis $10n+2$ oder $10n+8$ ist, dann folgt aber aus den Quadraten $100n^2+40n+4$ und $100n^2+160n+64$ die Behauptung ohne weiteres.
10. Aus $(10n+4)^2=100n^2+80n+16$ und $(10n+6)^2=100n^2+120n+36$ folgt die Behauptung sofort.
11. Da eine gerade Cubikzahl immer der Cubus einer geraden Zahl $2n$, also von der Form $8n^3$ sein muss, so folgt die Behauptung.
12. Sagt aus, dass die Zahl der am Ende einer Cubikzahl vorhandenen Nullen ein Vielfaches von 3 sein muss.
13. Behauptet, jede Cubikzahl hat eine der Formen $7n+1$, $7n+6$, $7n$ oder $9n+1$, $9n+8$, $9n$. Da jede Zahl einer der Formen haben muss $7n+1$, $7n+2$, $7n+3$, $7n+4$, $7n+5$, $7n+6$, $7n$, so ist klar, dass die Probe nach 7 nur von den letzten Bestandtheilen abhängt. 1, 8 und 64 haben die Form $7n+1$; 27, 125 und 216 die Form $7n+6$. Ebenso für die Neunerprobe. Hier sind die möglichen Formen der Zahlen $9n$, $9n+1$, ..., $9n+8$; 1, 64, 343 haben die Form $9n+1$; 8, 125, 512 die Form $9n+8$, endlich 27, 216 die Form $9n$. Damit ist die Behauptung bewiesen.
14. Jede Quadratzahl muss eine der Formen $7n+1$, $7n+2$, $7n+4$, $7n$ oder $9n+1$, $9n+4$, $9n+7$, $9n$ besitzen. 1 und 36 haben die Form $7n+1$; 4 und 25 die Form $7n+4$; 9 und 16 die Form $7n+2$. Ebenso haben 1 und 64 die Form $9n+1$; 4 und 49 die Form $9n+4$; 9 und 36 die Form $9n$; endlich 16 und 25 die Form $9n+7$. Damit ist der Beweis geliefert.
15. Behauptet die bekannte Thatsache, dass die Cubikzahlen in der Einerstelle sämmtliche 10 Ziffern besitzen können.

5. Zur Geschichte der vollkommenen Zahlen.

Die folgende deutsche Bearbeitung der Eintheilung der Zahlen in gerade und ungerade, vollkommene, überschiessende und mangelhafte Zahlen, dürfte schon deshalb von Interesse sein, als sie die fünfte vollkommene Zahl richtig angiebt, welche

z. B. MICHAEL STIEFEL nicht erkannt hat. Auch dieser Abschnitt findet sich in Cod. lat. Monac. 14908 Blatt 32'—34.

[Blatt 32'] Ain yede zal ist gelich oder ungelich, und was gelich ist, daz ist glich glich, als alle zal dye gewachsen ist mit duplieren an ainnem anzefahn, als 2, 4, 8, 16, 32, 64 etc. wann es gat mit glichen ausz vnz auf ainsz. Oder glich unglich alz alle zal dye von ungelicher duplirter zal erwachsen ist, als 6, 10, 14, 18, 22, 26 vnd des glychen. Wann alszbald sye ain mol getailt wirt, so ist sye nit mer zetailen in zwe. Oder vnglych glych, alz alle zal dye sich taylen lat in gelych tail, aber nit ze end ausz, als 24 lat sich taylen in 2 mol 12, vnd 12 in 2 mol 6, aber 6 lat »nit» sich taylen, dann in vnglich teil, daz ist 3 vnd 3, dye paid ungelich sind. Vnd wachsen ausz glych glych zal, wann ainer in den andern multipliciret wirt als da stat:

3	5	7	9	11	13
4	8	16	32	64	128
12	40	112	288	704	1664

oder der erst ungelich in der gelychen ainen vnder im, welchen man wil, also auch mit den andern.

Dye vngelych zal ist auch dreyerlay. Dye erst ist vngesamelt ausz ander zal alz sine regula, wann kain andre zal *[Blatt 33]* erczelt dye zal, alz 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37. Aber dye ander vngelich zal ist gesamelt ausz ander zal, alz 9, 15, 21, 25, 27; alz 9 komet ausz 3 mol 3, und 15 ausz 3 mol 5.

Ausz der zal finstu, daz die gesamelt ist ausz der ersten vnglychen zal, und sameln sich selb nit, darumb wann man 25 scheczt gen 9 oder gen 18 oder 21, so wer sie vngesamelt; daz ist der drit tail der vnglychen zal.

Von den glychen zal sind etlich gancz gerecht, etlich gebrechend, etlich vberfluszig. Die vberflussig alz 12, 24. Wann 12 hat $\frac{1}{2}$ 6, vnd $\frac{1}{3}$ 4, vnd $\frac{1}{4}$ 3, vnd $\frac{1}{6}$ 2, vnd $\frac{1}{12}$ 1; daz machet 16, daz ist 4 zevil. Aber dye gebrechent 8, 14. Wann 8 hat $\frac{1}{2}$ 4, vnd $\frac{1}{4}$ 2, und $\frac{1}{8}$ 1, daz macht 7, vnd gebricht ains.

Zwischen den czwayen vnmassen findet man daz gancz gerecht, daz nit zevil noch zewenig hat, als 6, 28; wann $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ von 6 ist 3, 2, 1, dye machen eben 6; von 28 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{14}$, $\frac{1}{28}$ 14, 7, 4, 2, 1, dye machen eben 28; darumb wert dye zal perfectus numerus gehayszen, vnd sind wenig. Zwichsen(!) ainem vnd 10 ist aine 6 *[Blatt 33']* von 6 zuo 100 auch aine 28;

zwischen 100 vnd 1000 auch aine 496; zuo 10000 auch aine 8128. Wiltu aber finden wye dye werden, so secz all glych glyche zal, alz vil du wilt, an ainem anzefahen also 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, tue dye ersten zw der andern, daz macht 3, und multiplicir in dye lesten gesamelte zal, das ist 2, und 2 mol 3 ist 6, daz ist dye erst ganz gerechte zal. Darnach samel 1, 2, 4, daz macht 7, multiplicir daz in dye lesczt sumirte zal, daz ist 4, mal 7 ist 28, daz ist dye ander perfecte zal. Wer aber, daz etwann ausz dem sumeren ain zal keme, die nit sine regula, daz ist primus vnd incompositus were, so behalt dye sum vnd ganz furbas, alz 1, 2, 4, 8 macht 15, dye 15 sint nit sine regula, dar vmb sumir darczw 16, daz macht 31, daz ist sine regula, dye multiplicir in 16, so kumpt 496, dye drit gerecht zal. Also tue furbas mit den andern glychglychen zalen, so finstu all gerecht zal etc. *[Bl. 34]*.

1461. Erasmi episcopi martiris.

Primus numerus perfectus	Secundus perfectus	Tercius perfectus	Quartus perfectus	Quintus numerus perfectus
6	28	496	8128	33550336
3	14	248	4064	16775168
2	7	124	2032	8387584
1	4	62	1016	4193792
	2	31	508	2096896
	1	16	254	1048448
		8	127	534224
		4	64	262112
		2	32	131056
		1	16	65528
			8	32764
			4	16382
			2	8191
			1	4096
				2048
				1024
				512
				256
				128
				64
				32
				16
				8
				4
				2
				1

Dass hier der Verfasser durch fortwährende Verdoppelung der gefundenen Primzahl $2^n - 1$ vorgegangen ist, brauche ich

kaum zu erwähnen. Ob vor ihm die fünfte vollkommene Zahl nachweisbar ist, habe ich nicht verificieren können; er muss aber jedenfalls 511, 1023, 2047, 4095 als zusammengesetzte erkannt haben, was für 1023 und 4095 nicht gerade schwer, für die beiden Andern jedoch nicht ohne Schwierigkeit ist.[1]

[1] 511 = 7 . 73, 2047 = 23 . 89. Noch HEILBRONNER (*Historia matheseos universae,* S. 755) hält 511 . 256 und 2047 . 1024 für vollkommene Zahlen.

Die Mathematik bei den Juden.

Von Moritz Steinschneider in Berlin.

Europa.

18. Es ist bereits bemerkt worden, dass die ältesten Spuren *literarischer* Thätigkeit von Juden in Europa, wenigstens in hebräischer Sprache, nicht über das X. Jahrhundert hinaufreichen. Hieraus darf man nicht voreilig auf die Nichtexistenz von Juden in Europa vor jener Zeit schliessen, da wir positive Zeugnisse für die Existenz solcher überhaupt und einzelner Lehrer in jüdischen Dingen insbesondere, besitzen. In *Rom* hat es seit der Zeit des zweiten Tempels eine jüdische Gemeinde mit eigenen, in neuester Zeit entdeckten Katakomben, und zeitweise sich dort aufhaltende jüdische Gelehrte gegeben.[1] Auch in Spanien ist Ähnliches schon aus den bekannten fanatischen Gesetzen der westgothischen Könige ersichtlich; hat man doch das Eindringen der Araber auf jüdischen Verrat — wenn das Wort hier anwendbar ist — zurückführen wollen. Wo ist die unterdrückte Bevölkerung nicht des Vaterlandsverrats beschuldigt worden? und bei weit geringerer Veranlassung. In Südfrankreich eifert schon Anfangs des XI. Jahrhunderts der Bischof Agobard gegen die Juden und denuncirt ihren angeblichen Anthropomorphismus, ohne bestimmte Bücher zu nennen.[2]

Einzelne Namen tauchen aus jener Zeit auf, aber die Persönlichkeit bleibt im Dunkel oder verschwindet vor besserer Beleuchtung. Der angebliche Jude Moschion, Übersetzer einer Gynäkologie, verwandelte sich vor der Kritik V. Rose's in einen christlichen Afrikaner.[3] Domnus, der jüdische Lehrer des Arztes Gesios, wird durch die Unsicherheit über letzteren selbst zu einem leeren Namen.[4] Elinus, Salomo und Sarach in Salerno sind Ausgeburten einer angeblichen Chronik und gedankenloser Nachschreiber mit einer liberalen Tendenz, welche um Jahrhunderte jünger ist als die damit ausgeschmückte Zeit.[5]

Das X. Jahrhundert, in welchem wir Afrika verlassen haben, führt uns nach Europa und merkwürdiger Weise wieder zu einem Erklärer des seltsamen *Buches des Schöpfung*, das seinen Namen in Bezug auf die aus ihm hervorgegangenen verschiedenartigen literarischen Erscheinungen wohl verdient. Seine Geschichte ist gewissermaassen typisch für die Behandlung mancher

alten Texte, welche von einer Alles »verschlingenden» (in beiden Bedeutungen des Wortes) jüngeren Mystik missdeutet werden, während eine ältere Zeit sie einfach, oder im Sinne ihrer wissenschaftlichen Ansichten, zu erklären sucht.

19. Das Land, welchem der vorzuführende Gelehrte angehörte, ist das älteste von Juden bewohnte Europa's, *Italien;* aber er lebte in der Gegend, welche die Berührungspunkte der christlichen Bewohner und der arabischen Eindringlinge einschloss, Barbarei und Cultur von den feindlichen Bewegungen zurückbehielt, und seine Bildung ist für die Literaturgeschichte seines Vaterlandes belehrend. Es können hier natürlich nur die Resultate verschiedenartiger Forschungen kurz zusammengefasst werden.[6]

SABBATAI BEN (Sohn des) ABRAHAM, genannt DONNOLO, — das ist ein italienisches Diminutivum des oben erwähnten lateinischen Namens DOMNUS, in griechischer Quelle *Δόμνουλος*, — gewährt uns den ältesten Beleg dafür, wie die Juden Europa's neben einem hebräischen (später so genannten »heiligen») Namen einen »profanen», der Landessprache entnommenen, mit, oder ohne innere Beziehung zu dem ersteren, zu führen pflegten, wenn Stellung, Geschäft, oder sociale Beziehung sie in engeren Verkehr mit ihrer christlichen Umgebung brachten. Eine richtige Einsicht in dieses Verhältnis ist für die Literaturgeschichte von grosser Bedeutung und teilweise auf die Juden unter arabischer Herrschaft anwendbar.[7] DONNOLO ist also als Vornamen erkannt, aber zu spät, um die Bezeichnung SABBATAI DONNOLO zu verdrängen, welche den Schein eines Familiennamens erweckt. Für uns genüge das einfache DONNOLO.

Dieser bezeichnet sich selbst als Arzt, und die von mir herausgegebenen »pharmakologischen Fragmente» weisen in ihrer Nomenclatur durchaus auf *griechisch-lateinische* Quellen hin. Er war ein geschätzter Arzt, dessen Cur allerdings der heilige NILUS *junior* ablehnte, weil Gottesvertrauen menschliche Hilfe überflüssig mache — wenn solche Anekdoten für Geschichte gelten dürfen.

Von seinen *Lebensverhältnissen* wissen wir mehr, als es bei jüdischen Autoren der älteren Zeit gewöhnlich der Fall ist; er erzählt selbst das Wichtigste in der, seit 1839 bekannten Vorrede zu seinem hebräischen Commentar über das »Buch der Schöpfung», welcher uns nunmehr in einer schönen Ausgabe vorliegt.[8] Leider bietet der hebräische Ausdruck, an sich für die neue Entwickelung eines *wissenschaftlichen* Stiles von Bedeutung, nicht überall die wünschenswerte Klarheit.

DONNOLO ist wahrscheinlich um 913 zu Oria (bei Otranto) geboren, wurde im Juli 925 von Arabern gefangen genommen, jedenfalls als 12-jähriger Knabe in Otranto ausgelöst. Während Eltern und Verwandte nach Palermo und Afrika verkauft wurden, blieb er im Lande der Römer (Christen), wendete sich allen möglichen practischen Dingen mit Eifer zu (»es gab keine Arbeit welche meine Augen[9] sahen und meine Hände nicht machten»), fand aber »Alles eitel», studirte daher die Wissenschaft der Medicin und der Sterne und Sternbilder (Astronomie und Astrologie), copirte sich *Schriften der Alten Weisen Israels,* fand aber in allen diesen Ländern [seines Aufenthalts] »*keinen jüdischen Gelehrten,* der sie verstünde»; hingegen behaupteten einige Gelehrte Israel's von den astrologischen (?) Büchern, welche von israelitischer Hand geschrieben sind, dass Nichts daran sei — weil sie dieselben nicht verstanden — die [rechten] sternkundlichen Bücher befänden sich unter den [nicht israelitischen] Völkern und weichen von den israelitischen ab.[10] DONNOLO forscht daher nach der Wissenschaft der *Griechen,* der *Ismaeliten* [Araber], der *Babylonier* und der *Inder;*[11] er beruhigte sich nicht, bis er die Bücher der Gelehrten »*Jon's* und *Makedon's*» *in ihrer Schrift und Sprache,* nebst ihrer Erläuterung geschrieben hatte, »auch aus den Schriften der Gelehrten Babylon's und Indien's».[12] Das Studium derselben ergab die Übereinstimmung mit den Schriften Israel's.[13] Ferner ergab sich, dass die ganze Sternkunde gegründet [verfasst] sei in der *Baraita* des SAMUEL HA-DORESCH, womit die Bücher der [anderen] Nationen übereinstimmen; nur habe SAMUEL sein Buch dunkel [schwer verständlich] gehalten. Nachdem DONNOLO jene Schriften copirt hatte, suchte er in den Ländern umher nach einem Lehrer und fand einen gelehrten Astrologen aus Babylon,[14] namens BAGADAS, welchen er »durch vieles Geld und grosse Geschenke» bewog, ihn in der Astrologie zu unterrichten,[15] [Alles] »wie es in der *Baraita* des SAMUEL geschrieben steht».[16] Hierauf begann DONNOLO alle zu seiner Kenntnis gelangten Bücher zu erläutern, in Verbindung mit der ihm gewordenen Belehrung des Babyloniers, und schrieb das deutlich nieder in dem Buche *Chakmoni.*

Auf diese Worte folgt ohne jeden sichtbaren Zusammenhang eine chronologisch-astrologische Stelle für das Schöpfungsjahr 4706 (946); dann ebenso unvermittelt eine Abhandlung über den Menschen als Ebenbild Gottes — daher die Überschrift »Commentar über: Wir wollen machen» (Genesis 1, 26) — worin der Verfasser seine anatomischen und astronomischen

Anschauungen aufbietet, um den Menschen als *Mikrokosmos* darzustellen. Erst S. 30 heisst es: »Hier ist der Anfang des Commentars über das Buch der Schöpfung». Über den Commentar selbst ist nur zu bemerken, dass DONNOLO das Buch der Schöpfung für eine Offenbarung Gottes an ABRAHAM hält, und dass die Zehnzahl ihn nur zu kurzen theologischen Betrachtungen über die Unendlichkeit Gottes veranlasst; während die 22 Buchstaben ihn auf physikalische Erscheinungen, und die 7 Planeten auf ihre Qualitäten und Kräfte führen.

Das Buch *Chakmoni* (eigentlich Personennamen, 1. Chron. 11: 11; 27: 32) findet sich als Titel des Commentars, so dass man in demselben die astrologische Auseinandersetzung und die Erklärung der *Baraita* des SAMUEL erwarten durfte; ja es könnte die chronologische Notiz hinter der biographischen Vorrede ein Fragment davon sein. Es konnte aber auch der Titel *Chakmoni* ursprünglich die astrologische Abhandlung bezeichnen und auf den Commentar übertragen sein. CASTELLI hat die verschiedenen Hypothesen erörtert (Introd. p. 9); wir begnügen uns zu constatiren, dass die für die Culturgeschichte interessanten vergleichenden Studien DONNOLO's leider verloren scheinen, bis auf einige alte Citate, die sich nicht im Commentar finden; dazu gehört wahrscheinlich auch die Stelle am (defecten) Ende des gedruckten *Pseudo*-SAADIA zum Buch der Schöpfung, wo es heisst, dass im Jahre 4706 am 28. Elul der Drachenschwanz in den Eimer (Wassermann) trat.[17]

Wir dürfen DONNOLO nicht verlassen, ohne hervorzuheben, dass seine Schriften über *profane* Wissenschaften zu den ersten hebräischen Europa's gehören, vielleicht die allerersten von europäischen Juden sind, und dass die erste Anregung zu denselben nicht aus der arabischen Wissenschaft hervorging.

Eine lange Zeit nach DONNOLO ist keine Schrift eines italienischen Juden auf dem Gebiete der profanen Wissenschaften aufzufinden; doch hat ein jüdischer *Anonymus* in Sicilien dem bekannten arabischen Astronomen AL-ZARKALI (XI. Jahrh.) astronomische Beobachtungen mitgeteilt.[18]

Wir müssen unsern Weg nach Westen weiter verfolgen; um aber nicht sofort, und wahrscheinlich nutzlos, umkehren zu müssen, sei hier noch ein wenig vorgegriffen, um eine wenig glaubwürdige Nachricht zu erledigen. Die armenische Chronik des MATTHÄUS von Edessa (um 1136) erzählt:[19] Im J. 1106 fand eine Controverse zwischen einem armenischen, nach Constantinopel gesendeten Gelehrten und den griechischen wegen der abweichenden Berechnung des Osterfestes statt. Ersterer forderte

den Kaiser Basilius II. auf, nach einem Juden (Moses) auf Cypern zu senden, welcher eine weite Kenntnis in der Wissenschaft des Kalenders »und allen Zweigen des menschlichen Wissens» besitze. Moses kam und entschied in Gegenwart des Kaisers natürlich für die Armenier. Die ganze, hier auf's Wesentlichste beschränkte Erzählung trägt die Farben einer tendentiösen *Erfindung*.

20. Auf der iberischen Halbinsel hat im X. Jahrh. in Anschluss an politische Verhältnisse eine *freiere Richtung des Geistes* unter Arabern und Juden sich zu entwickeln begonnen, welche im den folgenden 2 Jahrhunderten, der Blüthezeit ihrer beiderseitigen Literatur, nur durch den blinden Fanatismus der sogenannten Almohaden gewaltsam eingeengt wurde. Noch sind die alten allgemeinen Anschauungen von jener höchst interessanten Literaturperiode nicht durch ein ausgeführtes Bild ersetzt, welches die vielen Specialforschungen zusammenfasst. Die arabischen Männer »Andalusiens», zu welchen sich der, bis nach Ägypten fliehende Maimonides noch gerne mit einem nicht unberechtigten Selbstbewusstsein zählt, sie waren die Himmelstürmer, welche unter der Ägide aristotelischer Philosophie die hergebrachte Kosmologie des Ptolemaeus zu bekämpfen wagten. Die Rolle anzugeben, welche die *Mathematik* überhaupt in der Umgestaltung der Wissenschaften spielte, kann nicht die Aufgabe dieser Abhandlung sein. Hingegen muss daran erinnert werden, dass selbst im Kreise der traditionellen jüdischen Studien die Unabhängigkeit von der Autorität der Gaonen schon im X. Jahrh. vorbereitet war (oben § 17, S. 26 unter 2), dass der dort genannte Chisdai Schaprut eine hohe Stellung am Hofe des Khalifen einnahm, wenn auch nicht die eines Wezirs; gelegentlich mag auch erwähnt werden, dass ein hebräischer Brief desselben an den zum Judentum bekehrten König der Chazaren — der die Probe der Kritik besser bestanden hat als die Antwort darauf — wie die Schriften Donnolo's, zu den ältesten Documenten der europäischen Juden gehört.

Es ist nichts weniger als befremdend, von einem jüdischen Astronomen Spaniens aus jener Zeit zu vernehmen; leider sind die Nachrichten wiederum dürftig und zweifelhaft.[20]

Hasan, jüdischer Richter in Cordova, schrieb über den jüdischen Kalender 3 Schriften nach dem Zeugnisse des Abraham ibn Esra (*Ibbur f.* 10ᵇ). Isak Israëli teilt Daten der Berechnung (4713, 4732) mit, welche Schwierigkeiten darbieten. Abr. Geiger lässt ihn um 950 geboren sein und identificirt ihn mit Jekutiel ibn Hasan, dessen Tod der berühmte Dichter

und Philosoph SALOMO IBN GABIROL (im J. 1039) in einem ihn sehr rühmenden Gedichte betrauerte.[21] HASAN wäre danach ungewöhnlich alt geworden. CH. SLONIMSKI, in seinem hebräischen, kritischen Werke über den jüdischen Kalender (*Jesode ha-Ibbur*, 3. Auflage, Warschau 1889, S. 47), vermutet, dass das *Sonnenjahr*, welches dem späteren jüdischen Kalender zu Grunde liegt und auf einen Talmudlehrer ADDA BAR AHABA zurückgeführt wird, dem bekannten Araber AL-BATTANI entnommen sei, auf welchen sich HASAN beruft, und von letzterem (oder einem Zeitgenossen im Westen Europa's?) eingeführt sei.[22]

Vielleicht gehört dem XI. Jahrh. an der Arzt JEHUDA (wohl richtiger als ISAK) BEN (IBN?) RAKUFIAL (nach einigen DAKUFIAL); die Endung *ial* des Namens weist auf Spanien,[23] wie ja auch seine Schrift über den jüdischen Kalender schon von ABRAHAM BAR CHIJJA, dem Spanier (spätestens 1136), erwähnt wird.[24]

Mit der 2. Hälfte der XI. Jahrhunderts werden wir endlich für unsere Angaben einen festeren Boden betreten, und die mathematischen Schriften meist aus eigener Anschauung beschreiben können.

[1] A. BERLINER, *Geschichte der Juden in Rom.* Frankfurt a. M. 1893.

[2] *Des heiligen* AGOBARD *Abhandlungen* u. s. w. *übertragen von* EM. SAMOSTZ, Leipzig 1852 (vergl. S. CASSEL, Artikel »Juden» in der *Realencyklopädie* von ERSCH und GRUBER, S. 65), Vorwort, wo die Kenntnis bestimmter Bücher, wie das Buch der Schöpfung, ohne hinreichenden Grund angenommen wird.

[3] Siehe mein Werk: *Die hebräischen Übersetzungen des Mittelalters,* S. 871.

[4] VIRCHOW's Archiv für pathol. Anatomie **38**, 1868, S. 67; dazu Zeitschr. der deutschen morgenländ. Gesellsch. **20**, 1866, 431, bei FLÜGEL zu *Fihrist* II, 143; ROHLFS, Deutsches Archiv für Geschichte der Medicin I, 443. — ANTONIUS BAUMSTARK (*Lucubrationes Syrograecae,* Diss. Lips. 1894, p. 366) ist in seinen Hypothesen nicht — baumstark.

[5] VIRCHOW's Archiv l. c., S. 80—85. — Der biblische Namen SERACH kommt im XI. (so) Jahrh. wieder vor. — Ein jüdischer Arzt JOSEF lebte allerdings 848 in Salerno (Archiv l. c., S. 89).

[6] Hauptquelle ist meine Abhandlung: *Donnolo, Pharmakologische Fragmente aus dem X. Jahrh.* etc. aus VIRCHOW's Archiv

37—**42**, 1868. Zu unserem Texte s. Bd. **38**, S. 67; vergl. CASTELLI, Introduzione (s. weiter unten) p. 6 ff.

[7] So z. B. heisst Jehuda oft hebräisch Arje, arabisch *Ja'hja,* aber auch *Abbas* (Löwe), deutsch Löwe, Loeb. Prof. GILDEMEISTER sträubte sich gegen die ihm gewordene Belehrung in seiner *Antwort hebr. sogen. Bibliogr. betreffend,* p. XXVI, indem er sich auf ein Beispiel beruft, aber *die Parenthese weglässt,* welche eben die identischen Namen unterordnet! Beispiele aus dem Kreise jüdischer Mathematiker sind: JACOB B. MACHIR = PROPHATIUS, LEVI B. GERSON = LEO DE BAÑOLAS.

[8] *Il Commento di* SABBATAI DONNOLO *sul libro della creazione. Con note* etc. *da* DAVID CASTELLI, Firenze 1880; s. CASTELLI's Introduzione Cap. II, p. 6.

[9] Im Texte CASTELLI's S. 4, Zeile 2 ist ein Druckfehler.

[10] Auch an dieser Stelle kann: »von (oder »in») der Hand Israel's» nur den israelitischen Ursprung bedeuten, wie später, wo aber nur von der *Baraita* des SAMUEL die Rede ist; was meint DONNOLO ausserdem?!

[11] Natürlich nur als Mittelquellen; s. unten Note 12.

[12] Das heisst wohl, was daraus in griechischen Quellen zu finden war.

[13] Ein beachtenswertes Argument (um nicht zu sagen: Zeugnis) dafür, dass es *keine specifisch jüdische Astrologie* gab.

[14] *Babel* muss nicht das eigentliche Babylon oder Bagdad bedeuten, es wird auch für andere Orte gebraucht; s. Hebr. Bibliogr. VII, 14; *Jeschurun* herausgegeben von KOBAK VII, 4; vgl. ZUNZ, *Litteraturgesch.* S. 508 — BAGADAS gab sich vielleicht für einen Babylonier aus?

[15] Unter den Specialitäten erscheint ein »Messer (Abmesser) des Schattens des Rohrs», = *Gnomon?*

[16] Über diese Schrift s. oben § 8. DONNOLO ist der älteste bekannte Autor, der sie ausdrücklich citirt und behandelt, was zu ihrem Vaterlande (das byzantinische Reich, nach ZUNZ) gut passt.

[17] Über das Verhältnis von *Pseudo*-SAADIA zu DONNOLO s. Magazin für die Wissensch. d. Judenthums **19**, 1892, S. 81, Monatschr. f. Gesch. u. Wissensch. d. Jud. 1892/3, S. 75, 120.

[18] WOEPCKE, *Recherches* etc. (1856) p. 14; GEIGER's Jüd. Zeitschr. I, 243 Anm.

[19] DULAURIER, *Biblioth. hist. armen.*, Paris 1858, woraus WIENER in Hebr. Bibliogr. VI, 116.

[20] Der angebliche »spanische» Astrolog um 810 (STEINSCHNEIDER, *Jewish Lit.* 183, 191, 355 n. 29), nämlich SAHL, oder SOHEIL, ist oben als Erfindung CASIRI's nachgewiesen. — Hingegen ist oben nachzutragen ABU DA'UD in Bagdad (911/2), vielleicht identisch mit DA'UD (angebl. 430 H. = 1038/9), und Verfasser einer Prophezeiung (*Mul'hama*); s. die Einzelheiten in Zeitschr. der deutschen morgenl. Gesellsch. **24**, 1870, 386.

[21] *Catal. libr. h. in Bibl. Bodl.* p. 2171, 2333 und *Addenda*, letztere übersehen bei GEIGER, *Salomo ben Gabirol* S. 139, Anm. 75, vgl. S. 118 Anm. 24. — Bei ISRAELI (IV, 14 f. 28 Col. 2 ed. 1848) heisst es: »im J. 4713, dem 1. unseres Cyklus war der 25. Kislew am Sabbat»; in jenem Jahr war aber der 1. Kislew ein Freitag; f. 28 Col. 4 unten: »im J. 4732, dem 1. Jahre des 250. Cyklus (von 19 Jahren) 25. Kislew»; in diesem Jahre war der 1. Kislew ein Sonntag, also muss *28*. Kislew corrigirt werden, wie auch SLONIMSKI, wohl nach der älteren Ausgabe, liest.

[22] AL-BATTANI, dessen Namen bei ISRAELI falsch gedruckt ist, wird auch von OBADJA im Commentar zu MAIMONIDES, *de novilun.* Kap. 12 genannt.

[23] *Cat. l. h. Bodl.* p. 2518 u. *Addenda;* Hebr. Bibl. XIV, 96.

[24] *Cat. l. h. Bodl.* p. 2171; *Jewish. Lit.* p. 183, 355, n. 30.

Desargues e la geometria numerativa.

Appunti di GINO LORIA in Genova.

In una lettera di DESCARTES, alla quale delle frequenti citazioni hanno dato una grande rinomanza, si legge il seguente giudizio sopra DESARGUES: »La façon dont il commence son raisonnement, en l'appliquant tout ensemble aux lignes droites et aux courbes, est d'autant plus belle qu'elle est plus générale, et semble être prise de ce que j'ai coutume de nommer métaphysique de la géométrie, qui est une science dont je n'ai point remarqué qu'aucun autre se soit servi, sinon ARCHIMÈDE.»[1] Qual era il genere di ragionamento al quale alludeva il celebre autore del *Discours de la méthode?* Dalle parole citate, nemmeno se si cerca di illustrarle ricorrendo alle opere del Siracusano, non scaturisce la risposta. Il primo che credette di indovinare il senso di quelle frasi fu il PONCELET, il quale nell' introduzione alla sua *Analyse des transversales appliquée aux courbes et aux surfaces géométriques* asserira che »DESARGUES avait eu la singulière et lumineuse idée de traiter les courbes géométriques comme un assemblage de lignes droites en nombre égal à celui qui marque le degré de ces courbes».[2] Questa interpretazione venne tacitamente accettata per vera da CHASLES, il quale asserì senz' altro che »DESARGUES appliquait, aux systèmes de lignes droites, les propriétés des lignes courbes, ce qui est aujourd'hui chose naturelle et très usitée, parce qu'un système de droites peut être représenté par une équation unique, comme une courbe géométrique, mais ce qui était alors une conception neuve et originale».[3]

Adottando il modo di vedere dei due illustri geometri ora citati, si concluderebbe che a DESARGUES si deve far risalire uno dei metodi di ricerca più fecondi della geometria e che oggi si considera come una delle faccie che presenta il »principio della conservazione del numero» su cui riposano le soluzioni di tanti problemi di geometria numerativa.[4] È quanto io stesso feci alcuni anni or sono.[5] Ma ritornando ora a considerare la questione, mi parve che il senso attribuito alle frasi di DESCARTES fosse il frutto di un' interpretazione, sinchè non si dimostri l'opposto, arbitraria; e mi sembrò anche che la considerazione attribuita a DESARGUES, per quanto potesse sembrare ovvia al creatore del »principio di continuità» in geo-

metria, fosse difficilmente ammissibile in un' epoca in cui la teoria delle curve piane era si può dire appena sbocciata colla geometria analitica di DESCARTES et FERMAT. Ad ogni modo DESARGUES è geometra troppo originale perchè sia lecito di escludere *a priori* in lui la possibilità di una concezione ardita come quella di cui trattiamo. Onde è debito dello storico di esaminare i di lui lavori con la più scrupulosa attenzione per cercare gli argomenti a sostegno o contro le idee propugnate da PONCELET. Tale esame fatto più di trent' anni or sono dal CREMONA[6] (il quale, come è noto, di quel metodo seppe trarre profitto da par suo), e ripetuto recentemente da M. CANTOR[7] e da me sulle *Oeuvres de Desargues réunies et analysées par M.* POUDRA (Paris 1864) ha dato un risultato completamente negativo; e si noti che per raggiungerlo stavano a nostra disposizione, non soltanto molte delle opere del geometra lionese, ma ancora le critiche di persone malevoli e di mediocre levatura, che si armarono di forti lenti d'ingrandimento per scoprire perfino le mende microscopiche delle argomentazioni, da lui esposte nelle opere ora superstiti ed in altre (fra cui basterà citare les *Leçons de ténèbres*), mende fra cui esse non avrebbero mancato di ascrivere quella di ragionare su un sistema di n rette e di concludere poi per una curva qualunque di ordine n.

A queste conclusioni negative sembra essersi avvicinato negli ultimi anni della sua vita lo stesso PONCELET, il quale nelle *Annotations* alla seconda edizione del *Traité des propriétés projectives* riconosce di essersi lasciato trascinare a »trop généraliser les éloges» ed in particolare di non essere riuscito a trovare in DESARGUES »rien qui concerne les courbes géométriques en général comparées à des systèmes de droites».[8] Queste dichiarazioni, d'accordo con le osservazioni dianzi esposte, ci sembrano bastanti ad autorizzare a concludere che il metodo di ricerca sopra indicato e che per le moltiplici e brillanti applicazioni che ricevette ai nostri giorni gode di una ben meritata celebrità, non può sino a prova contraria, farsi risalire a DESARGUES, ma — malgrado le allusioni ad esso che si possono rintracciare nelle opere di CARNOT[9] — deve, finchè non ne siano citate delle applicazioni più antiche, attribuirsi a PONCELET stesso.

Questo abbiamo voluto osservare in primo luogo per evitare che un errore storico ulteriormente si propaghi (e alla diffusione di esso sembrano propizie, non tanto quel mio scritto e le traduzioni di cui fu onorato, quanto le sempre nuove edizioni »conformes à la première» dell *Aperçu historique*) ed in

secondo luogo per segnalare agli storici della geometria il problema di determinare qual era il genere di ragionamenti di DESARGUES che DESCARTES tanto ammirava nella lettera succitata.

[1] *Lettres de* DESCARTES *où sont traités les plus belles questions touchant la morale, la physique, la médecine et les mathématiques* (ed. CLERSELIER). T. IV, p. 379.
[2] Journal für die reine und angewandte Mathematik **8**, 1832, p. 27.
[3] *Aperçu historique* etc. § 21 (2ª ed. 1875, p. 76).
[4] Cfr. SCHUBERT, *Kalkül der abzählenden Geometrie* (Leipzig 1879), p. 12 (§ 4 n. III).
[5] *Il passato e il presente delle principali teorie geometriche.* Memorie della r. accademia delle scienze di Torino **38**$_2$, 1887. Si veggano anche le vèrsioni tedesca e polacca di tale monografia.
[6] Annali di matematica pura ed applicata **5**, 1863, p. 332—336.
[7] Nel II Vol. delle *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* (Leipzig 1892).
[8] T. I p. 410.
[9] Veggasi: *De la corrélation des figures de géométrie* (Paris, An IX = 1801) e *Géométrie de position* (Paris, An XI = 1803).

RECENSIONEN. — ANALYSES.

G. Loria. LE SCIENZE ESATTE NELL' ANTICA GRECIA. LIBRO I. I GEOMETRI GRECI PRECURSORI DI EUCLIDE. Modena 1893. 4°, 168 p. + 2 pl. LIBRO II. IL PERIODO AUREO DELLA GEOMETRIA GRECA. Modena 1895. 4°, 236 + (1) p. + 2 pl.

M. LORIA s'est proposé d'écrire une histoire des mathématiques grecques, et il en a publié déjà deux parties.

La première partie contient six chapitres, savoir: 1. *Aperçu général de la géométrie grecque avant* EUKLIDES. 2. THALES *et l'école ionienne.* 3. PYTHAGORAS *et l'école italique.* 4. *Les écoles des éléates, des atomistes et des sophistes.* 5. *Les pythagoriciens et leurs successeurs.* 6. *De* SOKRATES *à* EUKLIDES. A la fin de cette partie, M. LORIA a ajouté un aperçu des recherches géométriques des Egyptiens et des Babyloniens, et une note sur la tentative de VIVIANI de réstituer les *Loci solidi* d'ARISTAIOS.

Le plan de la deuxième partie est à peu près le même que celui du mémoire: *Il periodo aureo della geometria greca* publié par M. LORIA en 1890 et analysée par M. KÜNSSBERG dans la Biblioth. Mathem. 1891, p. 55—60. En effet, cette partie peut être considérée comme une nouvelle édition entièrement refondue et notablement augmentée du mémoire cité. On y trouve à la fin une remarque sur l'algèbre géométrique attribuée aux Grecs par M. ZEUTHEN, et quelques notes sur différentes tentatives de réstituer des ouvrages perdus d'EUKLIDES et d'APOLLONIUS.

Bien que l'ouvrage de M. LORIA ne contienne guère des pensées parfaitement nouvelles ni des faits inconnus jusqu'à présent, il est néanmoins d'un profond intérêt à cause de l'impartialité de l'auteur et grâce à ses lectures très étendues, qui lui ont permis d'y donner une foule de renseignements qu'on ne saurait trouver réunis dans aucun autre livre sur le même sujet. Nous osons dire qu'il y a peu de recherches originales sur la géométrie grecque dont M. LORIA n'ait pas pris connaissance, et les rares indications inexactes ou incomplètes qu'on pourrait découvrir dans son ouvrage, semblent être sans aucune importance. Quelques-unes en sont sans doute de simples fautes de plume ou d'impression, p. ex. le renvoi (II, p. 18, lignes 20—21) au Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. au sujet de notre Notice sur les versions *latines* des éléments d'EUKLIDES publiées en Suède, et la notice (II, p. 67, note 2) que HASSAN-BEN-HAITHEM (ALHAZEN) est mort en »430 *d. C.*»

Stockholm. G. ENESTRÖM.

F. Cajori. A HISTORY OF MATHEMATICS. New York Macmillan & Co. 1895. 8°, XIV + 422 p.

L'ouvrage de M. CAJORI dont nous allons rendre compte a été publié pour la première fois au commencement de l'année 1894; il a été réimprimé en 1895 avec de légères corrections et quelques »addenda» (une seule page). Nous ignorons pourquoi MM. Macmillan & Co. n'ont pas ajouté les mots »Second edition» sur le feuillet de titre de la réimpression.

Après une introduction sur l'importance de l'étude de l'histoire des mathématiques (p. 1—4), l'auteur expose le développement des mathématiques dans l'antiquité (p. 5—83) et au moyen âge (p. 84—137), d'où il passe à l'histoire des mathématiques jusqu'à LAGRANGE et LAPLACE inclusivement (p. 138—290), et il finit par une esquisse des progrès de cette science pendant le 19[e] siècle (p. 291—403). Au commencement, on trouve une liste de 101 écrits historiques ou biographiques consultés par l'auteur, et à la fin un index (18 pages à deux colonnes).

Dans la préface, M. CAJORI, nous avertit qu'il a rédigé son ouvrage à l'usage des professeurs et des étudiants qui désirent avoir recours à un aperçu de l'histoire générale des mathématiques; il s'ensuit qu'on ne doit guère demander à y trouver des résultats de recherches originales. Aussi M. CAJORI indique expressément qu'il a fait un usage étendu des livres suivants: CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik,* I (première édition), II; GOW, *A short history of greek mathematics;* HANKEL, *Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter;* ALLMAN, *Greek geometry from Thales to Euclid;* CHASLES, *Geschichte der Geometrie* (traduction par SOHNCKE); GERHARDT, *Geschichte der Mathematik in Deutschland;* TODHUNTER, *A history of the mathematical theory of probability* et *A history of the theory of elasticity and of the strength of materials;* LORIA, *Die hauptsächlichsten Theorien der Geometrie in ihrer früheren und heutigen Entwickelung* (traduction par SCHÜTTE). Mais d'autre part on ne doit pas considérer l'ouvrage de M. CAJORI comme une simple compilation des livres cités, et dans l'aperçu du développement des mathématiques pendant notre siècle il paraît même avoir remonté aux sources originales ou au moins à des monographies équivalant à peu près à ces sources.

Pour ce qui concerne le plan de l'ouvrage, il nous semble en général bon. Naturellement, les avis seront toujours partagés sur l'espace qui doit être assigné légitimement à l'histoire de

chaque période et de chaque théorie, et dans un *abrégé* de l'histoire des mathématiques il est presque impossible de traiter chaque partie avec une étendue proportionnelle à son importance et en même temps d'une manière intelligible. De notre côté, nous avons vu avec beaucoup de plaisir que l'auteur a consacré plus d'un quart de son livre aux mathématiques du 19e siècle. Nous regrettons seulement qu'il n'y ait pas réservé deux ou trois pages pour les importantes recherches historico-mathématiques de nos temps. Il est vrai qu'il fait mention incidemment de quelques-unes de ces recherches en parlant de DE MORGAN (p. 316), HANKEL (p. 322) et TODHUNTER (p. 334), mais ces notices détachées ne nous donnent point une idée nette des progrès et de l'état actuel de ces recherches. A propos de cela, nous aurions aussi désiré de trouver dans l'ouvrage de M. CAJORI quelques mots sur les principaux journaux mathématiques de nos jours.

Cependant, ces remarques sont peu importantes, et pour porter un jugement définitif sur la valeur de l'ouvrage de M. CAJORI, il faut avoir des réponses aux questions suivantes: L'auteur a-t-il puisé aux meilleures sources dont on puisse disposer actuellement? Les a-t-il utilisées d'une manière satisfaisante?

Quant à la première question, nous avons déjà signalé les livres dont M. CAJORI a fait un usage étendu (malheureusement il avait achevé la rédaction de son traité avant la publication de la seconde édition du premier tome des *Vorlesungen* de M. CANTOR), et presque tous ces livres méritent sans doute d'être vivement recommandés; nous avons aussi fait observer qu'il a consulté pour son ouvrage plus de 100 écrits historiques ou biographiques. En examinant la liste bibliographique déjà mentionnée, on trouve néanmoins qu'elle est assez incomplète; ainsi p. ex. elle ne contient aucun des nombreux et importants écrits de M. PAUL TANNERY. De même, on y cherche en vain le Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche et la Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik. Ce dernier recueil nous semble à peu près indispensable à la rédaction d'un abrégé d'histoire des mathématiques, non seulement à cause des monographies y contenues, mais aussi à cause des analyses (la plupart de la main de M. CANTOR) d'ouvrages récents; en effet ces analyses renferment beaucoup de remarques précieuses permettant d'éviter la répétition d'indications incorrectes d'autres auteurs. — La Bibliotheca

Mathematica est citée dans la liste, mais il paraît que M. CAJORI n'ait pas eu recours à tout ce recueil à l'époque où il composait son ouvrage.

Quant à la seconde question, il nous faut avouer que nous n'avons pas eu le loisir d'examiner le traité de M. CAJORI assez en détail pour pouvoir y donner une réponse décisive, mais il nous semble qu'il ait utilisé ses sources d'une manière en général satisfaisante. On voit aisément, c'est vrai, qu'il ne les a pas soumises à une critique méthodique, mais, vu le but modeste de l'ouvrage, il ne serait guère juste de le lui reprocher. Tout au plus on aurait pu désirer qu'il eût évité de répéter quelques indications inexactes, corrigées déjà dans les *Vorlesungen* de M. CANTOR, p. ex. celle (p. 154) qu'il y a eu un mathématicien nommé »Peter Metius» (voir CANTOR, l. c. II, p. 552; cf. Biblioth. Mathem. 1888, p. 84). Si, d'un autre côté, l'esquisse du développement des mathématiques au 19[e] siècle présente plusieurs lacunes et inégalités, la cause en est sans doute que M. CAJORI a eu sur ce terrain trop peu de devanciers; en tout cas, on y voit qu'il a fait des efforts sérieux pour s'acquitter de sa tâche extrêmement difficile.

Pendant la lecture de l'ouvrage de M. CAJORI, nous avons fait quelques autres petites remarques, dont nous insérons ici les suivantes.

P. 25. »He [HIPPOKRATES] committed an error in attempting to apply this result to the squaring of the circle.» Il n'est point démontré que HIPPOKRATES ait commis cette erreur; cf. TANNERY, *La géométrie grecque* I (1887), p. 119—120; CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* I (2[de] édition, 1894), p. 193—194.

P. 55. M. HEIBERG (Biblioth. Mathem. 1894, p. 97—98) a fait observer qu'il faut mettre SERENOS d'*Antinoeia* au lieu de SERENOS d'Antissa.

P. 104. Ici M. CAJORI indique sans réserve que le 15[e] livre des *Elementa* a pour auteur DAMASCIUS. Mais aux pages 38 et 61 il dit avec plus de raison que DAMASCIUS a été *supposé* auteur de ce livre, et à la page 51 il se restreint à l'indication que »recent critics are of opinion that the fifteenth book was written by an author who lived several centuries after Christ». En effet, on semble porté à croire maintenant que ce livre est composé de trois parties distinctes dont la troisième a peutêtre pour auteur DAMASCIUS (cf. LORIA, *Le scienze esatte nell' antica Grecia* II (1895), p. 88—92).

P. 107. »*Aldshebr walmukabala,* the nearest English trans-

lation of which is »restoration» and »reduction». By ... »reduction» [was meant] the uniting of similar terms. Thus, $x^2-2x=5x+6$ passes by aldshebr into $x^2=5x+2x+6$; and this, by walmukabala, into $x^2=7x+6$.» Ici, la lettre *w* signifiant »et», il faut lire »restoration and reduction» au lieu de »restoration» and »reduction» et »by almukabala» au lieu de »by walmukabala». Quant à la définition du terme »almukabala», il semble le plus convenable d'accepter celle donnée déjà par BEHA-EDDIN († 1622) et exprimée par M. CANTOR (l. c. I, p. 676) sous la forme suivante: »[Mukabala ist genannt] wenn Glieder gleicher Natur auf beiden Seiten weggelassen werden, so dass Glieder dieser Art nach vollzogener Gegenüberstellung nur noch auf der einen Seite vorkommen, wo sie eben im Überschusse vorhanden waren». D'après cette définition, l'opération mukabala ne peut pas être effectuée sur l'équation $x^2-2x=5x+6$.

P. 134. »In the mathematical writings of the monk LUCA PACIOLI ... symbols began to appear.» P. 135. »LUCAS PACIOLI ... first introduced symbols in algebra.» Mais à la page 150 M. CAJORI fait observer très justement que les symboles + et — ont été employés déjà en 1489 par WIDMANN, tandis que la *Summa* de PACIUOLI ne fut publiée qu'en 1494. Au reste, des symboles ont été introduits en algèbre déjà dans l'important traité manuscrit *Triparty en la science des nombres* (1484) par CHUQUET; il semble un peu étrange que M. CAJORI ne fasse aucune mention de CHUQUET, tandis que M. CANTOR, dans le 2^d tome de ses *Vorlesungen,* a consacré 12 pages à ce mathématicien distingué.

P. 134. Nous regrettons une indication sur l'*Algorismus* de SACROBOSCO.

P. 180. »FERMAT's theorem ... was proved by EULER.» P. 252. »He [EULER] first supplied the proof to FERMAT's theorem.» La première démonstration de ce théorème est due à LEIBNIZ (cf. la note de M. G. VACCA: *Intorno alla prima dimostrazione di un teorema di Fermat* dans la Biblioth. Mathem. 1894, p. 46—48).

P. 240. M. CAJORI indique que, dans l'*Analyse des infiniment petits,* on trouve pour la première fois la méthode de déterminer la valeur limite d'une fraction dont les deux termes tendent en même temps vers zéro. Il aurait pu y ajouter que cette méthode est due à JEAN BERNOULLI et non à HÔPITAL (cf. Biblioth. Mathem. 1894, p. 71, note 9).

P. 252. »EULER enunciated and proved a well-known

theorem, giving the relation between the number of vertices, faces and edges of certain polyhedra, which, however, appears to have been known to DESCARTES.» Par les recherches de M. E. DE JONQUIÈRES, il est mis hors de doute que DESCARTES a énoncé formellement et explicitement la relation $F + S = A + 2$ (cf. Biblioth. Mathem. 1890, p. 43—55).

Pour ce qui concerne les noms des mathématiciens et les notices biographiques sur eux, il y a ça et là de petites erreurs dont quelques-unes ne sont possiblement que des fautes d'impression. En voici des épreuves. P. 154: au lieu de A. Quercu lire S. A QUERCU. P. 155: au lieu de Lilius Clavius lire CHRISTOPHORUS CLAVIUS (ALOYSIUS LILIUS était un astronome contemporain à CLAVIUS). P. 177: au lieu de La Louère lire LA LOUVÈRE ou LA LOUBÈRE. P. 346: au lieu de Appel lire APPELL. — P. 290. On semble ignorer l'année de naissance et de mort de GIOVANNI CEVA; l'indication 1648—1737 se rapporte à son frère TOMASO CEVA (cf. VIVANTI, *Il concetto d'infinitesimo* [1894], p. 98). P. 346. APPELL est né en 1855 (non 1858). P. 353. SCHLÄFLI est né en 1814 (non 1818). P. 380. Selon des renseignements publiés après la mort de SOPHIE KOWALEVSKI, cette mathématicienne était née en 1851 (non 1853). — P. 139. TYGE BRAHE n'était pas allemand de naissance (cf. p. 168). P. 166. GIRARD, dans une note insérée aux *Oeuvres* de STEVIN, nous apprend formellement qu'il était étranger dans les Pays-Bas; il était natif de Lorraine. P. 324. WRONSKI n'a pas demeuré en Italie; il était polonais de nation, mais il a véçu en France pendant la plus grande partie de ses jours.

Comme des fautes d'impression il faut évidemment regarder la formule $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = (1 + 2 + \ldots + n)^{\frac{2n+1}{3}}$ à la page 111, et probablement aussi »volaria» (au lieu de »velaria») à la page 237. Cette dernière faute est répétée dans l'*Index*, où il y a, du reste, quelques autres petites corrections ou additions à faire (ainsi p. ex., il y manque le mot »Wronskian», avec renvoi à la p. 325).

Avec tout cela, il n'en est pas moins vrai que l'ouvrage de M. CAJORI pourra être très utile aux professeurs et aux étudiants, et qu'il leur inspirera en même temps du goût pour l'histoire des mathématiques. Nous esperons donc que cet ouvrage sera répandu parmi eux, et que l'auteur aura bientôt le plaisir d'en publier une nouvelle édition revue et corrigée. A cette édition nous lui proposons d'annexer, à l'aide des

étudiants, une liste bibliographique des principaux écrits d'histoire des mathématiques; cette liste pourra être composée sans difficulté en consultant les différentes années du Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik et la section »Publications récentes» de la Bibliotheca Mathematica.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von || journal d'histoire des mathématiques publié par G. ENESTRÖM. Stockholm. 8°.

1895: 1. — [Analyse de l'année 1894:] *Venezia*, Istituto Veneto, Atti **6**$_7$, 1895, 522—526. (A. FAVARO.)

Физико-математическія науки въ ихъ настоящемъ и прошедшемъ. Журналъ издаваемый В. В. Бобынинымъ. Москва. 8°.

12 (1893—1894): 4. — Les sciences mathématiques dans leur état actuel et passé. Journal publié par V. V. BOBYNIN.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von M. CANTOR. Leipzig. 8°.

40 (1895): 2. — [Analyse de l'année 1892 (fin):] Fiziko-matem. naouki **12** (1893—1894), 1895, 341—344. (V. BOBYNIN.)

°**Berthold, G.**, Der Magister Johann Fabricius und die Sonnenflecken nebst einem Excurs über David Fabricius. Leipzig, Veit 1894.

8°, 60 p. — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **40**, 1895; Hist. Abth. 54. (CANTOR.)

Berthold, G., Die Originalluftpumpe Otto von Guericke's.

Annalen der Physik **54**, 1895, 724—726.

Berthold, G., Dr. Christian Heræus und die Original-Luftpumpe Otto von Guericke's.

Stockholm, Vetenskapsakad., Öfversigt **52**, 1895, 45—53.

БОБЫНИНЪ, В. В., Русская физико-математическая библіографія. **3**:2 [1806—1809]. Москва 1893—1895.

8°, (2) + 170 p. — BOBYNIN, V. V., Bibliographie russe des sciences mathématiques et physiques. Catalogue de livres et de mémoires des sciences mathématiques et physiques publiés en Russie depuis l'invention de l'imprimerie jusqu'à présent. — Appendice au journal »Fiziko-matematitcheskia naouki» **12** (1893—1894).

БОБЫНИНЪ, В. В., Греко-Египетскій математическій папирусъ изъ Акмима.

Fiziko-matem. naouki **12** (1893—1894), 1895, 301—340. — BOBYNIN, V. V., Le papyrus gréco-égyptien d'Akmim.

Burkhardt, H., Paolo Ruffini e i primordii della teoria dei gruppi. Traduzione di E. PASCAL.
Annali di matem. **22**, 1894, 175—212. — Traduction du mémoire indiqué à la p. 63 de la Biblioth. Mathem. 1892.

Cajori, F., A history of mathematics. New York, Macmillan & Co. 1895.
8°, XIV + 422 p. — [3·50 doll.] — Réimpression, avec quelques corrections et additions (cf. Biblioth. Mathem. 1894, 62).

Cantor, M., M. Zeuthen et sa géométrie supérieure de l'antiquité.
Bullet. d. sc. mathém. 19_2, 1895, 64—69.

°**Christensen, S. A.**, Mathematikens Udvikling i Danmark og Norge i det 18. Aarhundrede. Odense 1895.
8°, 270 p. — [5 Kroner.]

Colaw, J. M., Alexander Macfarlane. Biography.
The american mathem. monthly (Kidder) **2**, 1895, 1—4. — Avec portrait.

Curtze, M., Miscellen zur Geschichte der Mathematik im 14. und 15. Jahrhundert.
Biblioth. Mathem. 1895, 1—8.

Duro, C. F., De algunas obras desconocidas de cosmografía y de navegación, y singularmente de la que escribió Alfonso de Chaves á principios del siglo XVI. Madrid 1895.
Folio, 46 p.

Eggenberger, J., Beiträge zur Darstellung des Bernoulli'schen Theorems, der Gammafunction und des Laplace'schen Integrals.
Bern, Naturforsch. Gesellsch., Mittheilungen 1893, 110—182. — Les sections I—VI sont historiques.

Epstein, S. S., Mathematische Irrthümer.
Bern, Naturforsch. Gesellsch., Mittheilungen 1893, 183—192. — Note essentiellement historique.

Favaro, A., Don Baldassarre Boncompagni e la storia delle scienze matematiche e fisiche.
Venezia, Istituto Veneto, Atti 6_7, 1895, 509—521.

Favaro, A., Un episodio inedito della vecchiaia di Galileo. Padova 1895.
8°, 12 p.

°**Georgius de Hungaria**, Arithmetice summa tripartita, 1499. Ediderunt cum introductione K. SZILY et A. HELLER. Budapest 1894.
8°, 11 + 24 p. — [0·60 Mk.]

ГОЛЬДГАММЕРЪ, Д., Лордъ Кельвинъ (сэръ Вилліамъ Томсонъ).
Kazan, Fiz.-matem. obchtch., Isvjestia 4_2, 1894, 78—81. — GOLDHAMMER, D., Lord Kelwin (sir William Thomson).

Günther, P., Die Untersuchungen von Gauss in der Theorie der elliptischen Functionen.
Göttingen, Gesellsch. d. Wissensch., Nachrichten (Mathem. Kl.) 1894, 92—105.

°**Hipparchus Bithynus**, In Arati et Eudoxi Phaenomena commentariorum libri tres. Ad codicum fidem recensuit et germana interpretatione instruxit C. MANITIUS. Leipzig 1894.
8°, 34 + 376 p. — [4 Mk.]

°**Jaeger, F. M.**, Aphorismen en curiosa, benevens een overzicht van de geschiedenis der wiskunde. Haarlem 1894.
8°, 8 + 119 p. — [3 Mk.]

°**Jamblichus**, In Nicomachi arithmeticam introductionis liber. Ad fidem codicis florentini edidit H. PISTELLI. Leipzig, Teubner 1894.
8°, 9 + 195 p. — [2·40 Mk.]

Klein, F., Riemann and his significance for the development of modern mathematics.
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin **1**$_2$, 1895, 165—180. Traduit de l'allemand par A. ZIWET.

°**Lange, J.**, Geschichte des Feuerbach'schen Kreises. Berlin 1894.
4°, 34 p. + 2 pl. — [1 Mk.]

°**Lesky, A.**, Die historische Entwicklung des Problems der Saitenschwingung. II. Graz 1894.
8°, 31 p.

Loria, G., Per Leon Battista Alberti.
Biblioth. Mathem. 1895, 9—12.

Loria, G., Le scienze esatte nell' antica Grecia. Libro II. Il periodo aureo della geometria greca.
Modena, Accad. d. sc., Memorie **11**$_2$, 1895, 3—236 + (1) p. + 2 pl.

M[ansion], P., Arthur Cayley (1821—1895).
Mathesis **5**$_2$, 1895, 84—85.

Maupin, G., Quadrature de la cycloide d'après le P. Tacquet.
Revue de mathém. spéciales **5**, 1895, 81—82.

°**Milhaud, G.**, Leçons sur les origines de la science grecque. Paris, Alcan 1893.
8°, 306 p. — Les troisième et huitième leçons se rapportent aux mathématiques. — [Analyse:] Bullet. d. sc. mathém. **19**$_2$, 1895, 5—7. (P. TANNERY.)

Neper, J., Mirifici logarithmorum canonis constructio; et eorum ad naturales ipsorum numeros habitudines; una cum appendice, de alia eâque præstantiore Logarithmorum specie condenda. Quibus accessere Propositiones ad triangula sphærica faciliore calculo resolvenda: Vnà cum Annotationibus aliquot doctissimi D. HENRICI BRIGGII in eas, et memoratam appendicem. Lugduni M.DC.XX. Paris, Hermann 1895.
8°, 62 + (1) p. — [8 fr.] — Réimpression fac-similé.

°**Obenrauch, F. J.**, Monge, der Begründer der darstellenden Geometrie als Wissenschaft, eine mathematisch-historische Studie. Theil II. Brünn 1894.
8°, 20 p. — [1 Mk.]

°**Ridolfi, F.**, Il »de arithmetica« de Boezio.
La scuola cattolica (Milano) 1894.

Rittershaus, F., Mittheilungen zur Geschichte der Rechenmaschinen.
Dresden, Naturwiss. Gesellsch., Sitzungsber. 1893, 9—10.

Saalschütz, L., Die Zahlzeichen der alten Völker.
Königsberg, Phys.-ökon. Gesellsch., Sitzungsber. 1892, 4—9.

Sacerdote, G., Le livre de l'algèbre et le problème des asymptotes de Simon Motot. Versailles 1894.
8°, 53 p. — Extrait de la Revue des études juives 1893—1894.

°**Schenkel, H.**, Kritisch-historische Untersuchungen über die Theorie der Gammafunction und die Euler'schen Integrale. Bern 1895.
8°, 66 p. + 2 pl. — [1·50 Mk.]

Scott, Charlotte A., Arthur Cayley.
New York, Americ. mathem. soc. $\mathbf{1}_2$, 1895, 133—141.

Steinschneider, M., Die Mathematik bei den Juden.
Biblioth. Mathem. 1895, 19—28.

Suter, H., Zur Geschichte des Jakobsstabes.
Biblioth. Mathem. 1895, 13—18.

Tannery, P., Sur le mathématicien français Chauveau.
Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{19}_2$, 1895, 34—37.

°**Uzielli, G.**, La vita e i tempi di Paolo dal Pozzo Toscanelli; ricerche e studi. Con un capitulo sui lavori di Toscanelli di G. Celoria. Firenze 1894.
Folio, 745 p. + 11 pl. — [62 Mk.]

ВАСИЛЬЕВЪ, А., Каталанъ †.
Kazan, Fiz.-matem. obchtch., Isvjestia $\mathbf{4}_2$, 1894, 84. — Vasilieff, A., Nécrologie sur E. Catalan.

Question 49 [sur les mathématiciens espagnols antérieurs au 16e siècle].
Biblioth. Mathem. 1895, 32. (Académie des sciences de Madrid.)

Question 50 [sur le mathématicien anglais Braikenridge].
Biblioth. Mathem. 1895, 32. (G. Eneström.)

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Herausgegeben von E. Lampe. Band 24 (1892). Berlin, Reimer 1895.
8°. — Les pages 1—59 contiennent un compte rendu des ouvrages d'histoire des mathématiques parus en 1892.

Loria, G., Della varia fortuna di Euclide in relazione con i problemi dell' insegnamento geometrico elementare. (Periodico di matematica **8**, 1893.)
La controversia (Madrid) **9**, 1895, 76.

Rebière, A., Les femmes dans la science. Conférence faite au cercle Saint-Simon le 24 février 1894. Paris, Nony 1894. 8°.
Jornal de sc. mathem. **12**, 1895, 54. (G. T.)

Répertoire bibliographique des sciences mathématiques. Première série: Fiches 1 à 100. Paris, Gauthier-Villars 1894. 8°.
Biblioth. Mathem. 1895, 29. (G. ENESTRÖM.) — *New York*, Americ. mathem. soc, Bulletin 1_2, 1895, 186—189. (A. ZIWET.)

RIESSEN, Ein ungedrucktes Rechenbuch aus dem Jahre 1676. Glückstadt 1893. 4°.
Zeitschr. für Mathem. **40**, 1895; Hist. Abth. 58. (CANTOR.)

RUDIO, F., Erinnerung an Moriz Abraham Stern. Zürich 1894. 4°.
Zeitschr. für Mathem. **40**, 1895; Hist. Abth. 60. (CANTOR.)

WASILIEFF, A., Nicolai Ivanovitch Lobachevsky. Address pronounced at the commemorative meeting of the imperial university of Kasan, october 22, 1893. Translated from the russian, with a preface by G. B. HALSTED. Austin 1894. 8°.
El progreso matem. **5**, 1895, 12—16, 33—34.

VIVANTI, G., Il concetto d'infinitesimo e la sua applicazione alla matematica. Mantova, Mondovi 1894. 8°.
Jornal de sc. mathem. **12**, 1895, 55—56. (G. T.) — Zeitschr. für Mathem. **40**, 1895; Hist. Abth. 52—53. (CANTOR.)

[Listes d'ouvrages récemment publiés.]
Biblioth. Mathem. 1895, 30—32. — Zeitschr. für Mathem. **40**, 1895; Hist. Abth. 78—80. — Fiziko-matem. naouki **12** (1893—1894), 1895, 345—356.

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

51. Quand et où mourut le mathématicien JEAN-ROBERT ARGAND, ne à Genève le 22 juillet 1768 et auteur de l'ouvrage: *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* (Paris 1806; nouvelle édition Paris 1874)?

(G. Eneström.)

Inhalt. — Table des matières.

STOCKHOLM, TRYCKT I CENTRAL-TRYCKERIET, 1895.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK — JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON — PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1895. STOCKHOLM. N° 3.

NEUE FOLGE. 9. — NOUVELLE SÉRIE. 9.

BERLIN. MAYER & MÜLLER. Markgrafenstrasse 51.

Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr.

PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Die Frauen in den exakten Wissenschaften.

Von G. VALENTIN in Berlin.

Die Anfrage 43 in der Biblioth. Mathem. 1893, S. 96 gab mir Veranlassung, ein Verzeichniss aller lebenden und verstorbenen Frauen aufzustellen, welche in den exakten Wissenschaften: Mathematik, Astronomie und Physik als selbständige Schriftstellerinnen, Übersetzerinnen, Herausgeberinnen oder als werkthätige Gehülfinnen anderer Gelehrter mir bekannt geworden sind.

Agnesi, Maria Gaetana. (1718—1799.)
Biographisches: Elogio storico (scritto da A. F. FRISI). Milano 1799 (französ. von BOULARD, Paris 1808). — BIANCA MILESI-MOJON, Vita. Milano 1836. — M. G. Agnesi da Milano, professora onoraria di matematiche nell' Università di Bologna l'anno 1760. Documenti e note (Herausg. von C. GROSSI: »Nozze S. Piccardi — A. Baratti», Ferrara (?) 1843). — REBIÈRE, Les femmes dans la science (Paris 1894).
Instituzioni analitiche. Milano 1748. 4:o. 2 tom. (französ. von ANTELMY. Paris 1775; engl. von J. COLSON und veröffentlicht von I. HELLENS 1801).

Amort, Anna.
[Neue Anleitung zum Potenziren und Radiciren von algebraischen Ausdrücken und dekadischen Zahlen.] Jicin 1883. [Böhmisch.]

Ayres, Mrs. **Henry.**

Conversations on arithmetic. London 1843.

The lady's practical arithmetician. 2 ed. London 1846. *Key.* Ib. 1846.

Barrère, M[lle] **Christine.**

Solution du problème de F. Lucas. Les mondes **19**$_2$, 1869, 22.

Bassi-Verati, Laura Maria Catterina. (1711—1778.)

Biographisches: Fantuzzi, Elogio. 1778 (?). — (A. Magnani), Elogio. Venezia 1806.

De problemate quodam hydrometrico. Bologna, Acad. scient., Comment. **4**, 1757, 61—73.

De problemate quodam mechanico. Ib. 74—79.

Bertram, Fräulein **Rosa** († 1891).

Fr. Brioschi, Theorie der Determinanten etc. Aus dem Ital. übersetzt [von Rosa Bertram]. Mit einen Vorwort von Schellbach. Berlin 1856. — Sie unterstützte ihren Bruder H. Bertram wesentlich bei der Herausgabe der neuen Auflagen (14. und ff.) der »Sammlung von Beispielen u. s. w. aus der Buchstabenrechnung und Algebra» von Meier Hirsch.

Bickel, Miss **M.**

Friedr. Krancke, Arithmetic primer. A guide for elementary instruction in arithmetic etc. Translated and prepared for English use by Miss M. Bickel. Hannover 1885.

Biot, M[me].

E. G. Fischer, Physique mécanique. Traduit de l'allemand [par M:me Biot] avec des notes etc. par I. B. Biot. Paris 1806 (2. ed. 1813; 3. ed. 1819; 4. ed. 1829).

Blackwood, Elisabeth.

Lösungen von Aufgaben in den »Educational times».

Bortolotti, Emma.

Sulle frazioni continue algebriche periodiche. Palermo, Circolo matem., Rendiconti **9**, 1895, 136—149.

Bortniker, M[lle] **L.**

Sur un genre particulier de transformations homographiques. Paris, Acad. d. sc., Comptes rendus **104**, 1887, 771—773.

Sur la théorie des cyclides. Ib. **106**, 1888, 824—829.

Bouwmeester, M[lle] **S.**

[Problème de géométrie.] Mathesis **7**, 1887, 260.

Propriétés de certaines hyperboles équilatères. Ib. 238—239.

Question de géométrie du triangle. Ib. **9**, 1889, 226—228.

Bryan, Margaret.

A compendious system of astronomy etc. London 1797. 4°. *Lectures on natural philosophy,* etc. Ib. 1806. 4°.

Bryant, Mrs **Sophie.**

On the failure of the attempt to deduce inductive principles from the mathematical theory of probabilities. Philos. mag. $\mathbf{17}_5$, 1884, 510—518.

On the ideal geometrical form of natural cellstructure. London, Mathem. soc., Proceed. **16**, 1884—1885, 311—315.

An example in »Correlation of averages« for four variables. Philos. mag. $\mathbf{36}_5$, 1894, 372—377.

Carter, Mrs **Elizabeth.** (1717—1806.)

Biographisches: Memoirs of the life of Mrs E. CARTER, with a new ed. of her poems etc. by M. PENNINGTON. 2. ed. London 1808. 2 voll.

Sir ISAAC NEWTON's philosophy explain'd by F. ALGAROTTI. Translated from the Italian of ALGAROTTI [by ELIZABETH CARTER]. London 1739. — Sir ISAAC NEWTON's theory of light and colours made familiar by F. ALGAROTTI. Translated [by ELIZ. CARTER]. Ib. 1742.

Clémence, Mme.

Stellte und löste mathematische Aufgaben in »Le cosmos« Nouv. sér. Tom. 10—18 (z. B. **10**: 109, 221, 333, 361, 389, 417, 446; **11**: 25, 53, 81, 109, 136, 163, 192, 220, 248, 276, 304, 332, 444 etc.).

Clerke, Miss **Agnes Mary.**

A popular history of astronomy during the nineteenth century. Edinburgh 1885 (2. ed. 1886; deutsch übers. von H. MASER. Berlin 1889).

The system of the stars. London 1890.

Cunitz, Maria, verehelichte **von Löwen.** (1610[?]—1664.)

Urania propitia sive tabulae astronomicae etc. *Das ist Newe* etc. *astronomische Tabellen* etc. Bicini Silesiorum (= Pitschen), Olsnae (gedruckt) 1650 fol.

Du Châtelet-Laumont, Marquise **Gabrielle-Emilie,** geb. Baronesse **de Breteuil.** (1706—1749.)

Biographisches. I. B. H. R. CAPEFIGUE, La marquise du Châtelet et les amies des philosophes du XVIII siècle. Paris 1868. — REBIÈRE, l. c.

Institutions de physique. Paris 1740. (Nouv. ed. Amsterd. 1742, m. Portr.; deutsch von W. B. A. VON STEINWEHR, Halle und Leipzig 1743, m. Portr.; italienisch Venezia 1743.)

Réponse à la lettre de Mairan, Sur la question des forces vives, 1741, in der obigen Amsterdamer Ausgabe und in C. A. GIULIANI, Memorie sopra la fisica, 1743, tom. 3 (deutsch s. unter GOTTSCHED).

Principes mathématiques de la philosophie naturelle. Paris 1759. 2 tom. (ist Übersetzung von NEWTON's »Principia« mit Commentar).

Dumée, Jeanne.

»Entretiens sur l'opinion de Copernic touchant la mobilité de la terre«, im »Journal des savants« 1680 citirt, aber trotzdem wahrscheinlich nicht erschienen.

Dupuy, Mlle Laurence.

I. H. D. B. DUPUY, Le franc-arithme ou Le calcul affranchi de l'embarras des retenues, des emprunts et des restes etc. Revue et augmenté d'un supplément par Mlle LAURENCE DUPUY. Blois 1862.

Ermanska, Mlle Olga.

Trouver l'enveloppe des ellipses concentriques d'aire constante et dont les axes ont la même direction. Nouv. ann. de mathém. **8**$_2$, 1869, 321—323.

Fabri, Cornelia.

Sopra alcune proprietà generali delle funzioni che dipendono di altre funzioni e da linee. Torino, Accad. d. sc., Atti **25**, 1889—1890, 654—674.

Sui moti vorticosi nei fluidi perfetti. Bologna 1892. 4°, 67 S.

Sopra le funzioni di iperspazii. Venezia, Istituto Veneto, Atti **4**$_7$, 1892—1893, 283—295.

Sulla teorica dei moti vorticosi nei fluidi incompressibili. Nuov. cimento **31**$_3$, 1892, 135—145.

I moti vorticosi di ordine superiore al primo in relazione alle equazioni pel movimento dei fluidi viscosi. Ib. **36**$_3$, 1894, 87—91.

Fawcett, Miss.

Note on the motion of solids in a liquid. Quart. journ. of mathem. **26**, 1893, 231—258.

Gaio, Olimpia.

La teoria delle equazioni applicata alla soluzione di un' equazione di 7. grado. Firenze 1885. 8°, 56 S.

Galitzine, Mme la princesse Eudoxie, née Ismailoff.

De l'analyse de la force. Paris 1846. 3 part.

Gates, Fanny.

Some considerations on the nine-point conic and its reciprocal. Ann. of mathem. **8**, 1894, 185—188.

Germain, Sophie. (1776—1831.)

Biographisches: LIBRI, Nekrolog (Journal des Débats vom 18. 5. 1832). — Sophie Germain. Astr. Wochenschr. **2**, 1859, 352. — Vie. Bullet. de bibliogr., d'histoire et de biographie mathématiques 1860 p. 9. — H. GÖRING, Sophie Germain. Ein Lebensbild aus der Geschichte der Philosophie. Progr. Gewerbeschule Basel 1879. — H. GÖRING, Eine Frau als selbständige Forscherin auf dem Gebie der Mathematik und Philosophie Deutsche Bl. f. Unterr. **7**, 1880, 125—128, 133—136, 141—145. — H. GÖRING, S. Germain. Westermann's Monatsh. **52**, 1882, 702. — E. A. WOLFART, Zur Erinnerung an S. Germain. Schmeitzer's Internat. Monatschr. **1**, 1882, 323—336. — »Hilda«, Sophie Germain. Tidskrift för Hemmet **25**, 1883, 256—271. — H. GÖRING, Sophie Germain, die Vorläuferin Comte's. Ztschr. f. Philos. **91**, 1887, 1—25, 171—158. — H. GÖRING, Sophie Germain und Clotilde de Vaux. Zürich 1888. — REBIÈRE, l. c.

Tables générales de nutation. Connaiss. des temps 1807, 484.

Recherches sur la théorie des surfaces élastiques. Paris 1821.

Remarques sur la nature, les bornes et l'étendue de la question des surfaces élastiques et équation générale de ces surfaces. Paris 1826.

Examen des principes qui peuvent conduire à la connaissance des lois de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques. Ann. de chim. et de phys. **38**, 1828, 123—131.

Mémoire sur la courbure des surfaces. Journ. für Mathem. **7**, 1831, 1—29.

Note sur la manière dont se composent les valeurs de y *et* z *dans l'équation* $\frac{4(x^p - 1)}{x - 1} = y^2 + pz^2$ etc. Ib. 201—204.

Cinq lettres à Ch. Fr. Gauss p. p. B. BONCOMPAGNI. Berlin 1880 (auch in Archiv der Mathem. und Phys., Lit. 259: 27—31; 261: 3—10).

Mémoire sur l'emploi de l'épaisseur dans la théorie des surfaces élastiques [hrsg. von G. DE COURCEL]. Journ. de mathém. $\mathbf{6}_3$, 1880, Suppl. 1—66.

Gottsched, Luise Adelgunde Victoria, geb. **Kulmus.**

Zwo Schriften, welche von der Frau Marquis von CHATELET etc. und dem Herrn von MAIRAN, Das Maass der lebendigen Kräfte betreffend, gewechselt worden. Aus dem Französ. übers. von LOUISE ADELGUNDE VICTORIA GOTTSCHED, geb. KULMUS. Leipzig 1741.

Haas, Mlle Caroline de.

Lösungen von Aufgaben in »Mathesis« 1891—1894.

Herschel, Miss Caroline Lucretia. (1750—1848.)

Biographisches: L. C. Herschel, Biographische Notiz von A. VON HUMBOLDT. Astron. Nachr. **25**, 1847, 229. — Erinnerungen an C. Herschel. Wöch. astr. Unterh. **2**, 1848, 69. — Miss C. L. Herschel, von I. F. W. HERSCHEL. Astron. Nachr. **27** (629), 1848, 65—68. — Memoirs and correspondance of CAROLINE HERSCHEL ed. by Mrs JOHN HERSCHEL. London 1876. M. Portr. (deutsch von A. SCHEIBE. Berlin 1877 m. Portr.).

Catalogue of stars taken from Flamsteeds observations etc. *With an index to point out every observation* etc. *To which is added a collection of errata* etc. London 1798 fol.

Hevelius, Elisabeth.

Unterstützte ihren Mann, den berühmten Danziger Astronomen JOHANNES HEVELIUS (1611—1687) bei seinen astronomischen Beobachtungen und Arbeiten; selbst veröffentlichte sie nichts. — Wie MÄDLER (Westermanns Monatsh. **13**, 1863, S. 388) auf den Vornamen Margarethe kommt, weiss ich nicht; die beiden Frauen des HEVELIUS hiessen: 1) Katharina Rebeschke, 2) Elisabeth Koopmann (Deutsche Biogr.; WESTPHAL, Leben des Hevelius. Königsberg 1820; SEIDEMANN, Leben des Hevelius. Zittau 1864).

Hudson, Miss Hulda.

Simple proof of Euclid II 9 and 10. Nature **45**, 1891—1892, 189.

Hypatia. (C. 375—415.)

Biographisches: Hypatia, in I. TOLAND, Tetradymus III. London 1720. — TH. LEWIS, The history of Hypatia etc. Ib. 1721. — I. CHR. WERNSDORF, Diss. acad. I—IV de Hypatia. Vitembergae 1747—48. — (I. TOLAND), Hypatia etc. London 1753. — Hypatia, in JOH. ANDR. SCHMIDT, Variorum philosophorum decas. P. I. — PH. HOCHE, Hypatia, die Tochter Theons. Philologus **15**, 1860, 435—474. — H. LIGIER, De Hypatia philosopha et 'eclecticismi Alexandrini fine. Thesis. Divion 1879. — P. TANNERY, L'article de Suidas sur Hypatia. *Bordeaux*, Fac. d. lettres, Annales **2**, 1880, 197—201. — St. WOLF, Hypatia, die Philosophin von Alexandrien etc. Wien 1879. — W. A. MEYER, Hypatia von Alexandria. Heidelberg 1886. — G. BIGONI, Ipazia Alessandrina. *Venezia*, Istituto Veneto, Atti $\mathbf{5}_6$, 1887, 397—437, 495—526, 681—710.

Jullien, Marie-Louise Angélique, née Lamire.

Le quadricide ou paralogisme prouvé dans la quadrature du cercle de M. de Causans. (Paris) 1755. 4°.

Kirch, Marie Margarethe, geb. Winkelmann. (1670—1720.)

Praeparatio ad oppositionem magnam, sive notabilis coeli facies anno 1712.

Ob vielleicht in diesem Jahre 1712 ein neuer Komet erscheinen möchte? Cöln an der Spree 1712.

Sie half ihrem Manne, dem Astronomen GOTTFRIED KIRCH (1639—1710) bei seinen Arbeiten und namentlich bei den Rechnungen für den von ihm herausgeg. astronomischen Kalender, welchen sie nach des Mannes Tode bis 1716 allein berechnete und herausgab. (MÄDLER, l. c. S. 388.)

Kirch, Christine. (1696—1782.)

Schwester von CHRISTFRIED KIRCH, beides Kinder von GOTTFRIED und MARIE MARG. KIRCH, half ihrem Bruder bei seinen astronomischen und besonders Kalender-Arbeiten, wie die Mutter dem Vater.

Klumpke, Dorothée.

Contributions à l'étude des anneaux de Saturne. Paris 1894. 4°, 70 p.

Kowalewsky, Sophie. (1850—1891.)

Biographisches: P. K., Sophie Kovalevsky. Nature **43**, 1890—1891, 375—376. — L. KRONECKER, S. von Kowalevsky. Journ. für Mathem. **108**, 1891, 88. — E. DE KERBEDZ, S. de Kowalevsky. *Palermo,* Circolo matem., Rendiconti **5**, 1891, 121—128 (auch: Bull. d. sc. mathém. $\mathbf{15}_2$, 1891, 212—220). — A. CH. LEFFLER, Sonja Kovalevsky. Ann. di matem. $\mathbf{19}_2$, 1891—1892, 200—211. — A. C. LEFFLER, Sonja Kovalevsky: Hvad jag upplefvat tillsammans med henne och hvad hon berättat mig om sig själf. Med 4 portr. Stockholm 1891 (deutsch: Reclam'sche Bibliothek 1894). — Souvenirs d'enfance de Sophie Kovalevsky, écrits par elle-même et suivis de sa biographie par A. CH. LEFFLER, Paris 1895. — G. MITTAG-LEFFLER, Sophie Kovalevsky. Acta Mathem. **16**, 1893, 385—392. — REBIÈRE, l. c.

Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Journ. für Mathem. **80**, 1874, 1—32 (Diss. Göttingen; auch in MANSION, Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Berlin 1892, p. 277—311).

Über die Reduction einer bestimmten Klasse Abel'scher Integrale 3. Ranges auf elliptische Integrale. Acta Mathem. **4**, 1884, 393—414.

Sur la propagation de la lumière dans un milieu cristallisé. Paris, Acad. d. sc., Comptes rendus **98**, 1884, 356—357. (Schwedisch in Svenska Vet.-Akad. Förh. **41**:2, 1884, 119—121.)

Über die Brechung des Lichtes in cristallinischen Mitteln. Acta Mathem. **6**, 1885, 249—304.

Zusätze und Bemerkungen zu Laplace's Untersuchung über die Gestalt der Saturnsringe. Astron. Nachr. **111** (2643), 1885, 37—48.

Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. Acta Mathem. **12**, 1889, 177—232.

Mémoire sur un cas particulier du problème de la rotation d'un corps pesant autour d'un point fixe, où l'intégration s'effectue à l'aide de fonctions ultraelliptiques du temps. Paris, Acad. d. sc., Mém. prés. par div. savants **31**, 1890. 62 S.

Sur une propriété du système d'équations différentielles qui définit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. Acta Mathem. **14**, 1890—1891, 81—93.

Sur un théorème de M. Bruns. Acta Mathem. **15**, 1891, 45—52.

Ladd-Franklin, Mrs **Christine.**

The Pascal hexagram. Americ. journ. of math. **2**, 1879, 1—12.

On de Morgan's extension of the algebraic processes. Ib. **3**, 1880, 210—225.

On segments on lines by curves. Ib. **4**, 1881, 272.

On the algebra of logic, aus: Studies in logic by Members of the Johns Hopkins University ed. by Ch. G. Peirce. Boston (U. S.) 1883.

On the so-called d'Alembert-Carnot geometrical paradox. Mess. of mathem. **15**, 1885—1886, 36—37.

Lösungen von Aufgaben in den »Educational times».

Lagerborg-Cedercreutz, Nanny (geb. 1866).

Études sur la variation des indices de réfraction et de la densité du sel gemme sous l'influence de la température. Stockholm, Vetenskapsakad., Bihang, **13**: 1 N:o 10 [1888]. 12 S. + 1 Taf.

Sur le problème du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe. Paris, Soc. mathém., Bullet. **18**, 1890, 118—122.

de La Lande, Marie Jeanne Lefrançais, née **Harlay.** (1768—?)

Unterstützte ihren Gatten Michel Jean Jérome le Français de la Lande (1766—1839) und ihren Onkel Joseph Jérome le Français de la Lande bei astronomischen Beobachtungen und Rechnungen und berechnete selbst unter anderem die Tafeln zu des letzteren »Abrégé de navigation etc.» Paris 1793 (Mädler, l. c. S. 392).

Leboeuf, Mlle **Lucie.**

Le polygone formé par n tangentes à une parabole est la moitié du polygone qui a pour sommets les points de contact. Nouv. corr. mathém. **2**, 1876, 153—154.

Les foyers de toutes les ellipses qui ont leur cercle osculateur maximum commun en un point donné fixe, appartiennent à une même circonférence. Nouv. ann. de mathém. $\mathbf{15}_2$, 1876, 232—233.

Lechaucey, M[lle] **Léonide.**

Si P, Q, A, B, C, D sont sur une conique les points PA.QB, PB.QA, PC.QD, PD.QC, P et Q sont sur une même conique. Nouv. ann. de mathém. **4**$_2$, 1865, 372—373.

Lepauté, M[me] **Nicole-Reine-Etable, née de la Brière.** (1723—1788.)

Tables des longueurs des pendules (in dem 1760 erschienenen Suppl. zu ihres Gatten, des Uhrmachers Jean André Lepauté [1709—1789] »Traite d'horlogerie«. Paris 1755).

Observations (in den »Connaiss. des temps« 1759—1777).

Carte du passage de l'ombre de la lune au travers de l'Europe dans l'éclipse annulaire du soleil qui doit arriver 1 Avr. 1764. Paris 1762.

Angles parallactiques. Paris 1763.

Tables du soleil, de la lune et des autres planètes (in Lalande's »Éphémérides du mouvement céleste« Tom. VII, VIII. Paris 1774).

Mémoires d'astronomie (veröffentlicht im »Mercure«).

Litwinowa-Iwaschkina, Elisabeth.

[Lösung einer Abbildungsaufgabe.] S:t Petersburg 1879. [Russisch.]

Luise, Herzogin von Sachsen-Gotha (Ende des 18. Jahrh.).

War eine eifrige Förderin der Wissenschaften, besonders der Astronomie (Mädler, l. c. S. 393). Lalande sagt in seiner »Bibliographie astronomique« p. 786 von ihr: »la princesse la plus savante que l'on connaisse, qui observe et qui calcule elle-même d'une manière surprenante«.

Maddison, Miss **Isabel.**

On certain factors of the c- and p-discriminants and their relation to fixed points on the family of curves. Quart. journ. of mathem. **26**, 1893, 307—321.

Manfredi, Agnes (1. Hälfte des 18. Jahrh.).

Unterstützte ihre Brüder Eustachio (1674—1734) und Gabriele (1681—1761) bei ihren astronomischen Beobachtungen und Berechnungen (Mädler, l. c. S. 390).

Marks, Miss **Sarah.**

Marks' London table book of arithmetic, weights and measures, the mariner's compass etc. London (1876).

The uses of a line-divider. London, Phys. soc., Proceed. **7**, 1885—1886, 1—6.

Lösungen von Aufgaben in den »Educational times«.

Matt, Baronin.

Stellte astronomische Beobachtungen an ihrer Privatsternwarte in Wien an (MÄDLER, l. c. S. 398).

Mitchell, Maria. (1818—1889.)

On Jupiter and its satellites. Americ. journ. of science **1**$_3$, 1871, 393—395; **5**$_3$, 1875, 454—456; **15**$_3$, 1878, 38—41.

Notes on the satellites of Saturn. Ib. **17**$_3$, 1879, 430—432.

Stellte auf ihrer eigenen Sternwarte astronomische Beobachtungen an und entdeckte einen Kometen (MÄDLER, l. c. S. 398).

Müller, Maria Clara geb. **Einmart.** (1676—1717.)

Biographisches: MÄDLER, l. c. p. 389; Deutsche Biogr. bei GEORG CHRISTOPH. EINMART und JOH. HEINR. MÜLLER **22**, 583.

Iconographia nova contemplationum de sole. Norimbergae 1701.

Nicola, Clara und **Julia.**

LUVINI, Tables of logarithmes etc. [The logarithmic differences calculated together with an index by JULIA and CLARA NICOLA.] London 1866.

Nops, Marianne.

Class-Lessons on Euclid etc. London 1882.

Perrin, Emily.

Lösungen von Aufgaben in den »Educational times».

Pilati, Margareta.

Einführung der Kinder in das Verständniss der Zinsrechnung. Monatschr. für kath. Lehrerin. **1**, 1888, 282—284.

Eine Rechenstunde in der einklassigen Schule. Ib. **6**, 1893, 632—634.

Pompilianu, Mlle **C.**

Lösungen von Aufgaben in »Mathesis» 1891—1892.

Rossander-Tschudi, Jenny. (1837—1887.)

Om mathematik såsom undervisningsämne för flickor. Tidskrift för hemmet 1865, 160—166, 229—235, 361—367.

Om mathematiken och dess studium vid våra flickskolor. Berättelse om nya elementarskolan för flickor, Stockholm 1871, S. 13—24.

Rümker, Frau.

Gattin des bekannten Astronomen K. L. CHR. RÜMKER (1788—1862); sie entdeckte einen Kometen (MÄDLER, l. c. S. 398).

Rönström, Anna.

Om läsningen af Euklides' andra bok, Verdandi **7**, 1889, 108—114.

Geometrien såsom läroämne i folkskolan. Ib. **11**, 1893, 145—159.

Scarlatti, Maria.

Trattato di algebra ridotta in aritmetica etc. Roma 1781.

Corso analitico d'algebra ridotta in aritmetica. Roma 1808. (Giorn. bibliografico universale **5**, 39.)

Schiff, Frau **N. J.**

[Über Symmetrieaxen der centrischen Curven vierter Ordnung.] *Charkow,* Mathem. Gesellsch., Schriften $\mathbf{3}_2$, 1892, 163—192. [Russisch.]

Scott, Charlotte Angas.

The binomial equation $x^p - 1 = 0$. Americ. journ. of mathem. **8**, 1886, 261—264.

On the higher singularities of plane curves. Ib. **14**, 1892, 301—325.

The nature and effect of singularities of plane algebraic curves. Ib. **15**, 1893, 221—243.

On plane cubics. (Abstract.) *London,* Royal soc., Proceedings **54**, 1894, 370—371.

An introductory account of certain modern ideas and methods in plane geometry. NewYork 1894. 8°, XII + 288 S.

Lösungen von Aufgaben in den »Educational times».

Skorzewska, Gräfin.

Biographisches: (J. A. Grunert,) Die polnische Gräfin Skorzewska und die beiden Mathematiker J. H. Lambert und von Holland über die Aufgabe von der Beschreibung eines drei andere gegebene Kreise berührenden Kreises. Arch. der Mathem. und Phys. **28**, 1857, 354—359.

Slack, Mrs.

Schrieb unter dem Namen »George Fischer»:

The instructor: or young man's best companion, containing spelling, reading, writing and arithmetic etc. London 1763 (14. ed. Worcester, U. S. 1785; 28. ed. ib. 1798; new ed. Philadelphia 1801; new ed. corr. by G. N. Wright. London 1853).

E. Cockers Arithmetick. 43. ed. corrected by »George Fischer» 1725 (45. ed. 1731; 46. ed. 1736; 49. ed. 1738; 51. ed. 1745; 55. ed. 1758; 56. ed. 1767).

Arithmetic in the plainest and most concise method etc. 10. ed. London 1758 (12. ed. 1768).

Somerville, Mary. (1780—1872.)

Biographisches: Personal recollections from early life to old age of Mary Somerville. With selection from her correspondance. By

her daughter MARTHA SOMERVILLE. M. Portr. London 1883. — ALFRED VON REUMONT, Mary Somerville. Histor. Taschenb. 7, 1877, 179—248. — REBIÈRE, l. c.

On the magnetizing power of the more refrangible solar rays. Philos. Trans. 1826:2, 132—139.

Mechanism of the heavens. London 1832. (Americ. ed. Philadelphia 1832.)

On the connexion of the physical sciences. London 1834 (2. ed. 1835; 3. ed. 1836; 8. ed. 1849; 9. ed. 1859; Americ. ed. NewYork 1846; deutsch von K. F. KLÖDEN. Berlin 1835; französisch trad. par Mme T. MEULIEN. Paris 1838).

Physical geography. London 1848 (2. ed. 1849; 3. ed. 1851; 4. ed. 1858; 5. ed. 1862; Americ. ed. Philadelphia 1848; 2. ed. 1850; 3. ed. 1853; 4. ed. 1856).

On molecular and microscopical science. London 1869. 2 voll.

Ven, Elize van der.

De theori en de oplossing van hoogere magtsvergelijkingen etc. Leiden 1864.

De beginselen van de theoretische en toegepaste mechanica. Ib. 1866.

Eenige beschouwingen over de potentiaalfunctie. Thèse. Amsterdam 1868. 4°.

De beginselen der kosmographie. Haarlem 1868.

De physisch toestand der zon. Haarlem 1876.

Le moment statique dans la machine dynamoélectrique. Lumière électr. **10**, 1883, 407—411.

Essai d'une déduction de la théorie des machines magnéto-électriques du principe de la conservation de l'énergie. Ib. 516—523.

Wijthoff, A. Geertruida (geb. 1859).

Referate in der »Revue Semestrielle des publications mathématiques«. — Lösungen von mathematischen Aufgaben in holländischen Zeitschriften.

Winston, Miss **M.**

Eine Bemerkung zur Theorie der hypergeometrischen Function. Mathem. Ann. **46**, 1895, 159—160.

Witte, Wilhelmine, geb. **Böttcher.** (1777—1854.)

Verfertigte nach vorhandenen Mondkarten und nach eigenen Mondbeobachtungen Reliefkugeln des Mondes.

Mathematisch-historische Miscellen.

Von Maximilian Curtze in Thorn.

6. Arithmetische Scherzaufgaben aus dem 14. Jahrhundert.

Das folgende Stück ist dem Cod. lat. Monac. 14684, Bltt 30—33 entnommen. Der Codex auf Pergament stammt aus dem XIV. Jahrhundert und ist sehr deutlich geschrieben. Emendationen des Textes sind zum Verständnis nöthig. Die Lesart der Handschrift gebe ich in den Noten. Die Paragraphenzahlen habe ich hinzugefügt.

[*F. 30.*] *Incipiunt subtilitates enigmatum.* Sadaj. (!)

I. Si vis divinare in mente tua, in qua manu aliquis tenet sterlingum, vel in qua parisiensem, vel sic de alia re, ponatur, quod aliquis te interroget. Debes appreciare sterlingum pro tribus et parisiense pro duobus, et est pro regula servandum quod semper alius numerus sit par, alius impar. Postea dicas ei, quod duplet, quod tenet in dextra manu, et triplet, quod tenet in sinistra, et quod postea addat totam summam. Quo facto queras hanc certitudinem, utrum numerus totalis summe sit par vel impar. Si par, sterlingus erit in dextra, quam duplasti, si impar, parisiensis erit in dextra[1] manu.

II. *Item alia subtilitas.* Si vis scire, qua die quis fuerit cum amica sua vel aliud tale, dic ei, quod ad numerum dierum addat X, si sint pares, vel V, si sint impares. Deinde precipe productum numerum ex ambobus dimidiare, et unam medietatem reiicere. Deinde pete, quantum sit, quod remanet, et ab hoc remove medietatem numeri tui, quod adiecisti, et quod remanet est numerus dierum suorum, si fuerint pares; sed si numerus eius est impar, in proximo die.

III. *Item aliud.* Si vis scire, quot denarios aliquis habeat in bursa sua, dic ei, quod triplet precium totum, quod habet. Deinde dividat triplatum in duas porciones. Item tripletur altra porcio illius divisi.[2] Deinde quere, quot[3] novenarii proveniunt ex tota summa, videlicet ex illo ultimo triplato, et pro quolibet novenario accipe 2, et si aliquid fuerit residuum, pro illo capias unum.[4] Unde versus:[5]

Conceptum tripla, triplatum divide summam.
Reliquo triplato, quociens novem summe, inde,
Dic tociens binos. Quidquid superest notat unum.

IV. *Item aliud.* Simile est de 20 avibus pro 20 denariis, quot erunt de melioribus, quot de vilioribus, quot de mediocribus, aliis legibus retentis. Sic scitur per hunc versum:

In medio tetras, externis octo locentur.[6]

V. *Item alia subtilitas.* Si quis intrat monasterium, veniens coram primo altari dicat: Sancte domine, dupla mihi censum et offeram 5 dona vel duos denarios. Iterum dicat coram secundo, et ita deinceps, si plura fuerint. Discedens autem nihil deportabit. Si vis scire, quot denarios tulit secum intrans ecclesiam, subtrahe medietatem oblacionis, si non fuerit nisi unum altare; si duo tantum, quartam partem; si tria, octavam partem; et ita deinceps duplando subtractionem oblacionis.

VI. *Item aliud.* Si vis scire, quot poma sumenda sunt in pomerio, si dicetur tibi a ianitore, quod primo dabis ei medietatem et insuper pomum, et secundo ianitori idem, eciam de tercio, et postea deportabis 3; debes duplare tria, eciam [*F. 30'*] similiter, si plura portanda sunt tribus vel pauciora; eciam insuper adde 2, et postea duplatum totum reduplare ad secundum ianitorem addendo 2, eciam sic totum similiter ad tercium, et sic patebit tibi.

VII. *Item alia subtilitas.* Si de tribus hominibus vis scire, quis illorum fur fuerit, detur uni hoc nomen duo, alii tres, tercio vero quatuor. Postea dic, quod duplet nomen latronis, nomen alterius multiplicet per 7, tercii vero per 8, et queratur, per quot possunt perfici 80, et in illa complecione per 80 per octonarios sumatur nomen latronis.

VIII. *Item aliud.* Si duorum hominum peregre proficiscencium ad eundem locum et per eandem viam unus proficiscatur singulis diebus 7 leucas, vel 9, et ita deinceps secundum voluntatem dicentis, alter vero primo die unam, secunda duas et ita naturaliter ascendendo, ad habendum igitur, quota die iste priorem consequetur, dupla numerum leucarum uniformiter procedentis et postea subtrahe unitatem, et residuum ostendit, quota die et per quot. Si unus autem proficiscatur naturaliter ascendendo, sicut dictum est, et de alio nesciatur, sed de die consecucionis certum fuerit, quo simul veniant, scilicet 7°, 8° vel 9°, prout dicenti placuerit, summe dicte[7] adde unitatem et postea divide numerum illum per duas partes, et quota fuerit eius medietas, tot leucas peragit uniformiter proficiscens.

IX. *Aliud.* Ponatur, quod sint tres homines; unus habet aurum, alius argentum, tercius plumbum, et velis in mente tua divinare, quis quamque rem tenet, appone precia tua super res predictas ita, quod super plumbum unum, super argentum duos

et super aurum tres, et dic uni, quod duplet; post hoc alteri, quod multiplicet per 9; tercio, quod multiplicet per 10. Post hoc, quod totum addatur simul. Tunc queras hanc certitudinem ab eo, quot novenarii deficiunt ad perfectionem 60, quod si 3, aurum habens duplavit; quod si duo, argentum habens multiplicavit per 9; si unum, habens plumbum per 9 multiplicavit. Unde versus:[8]

Arnoldus. byganium. katulos. erumpna fugavit.
Glutinat addicias, sic bene perficias.

X. *Item aliud.* Si velis scire in quota feria osculatus est aliquis amicam suam, dic ei, quod duplet feriam adiciendo 1. Quod totum multiplicet per 5, post hoc productum per 10, et de tota summa reiciat 50. Post hoc quere hanc certitudinem, quociens possint 100 subtrahi de tota summa. Si semel sit, est dies domenica; si bis, secunda feria; si ter, tercia feria, et sic deinceps.

XI. *Item alia subtilitas.* Sint hic milites, pedites et puelle, et sint in universo[9] 12, et habeant 12 panes, parciendos, et quilibet miles accipiat duos, quilibet pedes quartam partem panis, quilibet puella medietatem panis: queritur, quot erunt milites, pedites et puelle. Responditur:

Sola puella manet, peditum sex, quinque quirites. [*F. 31*]
Simile est de 20 avibus[10] pro 20 denariis, quot erunt de melioribus, quot de vilioribus, quot de mediocribus aliis legibus retentis. Scitur per hunc versum:

In medio tetras, extremis octo locentur.

XII. *Item simile predicto.* Simile est de 12 hominibus, scilicet militibus, clericis, puellis et peditibus, habentibus 12 denarios, et quilibet miles accipiat duos, et quilibet clericus unum, et quilibet puella obolum, et quilibet pedes quadrantem: queritur, quot erunt de militibus, quot de clericis, quot de puellis, quot de peditibus? Responditur:

In mediis binos, extremis quatuor aptes.

XIII. *Item alia subtilitas.* Quidam committens filiis suis tribus pira vendere dicit seniori: exeas cum 50, et vendas prout melius possis, et reporta precium. Post hoc alteri 30, juniori vero 10, et iniunxit utrisque iunioribus filiis, quod omnimode sicut senior venderent sua pira et tot pro denario, et reportarent tantam pecuniam, quantam primus. Senior vero exiens vendidit 7 pro denario, et unum pirum, quod remansit pro tribus denariis. Secundus vero considerans diligenter vendicionem senioris vendidit quater 7 pro denario, et 2 pira remanencia pro 6 denariis, et reportabat 10 denarios sicut primus. Tercius autem dedit 7 pro denario et tria remanencia pro 9

denariis vendidit, et similiter reportabat patri suo 10 denarios sicut fratres sui.

XIV. O fili, si tantum vixisses, quantum vixisti, et iterum tantum, et dimidium tanti, et dimidium dimidii, centum annos complevisses. Responditur. Unde versus:

Hic puer etate quantus fuit, arte probate.
Quinta recidatur, remanentis tercia pars est.

XV. *Item alia subtilitas.* Si duorum hominum greges ad forum ducencium dicat unus alteri: da mihi unam de ovibus tuis, ut habeam tot, quot tu; non, dicit alter, immo detur mihi una de tuis, ut habeam in duplo plures quam tu. Si queratur igitur, quot habeat unus, et quot alter, respondendum est ad hoc, quod unus habet 5 et alter 7, et est hic numerus utrobique radix hoc modo dicencium, quoniam inferius non fuerit digressus. Si igitur querantur due oves, vel 3, vel deinceps perquesitorum, utrius suum quesitum multiplicentur radices iste, scilicet 5 et 7, et habeatur propositum, et sic de similibus vel aliis [11] faciendam.

XVI. *Item alia subtilitas.* Si aliquis dicat, sit hasta fixa in aliquo stagno, de qua due ulne et dimidia, vel duo pedes et dimidius sint in luto,[12] sive in terra, et tercia pars in aqua, et dimidia hasta super aquas, et querit, quante longitudinis sit hasta illa: debes notare numerum pedum vel ulnarum haste in luto. Multiplicetur ergo duo et dimidium per 6, et erit hasta 15 ulnarum vel pedum.

XVII. [*F. 31'*] *Item aliud.* Sint tres socii nisum empturi pro 34 denariis. Dicat igitur primus secundo et tercio: date medietatem denariorum vestrorum, et ego omnes meos, et emetur. Tercius vero dicat: detis quartam partem vestrorum et ego meos omnes, et emetur nisus. Non, dicat secundus, sed detis terciam partem vestrorum et ego omnes meos, et emetur. Primus 10 denarios habuit, secundus 22, tercius vero 26.

XVIII. *Item alia subtilitas.* Si ponatur amphora 8 quartarum vini inter duos equaliter parcienda, quorum unus habeat ollam 5 quartarum, alter vero ollam trium quartarum, et queratur, quomodo vinum inter eos parciatur non habita alia mensura, respondendum: Impleatur primo maior olla 5 quartarum, et ab illa minor, et a minori [13] retro effundatur in amphoram. Deinde due quarte a maiori evacuentur in minorem; postea iterum impleatur maior, et ab illa minor, et tunc vinum partitur.

XIX. *Item alia subtilitas.* Si de tribus hominibus et eorum uxoribus scire volueris, que illarum cuius uxor fuerit, detur uni unitas in censu, alie [14] dentur 2, tercie [15] 3. Deinde

maritus unius notate mulieris duplet censum suum, maritus alterius notate multiplicet censum suum per 9, tercius eciam suum per 10 multiplicet. Postea colligatur totalis numerus et queratur, per quot possunt complere 60, et in illius complecionis octonariis[16] exibit nomen duplati, in unitatibus vero nomen per 9 multiplicati. Habito igitur de duobus, de tercio manifestum est.

XX. *Item alia subtilitas pulchra.* Si velis scire, in quot diebus possunt duo homines convenire, si uno et eodem die ibunt de Sto. Jacobo, et unus singulis diebus uniformiter eat 10 leucas, alter vero secundum naturalem progressionem ita, quod primo die unam leucam, secundo die 2, tercio tres: dupla numerum leucarum uniformiter procedentis, quotcumque sit ille, quia ad voluntatem dicentis hoc potest fieri, videlicet, si alter peragat 10 leucas eundo, dupla igitur 10, et postea subtrahe 1 de duplatis, et sic patebit tibi dies, in quo et per quot conveniunt.

Si autem unus vadat naturaliter procedendo, secundum quod iam dictum est, videlicet primo die unam leucam, secundo 2; et de alio nesciatur, sed de die consecucionis certum fuerit, qua simul conveniant, scilicet vel 7, vel 8, vel 9 die, prout dicenti placuerit, summe totius numeri dierum, in quo conveniunt, adde unum, et postea divide numerum istum per 2 partes, et quota fuerit eius medietas, tot leucas peregit uniformiter proficiscens.

XXI. *Item alia subtilitas.* Si quis dicat filio suo, dabo tibi 20 solidos, vel 10, vel deinceps in qualibet septimana excercendo scolas Parisiis, et vis scire, quantum dabit ei per annum, [*F. 32*] totam summam denariorum unius septimane multiplica per 4, et quot sunt ibi picte, tot sunt ibi solidi, et praeterea, quot solidi, tot denarii.

XXII. *Item aliud enigma.* Si vis divinare inter duos, que res sit unius, et que alterius, ut de cappis vel cultellis, ponendi sunt numeri supra res, ut super unam unus denarius, et super aliam duo denarii et sic deinceps. Postea triplatur precium cuiuslibet rei, item ista triplacio dividatur in 2 porciones, et altera porcio abiciatur, et retripletur iterum, et postea queratur de novenaris, quociens possint a precio unius subtrahi; et primo pro quolibet novenario duas accipias, et si aliquod fuerit residuum, pro illo residuo unum recipias, et sic de singulis.

XXIII. *Item aliud enigma.* Si quis diversas res habuerit ita, quod in una manu falconem et in alia gladium, et tu neutrum videas, velis tamen scire, in qua manu falco sit, detur precium duorum denariorum super falconem, precium vero trium denariorum super gladium. Deinde dicatur ei, quod dupletur

dextra et tripletur sinistra, et triplatum addatur duplato. Hoc facto queratur, si numerus sit par vel impar; quia si par in manu duplata, scilicet dextra, fuit res imparis precii, scilicet gladius, in sinistra vero, que triplicabatur, fuit res paris precii, scilicet falco: et hoc est, si numerus excrescens de addicione manus duplate ad triplatum sit par. Si impar,[17] e converso fiat[18] iudicium.

(Randglosse.) Est simile de duobus quibuslibet diversas res habentibus, ut alter anulum, alter fibulam, vel aliud huius modi. Hec autem due cautele fere eadem sunt cum illa in primo folio, differunt tamen secundum vocabulorum imposicionem.

XXIV. *Item aliud.* Si queratur de 9 doliis inter tres fratres dividendis, ut quilibet equaliter de ligno et vino habeat sine vini extractione, quorum doliorum primum contineat modium unum, secundum duo modia, tercium tria, et deinceps nonum 9, querenti dicendum,[19] primo per regulam secundam naturalis progressionis ducatur quinarius in novenarium, ut videatur, quot modia quilibet habere debeat, deinde detur primo fratri dolium unitatis, quinarii et novenarii, secundo binarii, senarii et septenarii; tercio vero remaneant ternarii, quaternarii et octonarii.

XXV. *Item aliud.* Si vis scire in quo digitorum anulus sit, dentur numeri digitis ita, quod pollici 1, indici 2, et sic deinceps. Postea dicatur ei, quod duplet digitum, in quo est anulus, et ad numerum illum addat numeros aliorum digitorum. Deinde queratur summa tocius numeri, et exinde abice 15, et residuum ostendit digitum, in quo est anulus.

XXVI. *Item aliud.* Tres hystriones cum tribus uxoribus transituri erant amnem cum cimba, que non valuit, nisi duos homines transferre. Unde talem fecerunt inter se constitucionem, quod si aliqua parte portus sine proprio marito uxor inveniretur, licitum fiat viris astantibus eam subagere. Questio igitur est, qualiter isti transituri sunt aquam bini et bini, ne aliquis cum amica alterius incestum faciat. Dicendum, quod taliter. Primo eant due femine trans flumen. Deinde redeat una illarum, et eadem secum terciam feminam capiens [*F. 32'*] iterum transeat, et tunc tres mulieres sunt ex una parte portus cum cimba, et viri in anteriori portu. Postea una feminarum redeat ad maritum suum, deinde transeant alii duo viri ad uxores. Quo pervento unus virorum redeat cum uxore sua, deinde ille idem vir capiat secum tercium virum, et iterum redeat ultra aquam. Postea femina dimittat viros, veniat prope unam illarum, quæ ex hac parte sunt, et eam transducat ad

virum suum. Deinde vir tercie femine eat pro sua, si velit, et ita bini et bini transibunt salvatis condicionibus. Et hoc scitur per hos versus:

Bine. sola. due. mulier. duo. vir mulierque.
Bini. sola. due. solus. vir cum muliere.

XXVII. *Item aliud.* Simile est. Sint ex una parte portus unus lupus, et una capra, et unus fascis de olere sive de herba, et unus nauta eos sigillatim transducat in navicula sua ita, quod nullus alium comedat. Questio est, quem primo transducans sit, quem secundo, quem tercio. Et patet per hunc versum:

Hinc capra. post olus. hoc redit. hinc lupus. et capra[20] rursus.

XXVIII. *Aliud.* Si vis scire, quot ova sufficiant conventui per annum, scilicet si quilibet canonicorum habeat quid determinatum ovorum,[21] negociandum est sic. Sumatur primo numerus canonicorum, et multiplicetur iste numerus per numerum ovorum, que unus canonicus debet habere uno die ad partem suam, et facta multiplicacione[22] tali excrescet summa ovorum, que accidit conventui habere uno die. Deinde illa summa excrescens multiplicetur per dies anni.

XXIX. *Item aliud.* Duo socii habebant in communi 8 lagenas[23] vini in una amfora et non poterant recte dimidiare eas, nec habebant mensuram, nisi unam 5 lagenarum et aliam trium. Modo queritur, qualiter sit istud vinum in duas porciones equales dividendum. Ad hoc sic: pone de 8[24] in 5, et impleatur postea 3 de 5, et remanent 2 in 5 et 3 in tercium. Deinde resumeretur de tribus in 8, et postea 2, que sunt in 5 effundantur in 3, et impleatur iterum 5 de 8, et impleatur 3 de 5,[25] et tunc remanent 4 in 5, et una in 8,[26] et 3 in 3. Et postea impleantur 3 de 3 in 8,[27] et tunc ibi 4, et in 5 4: ergo erit tunc equalis porcio in utraque.

XXX. *Item aliud enigma.* Sit palus in qua hasta sit fixa in aqua, cuius medietas sit in terra, tercia pars in aqua, 17 pedes et dimidius extra, et queratur tocius quantitas. Dicendum, quod sexta pars est extra aquam, unde si illa pars multiplicetur per 6, tocius quantitas habebitur; et de similibus similiter.

XXXI. Sint hic 12 aule, et in qualibet aula stent 12 postes, et in quamlibet postem infigantur 12 unci, et in quolibet unco pendeant 12 marsupia, et in quolibet marsupio sunt 12 denarii, et in quolibet denario 4 quadrantes, et in [*F. 33*] quolibet quadrante tres anguli: questio est, quot sunt anguli?

Item sint hic 12 pertice, et super qualibet stent 12 galli cum gallinis et pullis etc.

Item sint 7 barones, et habeat quilibet 7 valles, in qualibet valle[28] 7 quique ville[29] cum domibus et lectis et militibus pari summa.

XXXII. *Aliud enigma.* Item si queratur, quot lepores possent iacere in una acra terre, in qua quilibet contineat unum pedem in longitudine[30] et dimidium in latitudine, considerandum est, quot pedes contineat acra in longitudine et in latitudine. Cum ergo acra sit in longitudine 40 perticarum, et pertica 14 pedes, habebit acra in longitudine 40.14 pedes (!). Si ergo multiplicetur 40 per 14, vel e converso, patebit numerus pedum in longitudine. Deinde querendum est quot pedes habet in latitudine, et habeat[31] quatuor 14 pedes. Multiplicentur 14 per 4, et patebit numerus in latitudine. Quot sunt ergo dimidii pedes in latitudine, tot lepores possunt iacere in pari ordine versis omnibus capitibus adversus longitudinem terre. Deinde multiplica numerum dimidiorum pedum in latitudine per numerum pedum integrorum in longitudine, et patebit quesitum.

XXXIII. *Item aliud.* Si trium fratrum sororem nubilem habencium dicat minor aliis: iuvemus sororem nostram maritari. Respondeat mediocris: da et tu secundum tuam ubertatem, et duplabo, et maior natu confirmet se triplare duplatum mediocris, et sit summa denariorum tantum 3: queratur igitur doni primi quantitas et consequenter aliorum. Responsio. Dat primus pictam et 12 nu., quo habito de aliis planum erit. Cuius questionis solucio ex divisione tocius summe per 9, sive sit trium denariorum sive plurium, semper habebitur. Si autem duplando uniformiter processerint, tunc septima pars tocius summe est donum prioris.

XXXIV. *Item alia subtilitas.* Si aliquis testamentum condens, cui tres sunt filii et totidem filie, dicat cuilibet filiorum, quod supplicat deo, ut duplet denarios in archa sua, et capiat centum libras, cuilibet filiarum similiter, et capiat 50 libras, quo facto nihil remanebit: queratur igitur, quantum in archa primo continebatur. Responsio 92 librae 19 solidi 4 denarii et obolus. Et huius questionis solucio per addicionem octave partis capitalis minoris — et erit octava pars minoris capitalis 5 libre 9 solidi 4 denarii et obolus, — supra totum capitale maioris invenietur, que duo capitalia per artem cautele precedentis habentur, per istam: *Si qui intrans monasterium,* etc.

[1]) *dextra* steht auf Rasur; ursprünglich stand *sinistra.* — [2]) *illius divisi] illud divisum.* — [3]) *quot] quod.* — [4]) *unum* fehlt. — [5]) Die drei folgenden Zeilen sind Randglosse. — [6]) § IV ist hier fälschlich eingescho-

ben. Siehe unten § XI. — [7]) *summe dicte] summe ductum.* — [8]) Randglosse. — [9]) *12] 22.* — [10]) *20 avibus pro 20] 12 avibus pro 30.* — [11]) *vel aliis] ut vel aliis.* — [12]) Hinter *luto* fügt die Hdschr. *et dimidium* hinzu, lässt es aber an der richtigen Stelle hinter *duo* aus. — [13]) *minori].* Zuerst stand *maiori,* das ist jedoch durchgestrichen und das richtige *minori* übergeschrieben. — [14]) *alie] alii.* — [15]) *tercie] tercii.* — [16]) *octonariis] octonarius.* — [17]) *sit par. Si impar* fehlt im Mscpt. — [18]) *fiat] autem fiat.* — [19]) *querenti dicendum] querendo dividentur.* — [20]) *et capra] est capra.* — [21]) *ovorum] ovorum et.* — [22]) *multiplicacione] multitudine.* — [23]) *8 lagenas] 4 lagenas.* — [24]) *de 8] de 4.* — [25]) *de 5* fehlt. — [26]) *una in 8] una in 4.* — [27]) *de 3 in 8] de 3 in 4.* — [28]) *qualibet valle] qua valle.* — [29]) *quique ville] quinque ville.* — [30]) *in longitudine et* fehlt. — [31]) *et habeat* fehlt.

Die vorliegende Sammlung arithmetischer Scherzaufgaben findet sich auch im *Codex Amplonianus Qu. 345,* Bltt 16 und 16′ aus der ersten Hälfte des 14. Jahrh., also mit dem unsrigen ziemlich gleichaltrig. In ihr hat die Sammlung die Überschrift: *Cautele algorismorum.* So weit es nöthig, will ich jetzt die einzelnen Abschnitte commentieren.

I ist wohl an sich klar.

II. Ist die Zahl $2x$, so lässt Verf. $2x + 10$, dann $x + 5$ bilden, und nach Abwerfen von 5 bleibt x übrig; ist aber die Zahl ungerade, also $2x + 1$, so erhält er der Reihe nach $2x + 6$, $x + 3$, $x + \frac{1}{2}$, was ihm anzeigt dass das doppelte also $2x + 1$, die gesuchte Zahl ist.

III. Man hat der Reihe nach entweder $2x$, $6x$, $3x$, $9x$, x oder $2x + 1$, $6x + 3$, $3x + \frac{3}{2}$, $9x + \frac{9}{2}$, $x + \frac{1}{2}$. Die Regel giebt also im ersten Falle $2x$, im zweiten $2x + 1$ als gesuchte Zahl.

IV wird an späterer Stelle behandelt werden.

V. Ist die Anzahl der Denare, welche er besitzt, x, so ist bei einem Altar $2x - 2 = 0$, also $x = 1$, d. h. die Hälfte der Weihgabe ist von ihr abzuziehen, um das ursprüngliche Capital zu erhalten; bei zwei Altären ist $4x - 6 = 0$, also $x = 1\frac{2}{4}$, also der 4[te] Theil der Weihgabe von ihr abzuziehen, um das Capital zu finden; bei drei Altären ist $8x - 14 = 0$, also $x = 1\frac{6}{8}$, also der achte Theil von der Weihgabe abzuziehen u. s. w.

VI. Hier ist die *regula sermonis,* das Rückwärtsrechnen in Anwendung gebracht. Sollen n Äpfel übrigbleiben, so sind zu berechnen $((2n + 2)2 + 2)2 + 2 = 8n + 14$. Für $n = 3$ folgt 38.

VII. Die Worte der erste, der zweite, der dritte sind hier cyklisch zu nehmen. Ist N° 1 der Räuber, so ist die zu bildende Summe $4 + 21 + 32 = 57$. Bis 80 fehlen 23, was durch 8 dividiert 2, den Namen des ersten giebt. Ist N° 2 der Räuber, so haben wir $6 + 28 + 16 = 50$; der Rest bis 80 ist 30, und giebt durch 8 dividierte 3, den Namen des Zweiten.

Ist endlich N° 3 der Räuber, so haben wir $8+14+24=46$, der Rest 34 durch 8 dividiert giebt 4, den Namen des Dritten.

VIII. Sie möge am x-ten Tage zusammenkommen, und n sei die Anzahl Meilen, welche der erste zurücklegt, so muss $\frac{x(x+1)}{2}=nx$, also $x=2n-1$ sein. Umgekehrt ist $n=\frac{x+1}{2}$.

IX. Soll bei XIX mit behandelt werden, da dieses das vollständigere ist. Was die Verse bedeuten sollen, ist mir unverständlich geblieben.

X. Kommt auf die Identität $\frac{(2x+1).5.10-50}{100}=x$ hinaus.

XI. Die beiden Gleichungen

$$x+y+z=12\,;\quad 2x+\tfrac{1}{4}y+\tfrac{1}{2}z=12,$$

geben die allgemeine Lösung $x=t$, $y=6t-24$, $z=36-7t$, die nur für $t=5$ positive Werthe hat: $x=5$, $y=6$, $z=1$, wie der Vers angibt. Der Zusatz, mit N° IV identisch, gibt die Gleichungen $x+y+z=20$, $2x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}z=20$ und die allgemeine Lösung $x=t$, $y=6t-40$, $z=60-7t$, welche nur für $t=7$ und $t=8$ positive Werthe liefert. Für $t=7$, ist $x=7$, $y=2$, $z=11$; für $t=8$, $x=8$, $y=8$, $z=4$, die Lösung, welche der Vers angibt.

XII. Setzt man die Zahl der Mädchen $=2$, so ist die gegebene Lösung 4, 2, 2, 4 die einzig mögliche. Allgemein ist unter obiger Bedingung $x=1+3t$, $y=9-7t$, $z=2$, $v=4t$.

XIII. Diese bekannte Scherzfrage ist an sich klar.

XIV. Aus der ursprünglichen Gleichung $3\frac{3}{4}x=100$ folgt $3x=80$, d. h. es muss von 100 der fünfte Theil 20 abgezogen werden, um in dem dritten Theile des Restes die Lösung zu erhalten.

XV. Werden allgemein n Schafe gefordert, so folgt aus den zu lösenden Gleichungen $x=5n$, $y=7n$, d. h. die Lösung für $n=1$ braucht nur für ein anderes n mit diesem multipliciert zu werden, um die beabsichtigte zu finden. Solche gefundenen Zahlen nannte man allgemein *Radices*.

XVI. Eine in der verschiedensten Weise variierte Aufgabe, welche sich wohl in jedem Rechenbuche bis weit in das 16. und 17. Jahrhundert hinein wiederfindet. Die Aufgabe ist nur dem Wortlaut, nicht der Berechnung nach von der Aufgabe XXX verschieden.

XVII. Lässt man zunächst den Preis des Sperbers ausser acht, so findet sich, dass sich $x:y:z=5:11:13$ verhalten muss, während der Preis $=17t$ würde, wenn der Proportionalitätsfaktor

t heisst. Auch hier sind die Zahlen 5, 11, 13 und 17 *radices*. In der vorliegenden Lösung ist $t=2$ genommen.

XVIII. Auch diese bekannte Aufgabe ist in Aufgabe XXIX nochmals behandelt. Dort ausführlicher als hier.

XIX. Zugleich IX. Die Aufgabe ist so zu verstehen, dass die Männer 1, 2, 3 als Ordnungsnummern erhalten, die Frauen aber in irgend einer Ordnung, die Werthe 1, 2, 3. Es können also nur folgende Combinationen eintreten

Männer 1, 2, 3; 1, 2, 3; 1, 2, 3; 1, 2, 3; 1, 2, 3; 1, 2, 3.
Frauen 1, 2, 3; 1, 3, 2; 2, 1, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2; 3, 2, 1.

Führt man nun die von der Aufgabe gewollten Multiplication aus, so liefert das:

$$2+18+30;\ 8+27+20;\ 4+9+30;\ 4+27+10;\ 6+9+20;\ 6+18+10.$$

Die Differenzen bis 60 sind also: $10=1.8+2$; $11=1.8+3$; $17=2.8+1$; $19=2.8+3$; $25=3.8+1$; $26=3.8+2$, wodurch die Behauptung bewiesen ist. In IX fehlt also die Angabe, dass man den Zweiten durch den überschiessenden Rest bei der Division durch 8 zu finden hat.

XX. Mit VIII identisch.

XXI. Der Solidus ist $=12$ Denare, 1 picta $=\frac{1}{4}$ Denar. Gibt also der Vater seinem Sohne 1 Solidus pro Woche, so sind das 12 Denare. Also erhält man durch Multiplication mit 4, 48 pictae, welche zu 48 Solidi gerechnet werden sollen. Es sollen nun noch ebenso viel Denare, als Solidi sind, hinzugerechnet werden, das sind 48 Denare $=4$ Solidi, und so entstehen die 52 Solidi, welche im Jahre gebraucht werden.

XXII. Mit III identisch. Die Rechnung ist für jeden einzeln zu führen.

XXIII. Ist wie auch schon die Randglosse sagt, mit N° I bis auf die angewendeten Bezeichnungen identisch. Es ist hier etwas ausführlicher gesprochen als oben.

XXIV. Die Summe der 9 ersten Zahlen ist in drei gleiche Theile so zu theilen, dass alle 9 Zahlen gebraucht werden. Die Theile sind natürlich $1+5+9$, $2+6+7$, $3+4+8$.

XXV. Ist der Ring auf dem x^{ten} Finger, so ist die gesuchte Summe $15+x$, also findet man x, wenn man von der gefundenen Zahl 15 wegnimmt.

XXVI. Auch diese Scherzfrage ist alter Bestand und kommt, ebenso wie XXVII, schon bei ALCUIN vor.

XXVIII. Ist an sich klar.

XXIX. Diese Aufgabe ist mit XVIII identisch. Auch sie ist uralter Bestand der Rechenbücher.

XXX. Siehe oben N° XVI.

XXXI. Eine ähnliche Aufgabe kommt schon im Rechenbuch des AHMES vor, sowie bei LEONARDO VON PISA. Siehe CANTOR, *Vorlesungen* I (2. Aufl.), S. 42 und II, S. 25.

XXXII. Die Aufgabe ist dem Cap. LXVII bei GERBERT (Ed. OLLERIS, S. 459) sehr ähnlich. Die Lösung ist an sich klar. Die *Pertica* ist hier zu 14 pedes gerechnet. *Acra* soll jedenfalls *Acker* bedeuten, und ist zu 160 Quadratperticis gerechnet.

XXXIII. Ist der Beitrag des Jüngsten x, so giebt der zweite $2x$, der dritte $6x$, alle drei also $9x$; der neunte Theil des Zusammengebrachten ist also der Antheil des Jüngsten u. s. w. Im zweiten Falle sind die Theile x, $2x$, $4x$, also ihre Summe gleich $7x$. 1 Picta $= \frac{1}{4}$ Denar $= 36$ nu.

XXXIV. Die Aufgabe ist, wie auch in der Auflösung selbst gesagt wird, mit Aufgabe V verwandt. Am bequemsten wird die Aufgabe von hinten berechnet. Ich setze hier nach einander, was jeder vorfand, und was deshalb vorher verdoppelt sein musste. Die Töchter nenne ich 3, 2, 1; die Söhne III, II, I. Dann hat man:

$$3\left|\begin{matrix}50\\25\end{matrix}\right.;\ 2.\ \begin{matrix}75\\37\frac{1}{2}\end{matrix};\ 1.\ \begin{matrix}87\frac{1}{2}\\43\frac{3}{4}\end{matrix};\ \text{III.}\ \begin{matrix}143\frac{3}{4}\\71\frac{7}{8}\end{matrix};\ \text{II.}\ \begin{matrix}171\frac{7}{8}\\85\frac{15}{16}\end{matrix};\ \text{I.}\ \begin{matrix}185\frac{15}{16}\\92\frac{31}{32}\end{matrix}.$$

Es müssen also $92\frac{31}{32}$ *librae* in der Kasse gewesen sein. 1 Libra $= 20$ Solidi; 1 Solidus $= 12$ Denare; 1 Denar $= 2$ Oboli giebt die in der Aufgabe gegebene Lösung 92 Librae 19 Solidi 4 Denare 1 Obolus. Dagegen ist die andere Angabe falsch. Sie muss heissen 6 Libre 5 Solidi. Rechnet man von vorn, so sind die Beträge, welche in der Kasse sind und deren jedesmalige Verdoppelungen:

$$\begin{matrix}x\\2x\end{matrix};\ \begin{matrix}2x-100\\4x-200\end{matrix};\ \begin{matrix}4x-300\\8x-600\end{matrix};\ \begin{matrix}8x-700\\16x-1400\end{matrix};\ \begin{matrix}16x-1450\\32x-2900\end{matrix};\ \begin{matrix}32x-2950\\64x-5900\end{matrix};\ 64x-5950.$$

Da der letzte Betrag gleich Null sein muss, so folgt wieder $x = 92\frac{31}{32}$ wie vorher.

Der Unterricht in der Geschichte der Mathematik an der k. technischen Hochschule zu München.

Von A. von Braunmühl in München.

In den beiden Wintersemestern 1893—94 und 1894—95 habe ich an der k. technischen Hochschule zu München in wöchentlich einer Stunde privatim mathematisch-historische Vorlesungen abgehalten. Da mir einerseits aus verschiedenen Gründen nur ein Semester jährlich zur Abhaltung einer solchen Vorlesung zur Verfügung stand, und andererseits zu erwarten war, dass das Auditorium sich an unserer Anstalt nicht aus Studirenden der Mathematik allein, sondern auch aus Technikern zusammensetzen würde, so glaubte ich, dem verschiedenen Wissensgrade der Zuhörer entsprechend, auf einen summarischen Überblick über die geschichtliche Entwickelung der Mathematik bis in die *neueste Zeit* von vorne herein verzichten zu müssen. — Übrigens bemerke ich hier nebenbei, dass nach meiner Ansicht eine blos übersichtliche kurze Darstellung der Fortschritte, welche von Gauss ab die gesammte Mathematik bis auf unsere Tage gemacht hat, überhaupt unmöglich ist, wenn sie irgend einen Nutzen gewähren soll. — So beschloss ich denn nur einzelne Zeitabschnitte, diese aber eingehender, zu behandeln.

In der *1. Vorlesung* (1893—94) trug ich die Geschichte der Mathematik von den ältesten Zeiten bis zur Mitte des Zeitalters der Renaissance vor. Der hierbei von mir eingeschlagene Gang entspricht im Allgemeinen der in den Nummern 1—18 von Herrn Eneström (Biblioth. Mathem. 1890, S. 3—5) vorgeschriebenen Reihenfolge, nur zog ich, um für die Renaissance mehr Zeit zu gewinnen, den Stoff im Altertum etwas mehr zusammen, widmete aber dafür Leonardo Pisano und Jordanus Nemorarius, als frühen Vorläufern der Renaissance, beinahe 2 ganze Vorlesungen und behandelte Peurbach und Regiomontan auf das eingehendste. Hieran schloss sich ein Vortrag, in welchem ich das Rechnen im 15. und 16. Jahrhundert sowie die Anfänge und den allmäligen Aufschwung der deutschen Algebra in jener Zeit schilderte. Dann folgten drei Vorträge über die Renaissance in ausserdeutschen Ländern (Alberti, Leonardo da Vinci, Chuquet, Nonius, Record, die Auflösung der Gleichungen 3. und 4. Grades). In einer Schlussvorlesung gab ich

dann noch einen Überblick über die Entwickelung der Geometrie im 15. und 16. Jahrhundert, wobei ich namentlich TARTAGLIA und ALBRECHT DÜRER besprach.

Die 2. *Vorlesung* (1894—95) beschäftigte sich in 14 Vorträgen nur mit der Mathematik vom Beginne der Renaissance bis zur Mitte des 17. Jahrhunderts. Da wegen des Wechsels der Zuhörerschaft an eine directe Fortsetzung der früheren Vorlesung nicht zu denken war, so begann ich mit einem kurzen Rückblick auf das Mittelalter, behielt dann die oben angeführte Eintheilung bei, indem ich nur manches, wie z. B. die Schriften von CARDANO und TARTAGLIA, eingehender behandelte, und setzte meine Darstellung bis zur Erfindung der analytischen Geometrie einerseits und den Anfängen der Infinitesimalrechnung andererseits fort. Es ist dies ungefähr der von Herrn ENESTRÖM in den Nummern 17—22 incl. aufgeführte Stoff. Die Vorträge suchte ich dadurch zu beleben, dass ich stets die interessantesten Originalwerke in Vorlage brachte, was durch die reichen Mittel unserer Hof- und Staatsbibliothek ermöglicht wurde.

Ausser den beiden erwähnten Vorlesungen war es mir zu meiner grossen Befriedigung vergönnt, während 4 Semestern (1894 und 1895) ein einstündiges matematisch-historisches Seminar abzuhalten, in welchem ich theils selbst Vorträge über einzelne Gebiete hielt, mit denen ich mich eingehender beschäftigt hatte (so z. B. über die Geschichte der geodätischen Linien, über die Trigonometrie der Griechen, die Trigonometrie bei REGIOMONTAN etc.), theils den in ihren Studien vorgerückteren Theilnehmern Themata zu Vorträgen zuwies, zu deren Behandlung ich eingehende Quellenstudien verlangte. Einige kleine selbständige Arbeiten, die sich hieran anschlossen, werden, wie ich hoffe, demnächst erscheinen.

Ich glaube, dass namentlich der pädagogische Wert eines solchen Seminars nicht unterschätzt werden darf, da einerseits den zukünftigen Lehrern der Mathematik Gelegenheit geboten wird, die geschichtliche Entwickelung derjenigen Wissensgebiete eingehend kennen zu lernen, die sie einmal selbst lehren sollen, und andererseits freie Vorträge über einen bis ins Detail durchgearbeiteten Stoff, soferne auf formvollendete Darstellung gesehen wird, zur Ausbildung des Lehrtalentes gewiss von hervorragendem Nutzen sind.

RECENSIONEN. — ANALYSES.

Sefer ha-Mispar. Das Buch der Zahl. Ein hebräisch-arithmetisches Werk von R. **Abraham ibn Esra** (XII. Jahrhundert). Zum ersten Male herausgegeben, ins Deutsche übersetzt und erläutert von Dr. **Moritz Silberberg**. Frankfurt a. M., J. Kaufmann 1895. 8°, 148 S. und 80 hebräischer Text.

Der Verfasser des Buches war ein Universalgenie, Grammatiker, Poët, Mathematiker, Bibelausleger; die neueste Zeit brachte einzelne Abhandlungen, welche ihn nach den verschiedenen Seiten seiner literarischen Thätigkeit würdigen. Der unterzeichnete Referent hat den Versuch gewagt, die Materialien, aus welchen der Mathematiker zu construiren wäre, nach den Kräften eines Laien zu sammeln (*Abraham ibn Esra. Zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften im XII. Jahrhundert.* Suppl. z. hist.-lit. Abth. d. Zeitschr. f. Math. etc. 1880 S. 58—128) und wird bald Gelegenheit haben — in dem Artikel: *Mathematik bei den Juden,* in der Biblioth. Mathem. — auf ihn zurückzukommen. Die damals noch unedirte Arithmetik ist in jenem Artikel (S. 103—119) ausführlich besprochen und mit ähnlichen Schriften verglichen; s. auch Biblioth. Mathem. 1893 S. 69 über *Sifra* für Null. Herr Silberberg (gegenwärtig Rabbiner in Beuthen) hat bereits 1891 den Anfang des Buches zur Doctordissertation benutzt, und edirt es nunmehr im Texte nach mehreren Mss., mit einer ziemlich treuen deutschen Übersetzung nebst 175 angehängten Noten verschiedenen Inhalts, welche meine Andeutungen fleissig benutzen, teilweise erweitern, auch berichtigen; so z. B. ist es richtig, dass meine Wiedergabe (S. 92) der Stelle zu Exod. 3, 15 ungenau ist (hier S. 115 A. 165); der Inhalt entspricht dem Texte, zu dem diese Anm. gehört (S. 89, das Auffinden der Textstellen, resp. der deutschen Übersetzung konnte erleichtert werden). S. 93 A. 15 wird richtig bemerkt, dass die Kreisfigur auch im ms. Luzzatto mit Zarza übereinstimme; jedoch macht meine Stellung der Ziffern die Sache anschaulicher. S. 114 A. 154 habe ich an das *Quadrat* der Diagonale gedacht wegen der Quadratur; den Ausdruck כפל für π (welches im Index fehlt) ist nicht nachgewiesen. — Gelegentlich bemerke ich zu meiner Abhandlung: Zu S. 91 A. 118: vgl. Cantor, *Vorlesungen* I, 534 (Erste Aufl.). — Die vollständige Multiplicationstabelle hat Boethius, *Arithm.* C. 26 (Migne, *Patrologie,* t. 63, Paris 1860, p. 1103). — Es fehlt auch bei Herrn Silberberg

nicht an Ungenauigkeiten, so z. B. heisst der Annotator (S. 115 n. 164 und sonst) nicht SOAVI, sondern SOAVE; ein nur aus Antiquarcatalogen erklärliches Missverständnis macht ABRAHAM BAR CHIJJA zum Verfasser der einige Jahrhundert älteren *Mischnat ha-Middot* (S. 114 n. 157). — Am Schluss findet sich ein an sich nützlicher Index der Termini, sonderbarer Weise nach deutschem Alphabet geordnet, anstatt nach dem Hebräischen. — Durch die gewissenhafte Arbeit des Herrn SILBERBERG sind nunmehr die Fachmänner in der Lage, ein maassgebendes Urteil über diese Arithmetik zu fällen.

Berlin. MORITZ STEINSCHNEIDER.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von || journal d'histoire des mathématiques publié par G. ENESTRÖM. Stockholm. 8°.

1895: 2. — [Analyse de l'année 1893:] Fiziko-matem. naouki **13**, 1895, 25—33. (V. BOBYNIN.)

Физико-математическія науки въ ихъ настоящемъ и прошедшемъ. Журналъ издаваемый В. В. Бобынинымъ. Москва. 8°.

13 (1895): 1. — Les sciences mathématiques dans leur état actuel et passé. Journal publié par V. V. BOBYNIN.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von M. CANTOR. Leipzig. 8°.

40 (1895): 3—4.

Aubray, A., Essai historique sur la théorie des équations.
Journ. de mathém. spéciales **18**, 1894, 225—228, 245—253, 276—279; **19**, 1895, 14—17, 36—40, 67—70.

Autonne, L., Quelques mots sur les mathématiques pures dans l'antiquité et au moyen âge.
Revue générale des sciences **5**, 1894, 561—563.

Berenguer, P. A., Un geómetra español del siglo XVII.
El progreso matematico **5**, 1895, 116—121. — Note sur OMERIQUE.

БОБЫНИНЪ, В. В., Изъ біографіи Нильса-Генрика Абеля.
Fiziko-matem. naouki **11** (1892), 1894, 150—167. — BOBYNIN, V. V., De la biographie de N.-H. ABEL. (Vie et travaux d'ABEL après son retour à la patrie.) — Cfr. Biblioth. Mathem. 1893, p. 28.

БОБЫНИНЪ, В. В., Первое основанное въ россіи математическое овщество.
Fiziko-matem. naouki **13** 1895, 1—24. — BOBYNIN, V. V., La fondation de la première société mathématique russe.

°**Boll, F.,** Studien über Claudius Ptolemäus. Ein Beitrag zur Geschichte der griechischen Philosophie und Astrologie. Leipzig, Teubner 1894.

8°, 194 p. — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **40**, 1895; Hist. Abth. 130—132. (CANTOR.)

Brocard, H., Notice sur les titres et travaux scientifiques de M. H. Brocard. Bar-le-Duc 1895.

8°, (5) + 72 + 26 + 69 + (1) p.

Christensen, A. A., Cirkelns Kvadratur hos Grækerne.

Nyt Tidsskrift for Mathem. **5**, 1894, B: 63—67.

Curtze, M., Mathematisch-geschichtliches aus dem Codex latinus Monacensis N° 14908.

Arch. der Mathem. **13₂**, 1894, 388—406.

Curtze, M., Mathematisch-historische Miscellen.

Biblioth. Mathem. 1895, 33—42.

Diophanti Alexandrini Opera omnia cum graecis commentariis. Edidit P. TANNERY. Volumen II continens pseudepigrapha, testimonia veterum, PACHYMERAE Paraphrasin, PLANUDIS Commentarium, Scholia vetera, omnia fere adhuc inedita, cum prolegomenis et indicibus. Leipzig, Teubner 1895.

8°, XLVII + 297 + (1) p.

°**Euclidis** Opera omnia. Ediderunt J. L. HEIBERG et H. MENGE. Vol. VII. EUCLIDIS Optica, Opticorum recensio THEONIS, Catoptrica, cum scholiis antiquis. Edidit J. L. HEIBERG. Leipzig, Teubner 1895.

8°, LV + 362 p. — [5 Mk.] — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **40**, 1895; Hist. Abth. 134—135. (CANTOR.)

Fabris, V., Il Pandosio di Andrea Argoli.

Bollettino della società storica Abruzzese **7**, 1895, 247—257.

°**Graf, J. H.,** Rudolf Wolf. 1816—1893. Der Bernischen naturforschenden Gesellschaft zum Andenken beim 50-jährigen Jubiläum ihrer »Mittheilungen» gewidmet.

Bern, Naturforsch. Gesellsch., Mittheilungen 1894. — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **40**, 1895; Hist. Abth. 59. (CANTOR.)

°**Herz, N.,** Kepler's Astrologie. Wien, Gerold 1895.

8°, 148 p. — [3 Mk.]

Juel, C., Redegjørelse for en Afhandling af Landsmaaler Caspar Wessel fra 1799.

Nyt Tidsskrift for Mathematik **6**, 1895, 25—35. — Sur l'histoire de la représentation géométrique des quantités complexes avant ARGAND.

Kempe, A. B., Mathematics.

London, Mathem. soc., Proceedings **26**, 1895, 5—15. — Notices historiques sur la définition de mathématiques.

Klein, F., Riemann e la sua importanza nello sviluppo della matematica moderna.

Annali di matem. **23₂**, 1895, 209—224. — Traduit de l'allemand par E. PASCAL.

Lafitte, P., Auguste Comte, examinateur d'admission à l'école polytechnique.
Nouv. ann. de mathém. **13**, 1894, 65—81, 113—121, 405—428, 462—482.

°**Liapounoff, A. M.,** P. L. Tchebycheff.
Charkoff, Soc. mathém., Communications $\mathbf{4}_2$, 1894, 263—280.

Loria, G., Desargues e la geometria numerativa.
Biblioth. Mathem. 1895, 51—53.

Mansion, P., Sur les raisons données par Copernic en faveur du mouvement de la terre.
Bruxelles, Société scientifique, Annales **18**: 1, 1894, 12—15.

Mansion, P., Sur une opinion de Galilée relative à l'origine commune des planètes.
Bruxelles, Société scientifique, Annales **18**: 1, 1894, 46—49, 90—92.

Mansion, P., Sur une opinion de Galilée relative à la chute des corps.
Bruxelles, Société scientifique, Annales **18**: 1, 1894, 92—94.

Mansion, P., Notice sur les recherches de M. de Tilly en métagéométrie.
Revue des questions scientifiques **37**, 1895, 584—595.

Meyer, F., Rapport sur les progrès de la théorie des invariants projectifs. Traduction annotée par H. Fehr.
Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{18}_2$, 1894, 179—196, 213—220, 284—308.

Picard, E., A propos de quelques récents travaux mathématiques.
Revue générale des sciences **3**, 1892, n° 21. — Sur l'histoire de la théorie des groupes et des équations différentielles. — [Réimpression:] *Palermo,* Circolo matem., Rendiconti **9**, 1895, 150—158.

Picard, E., Sur la théorie des surfaces algébriques.
Revue générale des sciences **5**, 1894, 945—949. — Note historique. — [Réimpression:] *Palermo,* Circolo matem., Rendiconti **9**, 1895, 159—166.

Pierpont, J., Zur Geschichte der Gleichung des V. Grades (bis 1858).
Monatshefte für Mathem. **6**, 1895, 15—68.

Ruska, J., Zur Geschichte des »Sinus».
Zeitschr. für Mathem. **40**, 1895; Hist. Abth. 126—128.

Silberberg, M., Sefer ha-Mispar. Das Buch der Zahl. Ein hebräisch-arithmetisches Werk des R. Abraham ibn Esra (XII. Jahrhundert). Zum ersten Male herausgegeben, ins Deutsche übersetzt und erläutert. Frankfurt a. M., Kauffmann 1895.
8°, IX + 118 + (2) + 80 p. — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **40**, 1895; Hist. Abth. 142—144. (G. Wertheim.)

°**Stäckel, P.** und **Engel, F.,** Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss. Eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der Nicht-Euklidischen Geometrie. Leipzig 1895.
8°, X + 325 p. + 1 facsim. — [9 Mk.]

Steinschneider, M., Die Mathematik bei den Juden.
Biblioth. Mathem. 1895, 43—50.

Sturm, A., Das delische Problem. [I. Behandlung des Problems in der Platonischen Zeit.] Linz 1895.
8°, 56 p.

Suter, H., Die Araber als Vermittler der Wissenschaften in deren Übergang vom Orient in den Occident. Vortrag.
| Verein schweiz. Gymnasiallehrer, Jahresheft **25** (Aarau 1895). 31 p. — Les pages 10—28 se rapportent aux mathématiques.

°**Szily, K. von** und **Heller, A.,** Die Arithmetik des Magisters Georgius de Hungaria aus dem Jahre 1499.
Mathem. und naturw. Berichte aus Ungarn **12**, 1895, 134—143. — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **40**, 1895; Hist. Abth. 135—136. (CANTOR.)

Wittstein, A., Aus Manuscripten und einer früheren Publication.
Zeitschr. für Mathem. **40**, 1895; Hist. Abth. 121—125.

Zeuthen, H. G., Notes sur l'histoire des mathématiques. IV. Sur les quadratures avant le calcul intégral, et en particulier sur celles de Fermat.
Kjöbenhavn, Vidensk. Selskab, Oversigt 1895, 37—80.

Zeuthen, H. G., Réponse aux remarques de M. Cantor.
Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{19}_2$, 1895, 183—184.

Question 51 [sur le mathématicien J.-R. ARGAND].
Biblioth. Mathem. 1895, 64. (G. ENESTRÖM.)

Abhandlungen über Variations-Rechnung herausgegeben von P. STÄCKEL. Theil I: Abhandlungen von Johann Bernoulli (1696), Jacob Bernoulli (1697) und L. Euler (1744). Theil II: Abhandlungen von Lagrange (1762, 1770), Legendre (1786) und C. G. J. Jacobi (1837). Leipzig, Engelmann 1894. 8°.
Zeitschr. für Mathem. **40**, 1895; Hist. Abth. 132—133. (CANTOR.)

BRILL, A. und NÖTHER, M., Die Entwickelung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit. (Jahresber. der deutschen Mathematiker-Vereinigung **3**.)
Torino, Accad. d. sc., Atti **30**, 1895, 91—93. (C. SEGRE.)

CAJORI, F., A history of mathematics. New York, Macmillan & Co. 1895. 8°.
Biblioth. Mathem. 1895, 55—60. (G. ENESTRÖM.)

CANTOR, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Zweiter Band. Von 1200—1668. Dritter Band. Vom Jahre 1668 bis zum Jahre 1759. Erste Abtheilung. Die Zeit von 1668 bis 1699. Leipzig, Teubner 1892—1894. 8°.
Giornale di matem. $\mathbf{1}_2$, 1894, 353—357. (G. LORIA.)

LORIA, G., Le scienze esatte nell' antica Grecia. Libro I. I geometri precursori di Euclide. Libro II. Il periodo aureo della geometria greca. Modena 1893—1895. 4°.
Biblioth. Mathem. 1895, 54. (G. ENESTRÖM.) — [Analyse du 2d livre:] Periodico di matem. **10**, 1895, 121—125. (A. LUGLI.)

Répertoire bibliographique des sciences mathématiques. Première série: Fiches 1 à 100. Paris, Gauthier-Villars 1894. 8°.
Fiziko-matem. naouki **13**, 1895, 34—39. (V. Bobynin.)

Riccardi, P., Saggio di una bibliografia Euclidea. I—V. (Memorie dell' accad. d. sc. di Bologna.) Bologna 1887—1893. 4°.
Bullet. d. sc. mathém. **19**$_2$, 1895, 176—178. (P. Tannery.)

Schenkel, H., Kritisch-historische Untersuchungen über die Theorie der Gammafunction und die Euler'schen Integrale. Bern 1895. 8°.
Zeitschr. für Mathem. **40**, 1895; Hist. Abth. 138—139. (Cantor.)

Mathematisches Abhandlungsregister. 1894. Erste Hälfte. 1. Januar bis 30. Juni.
Zeitschr. für Mathem. **40**, 1895; Hist. Abth. 109—120.

[Listes d'ouvrages récemment publiés.]
Biblioth. Mathem. 1895, 60—64. — Fiziko-matem. naouki **13**, 1895, 40—48. — Zeitschr. für Mathem. **40**, 1895; Hist. Abth. 107—108, 158—160.

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

52. La bibliothèque de l'observatoire astronomique d'Upsala possède (ou possédait au moins en 1878) un manuscrit (54 feuillets in-4°) intitulé *Algebraicarum praeceptionum epitome, authore* Jacobo de Billy et écrit de la main d'Andreas Spole, professeur de mathématiques à l'université d'Upsala (né en 1630, mort en 1699). On sait que Spole séjournait à Paris 1664—1666, et sans doute la copie y a été faite par lui.

Est-ce que cet ouvrage de J. de Billy (né en 1602, mort en 1679) a été imprimé? En cas négatif, est-ce qu'on en connaît d'autres copies? (G. Eneström.)

Inhalt. — Table des matières.

STOCKHOLM, TRYCKT I CENTRAL-TRYCKERIET, 1895.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK



JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON — PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1895. STOCKHOLM. N° 4.

NEUE FOLGE. 9. — NOUVELLE SÉRIE. 9.

BERLIN. MAYER & MÜLLER. Markgrafenstrasse 51.

Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr.

PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Die Mathematik bei den Juden.

Von MORITZ STEINSCHNEIDER in Berlin.[1]

21. In der zweiten Hälfte des XI. Jahrhunderts begegnen wir im arabischen Spanien dem ISAK BEN BARUCH, einem hochgestellten und wissenschaftlich gebildeten jüdischen Mathematiker von Fach. Wir haben zwar den Verlust seiner Schriften zu bedauern, dafür aber den seltenen Vorteil wichtiger und zuverlässlicher biographischer Nachrichten, nämlich von Seiten seines Tochtersohnes, ABRAHAM IBN DA'ÛD (in dieser arabischen Form wird er meist citirt und dadurch von einem homonymen jüngeren Zeitgenossen unterschieden). ABRAHAM, 1180 in Toledo getödtet (?), verfasste im J. 1160 zur Abwehr der in die iberische Insel eindringenden Karaiten, welche die rabbinische Tradition verwarfen, eine kleine Schrift unter dem Titel: *Sefer ha-Kabbala* (Buch der Tradition), worin er die ununterbrochene Gesetzüberlieferung an den bekannten Autoritäten und Celebritäten nachzuweisen versucht. Dieses Schriftchen gilt als die älteste Geschichtsquelle über die jüdischen Gelehrten, welche seit dem berühmten Briefe des Gaon SCHERIRA, namentlich in *Europa*, gelebt haben. In unserem Falle verdient ABRAHAM wohl volles Vertrauen, doch bietet sein hebräischer Text Veranlassung zu Missverständnis; ungerechtfertigte Ausschmückung und vermeintliche Ergänzung in unsicheren Einzelheiten sollte der ernste Geschichtsforscher den Romanschreibern überlassen.

Der Bericht ABRAHAM's ist als Quelle für die späteren jüdischen Geschichtschreiber oder Bibliographen anzusehen, welche je nach ihrer Tendenz Einzelnes herausgriffen oder umschrieben;[2] eine ältere kurze arabische Notiz des MOSES IBN ESRA wird unten mitgeteilt werden. Unserem Zwecke ist es nicht angemessen, alle Einzelheiten zu besprechen; wir beschränken uns auf einige Punkte.

Der volle Namen ISAK's ist schon in der 1. Ed. ABRAHAM's wie in Ed. Amst. 1711 f. 44 (Ed. Neub. p. 74) durch Einschiebung von »und R. Isak» (vielleicht aus der vorangehenden Zeile?) irreführend. Daher stammt wohl auch die irrige Wiederholung bei MEÎRI, welche vielleicht durch ein bei DE LATAS hinzugefügtes Wort beseitigt werden sollte, wonach unser ISAK ein eigentlicher Schüler des ISAK IBN GAJJATH (gest. 1089, im Alter von 51 Jahren?)[3] gewesen wäre, was schon die geringe Altersverschiedenheit und der Mangel einer anderweitigen Bestätigung unwahrscheinlich machen. Die richtige Lesart hatte wohl IBN DANAN: »ISAK BEN BARUCH BEN JAKOB B. BARUCH BEN (ibn) AL-BALIJJA» (woraus »AL-KALAJA» verstümmelt ist).

»Die Schwäche, mit einer vonehmen Abkunft zu prahlen, ist so alt als die Abfassung unechter Stammbäume»[4] bemerkt ZUNZ. Auch die Familie ISAK's in al-Merida (Spanien), dann in Cordova, führte ihren Stammbaum auf einen, angeblich von TITUS aus Jerusalem nach Spanien gesendeten Seidenarbeiter zurück. ISAK, geboren im Frühling (Ijjar) 1035, erfreute sich der Gunst des jüdischen Ministers SAMUEL HA-NAGID (bei den Arabern: *Nagdêla*, nicht »Nagrela») und dessen unglücklichen Sohnes und Nachfolgers JOSEF, in Granada, bei dessen Sturz (1066) er in wunderbarer Weise gerettet wurde; bis dahin lebte er abwechselnd in Cordova und Granada.[5] Im 34. Lebenjahre, 1069, wurde er zum Rabbiner und »*Nasi*» ernannt.[6] Später diente er dem MU'ATAMID als Astrolog gegen 20 Jahre und starb in Granada im Frühling 1094, im Alter von beinahe 59 Jahren, nachdem er viele Schüler ausgestellt und den Israeliten viel Gutes erwiesen hatte.[7] MOSES IBN ESRA, in einer arabischen Abhandlung über die hebräischen Poëten,[8] nennt auch ISAK BEN BARUCH den Cordubenser als bewandert in den Disciplinen der (mathematischen) Wissenschaften, zu den Rechtsgelehrten und Mathematikern gehörend, auch Dichter und Rhetor; er diente der Dynastie der Abbadijja in der astrologischen Kunst, in welcher er bedeutend war . . . er starb in Granada im J. 854 (1094) und wurde in Cordova begraben. IBN DANAN erzählt nach einer Tradition vornehmer Greise, dass ISAK auf

dem Gottesacker von Granada neben der Grabhöhle eines SAADIA ABU HARUN südwärts bestattet sei; trotz ihrer Genauigkeit verdient doch diese angebliche Tradition nach 400 Jahren dem Zeugnisse eines Zeitgenossen gegenüber keinen Glauben.

ISAK hatte eine Bildung genossen, die wir nach modernen Begriffen eine »klassische« nennen würden; ABRAHAM bemerkt von ISAK und dessen Sohne BARUCH (geb. 1077) — der als 17-jährige Waise von dem ehemaligen Gegner ISAK's, dem berühmten Talmudgelehrten ISAK AL-FASI (gest. in Lucena 1103), väterlich aufgenommen wurde — sie haben »griechische Weisheit« oder »Wissenschaft« besessen. Dieser Ausdruck bezeichnet die Kenntnis profaner Wissenschaften, welche die Araber auf Grundlage von Übersetzungen aus den griechischen Koryphäen betrieben und teilweise fortentwickelten; sie bildet hier den Gegensatz zur jüdischen Theologie,[9] deren Gebiet ISAK auch literarisch bearbeitete.

Indem wir zu der schriftstellerischen Thätigkeit ISAK's übergehen, tritt uns zunächst die Frage entgegen: in welcher Sprache schrieb er? Sowohl in arabischer als in hebräischer Sprache dürften seine »Gutachten« über Rechtsanfragen abgefasst worden sein, wovon in neuester Zeit Proben vorliegen.[10] Wissenschaftliche selbständige Abhandlungen wurden in jener Zeit und Gegend arabisch geschrieben; hebräische Citate können aus einem arabischen Originale übersetzt sein; Commentare zum Talmud von Anderen liegen nicht vor, um danach zu urteilen; es wird also die Sprachfrage für die nachfolgenden Schriften noch eine offene bleiben. Aber auch Zahl und Inhalt derselben ist nicht ganz unzweifelhaft und sind hier nicht alle jüngeren Nachrichten aus ABRAHAM'S geflossen, so dass sie neben ihm beachtet werden müssen. — ISAK hat mindestens 2 Werke geschrieben; uns interessirt direct nur eines, bei welcher wir auch das andere streifen müssen.

Eine Abhandlung über die jüdische Zeitrechnung (Kalenderrechnung), welche man nach dem wichtigsten Punkte mit dem Gattungsnamen »Ibbur« (Intercalation) bezeichnete, verfasste ISAK für den obengenannten Gönner, JOSEF.[11] Aus diesem Werke hat uns ABRAHAM BAR CHIJJA — von dem wir bald zu sprechen haben — in seinem gleichartigen hebräischen Werke (ed. London 1851) einige längere Citate mitgeteilt (S. 54—55, 60 ff., 93—94), welche nicht aus dem Arabischen übersetzt scheinen. Wir heben daraus einige bemerkenswerte Einzelheiten hervor.

Der greise HASAN (s. oben § 20 S. 48) behauptete, die alten Weisen haben die Stellung von Sonne und Mond nach

einem Standpunkt am Ostende der Erde berechnet. ISAK erklärt sich dagegen (S. 54). Bei Gelegenheit bemerkt er (ib. letzte Zeile): »Wenn Gott das Leben des NAGID, unseres Herren verlängert, und der Himmel mir beisteht, den Tractat [des Talmud] *Rosch ha-Schana* zu erklären, worin jene Regeln vorkommen, werde ich meine Ansicht über die beiden Standpunkte auseinandersetzen.» Dazu bemerkt ABRAHAM (S. 65), das sei eine leere Vertröstung (Prov. 13, 12). Die Erklärung jenes Tractates bildete also nicht einen Teil des chronologischen Werkes, wie man aus den Worten MENACHEM MEÎRI's (l. c. Anm. 2) entnehmen könnte: »Es gelangte in unsere Hände [Etwas?] von seinem Buche *Sod ha-Ibbur* (Geheimnis der Intercalation) und Erklärung jener Stellen im Tractat *Rosch ha-Schana*» u. s. w.! Etwas davon musste allerdings in jenem Werke besprochen werden; der ausführliche Commentar sollte unzweifelhaft einen Teil des Commentars über den ganzen Talmud bilden, welchen ISAK unter dem Titel: »Korb der Spezereihändler» (*Kufat,* oder *Kuppat ha-Rochelim*) begonnen, aber nicht vollendet hat.[12]

In einem anderen Citat (S. 60) bestreitet ISAK die Annahme des Gaon SA'ADIA (oben § 15), dass die Verlegung gewisser Feste wegen des unbequemen Wochentages schon talmudisch sei. Nachdem er alle angeblichen Beweise des berühmten Lehrers angeführt — dessen Sendschreiben an die Gemeinden von Cordova, Elvira, Lucena, Baëna (? Bagana), Calzana (in Granada), Sevilla und al-Merida von einem Zeitgenossen ABRAHAM B. DAVID's gesehen, das Ansehen des Gaon in Spanien bekundet — sieht er sich veranlasst, seinen Widerspruch gegen eine solche Autorität zu rechtfertigen, mit folgenden Worten: »Es werfe mir Niemand vor: Wie kannst du einem Gelehrten widersprechen, der gross und ausgezeichnet ist, mehr als du? Ich antworte: Gewiss ist er in jeder Wissenschaft grösser als ich, eben so war MOSE, unser Lehrer »Gaon» und der grösste in ganz Israel; dennoch unterlies nicht ELASAR, der Priester, zu ergänzen, was MOSES nicht ausgeführt hatte (Num. 31, 21), um wie viel weniger [ist] R. SAADIA, dass man von ihm nicht sagen dürfte: seine Worte leuchten mir nicht ein; vielmehr bin ich überzeugt, dass unsere Weisen das Pesach und alle Feste an jedem Wochentage feierten.» Wir sehen in dieser Wendung nicht sowohl persönliche Bescheidenheit als vielmehr einen Einspruch gegen persönliche Autorität.

An einer dritten Stelle (S. 93) beruft sich ISAK auf einen Satz, der nicht in den talmudischen Quellen nachgewiesen ist,

und citirt dafür auch die Schrift eines alten Gelehrten,[13] der seinen Lehrer darüber befragte. Hier stehen wir an der ältesten bisher bekannt gewordenen Quelle über die sogenannten Quatember eines ADDA BAR AHABA, dessen Maass des Sonnenjahres nur geheim gelehrt worden sei — das bedeutendste Problem in der Geschichte des jüdischen Kalenders, noch jetzt ein Zankapfel der Gelehrten,[14] weshalb wir unserem Citate einige Bedeutung beilegen. — Aus derselben Stelle geht auch ISAK's Glaube (richtiger Aberglaube) an die Astrologie hervor. — Was *nach* ABRAHAM BAR CHIJJA von ISAK B. BARUCH berichtet wird, dürfte aus ABRAHAM geschöpft sein, mit Ausnahme eines Citates bei ABRAHAM IBN ESRA,[15] wonach ISAK das Mondjahr der Inder mit $354\frac{1}{3}$ Tagen und $\frac{4}{5}$ Stunden nach Berechnung der 5,000 verflossenen Weltjahre für falsch erklärte, was IBN ESRA wiederum für irrige Berechnung erklärt; diese Angabe findet sich bei ABRAHAM BAR CHIJJA nicht; IBN ESRA hat kein halbes Jahrhundert nach ABRAHAM BAR CHIJJA gelebt und kannte ISAK's Werk wohl noch aus Autopsie. —

Zur Zeit ISAK's gab es in Toledo eine Anzahl von Juden, welche sich mit Sternbeobachtung beschäftigten und als ungenannte Mitarbeiter an den toledanischen astronomischen Tafeln anzusehen sind, welche der berühmte Araber IBRAHIM AL-ZARKALA (oder AL-ZARKALI, um 1070) redigirte.[16]

Wenig verbürgt ist die Existenz eines LAZARUS LEVI von dessen kosmographischem Werke eine Nachricht aus derselben Zeit stammen soll.[17]

[1] Zu S. 48 Anm. 4 ist nachzutragen: AD. NEUBAUER, *Un chapitre inédit de* SABBATAI DONNOLO, in den Études juives XXII (1891) p. 213; dieses Cap. ist 982 geschrieben. — P. 213, note, wird irrtümlich ein hebr. Text im Archiv citirt, wo er nicht erschien.

[2] ABRAHAM SACUT, *Juchasin*, ed. Krakau f. 162, bietet hier offenbar eine, unbeachtet gebliebene Lücke; ed. Lond. S. 212 giebt einen unveränderten Text ABRAHAM's B. D. MENACHEM MEÎRI, Einleit. (zu Abot) ed. Salon. f. 34, wie ed. Wien f. 18, bietet einen corrupten Text, indem hinter ISAK B. BARUCH zum zweiten Male »Isak b. Jehuda» angefügt wird; DE LATAS, *Schaare Zion* (irrtümlicher Titel) ed. S. BUBER, Jaroslaw 1885, S. 36, schiebt ein Wort ein (s. weiter unten). SAADIA IBN DANAN (in der Sammelschrift: *Chemda Genusa* f. 29^b) fügt eine Notiz über das Grab hinzu. Der unkritische GEDALJA IBN JACHJA, *Schalschelet* f. 40 ed. Ven. (38 ed.

Amst.) macht aus unserem ISAK zwei verschiedene Personen! ASULAI (Bio-bibliogr. Lexikon, geordnet von BENJAKOB I f. 100 n. 295, ohne Verweisung auf II, 129 n. 62) citirt ein Gutachten. WOLF, *Biblioth. hebr.* I. n. 1177 (wonach DE ROSSI im *Diz. stor.*, deutsch unter: »Albalia») giebt einen Doppelgänger BARUCH (p. 269 n. 424), s. auch JOST, *Gesch.* VI, 142, 362, meinen *Catal. l. h. in Bibl. Bodl.* p. 1096 u. Add. (Dort lies: WEIL zu Abr. b. D. p. III; vgl. Hebr. Bibliogr. XVIII, 65). GEIGER, *Divan des Juda ha-Levi* S. 43; GRÄTZ, *Gesch.* VI, 72, 93, s. weiter unten mehrfache Berichtigungen. — H. I. MICHAEL und S. I. FÜNN haben ISAK in ihren hebräischen Gelehrten-Lexicis übergangen.

3 Nach ALGASI, s. *Cat. Bodl.* p. 1110; BUBER zu DE LATAS l. c. n. 456 giebt an: geb. 1030, offenbar nach GRÄTZ VI, 74, wo: »um 1030» nach Conjectur. Dergleichen ist nichts Seltenes.

4 ZUNZ, zu *Benjamin von Tudela* (1840) II, 8, wo verschiedene Beläge.

5 Nach GRÄTZ, S. 73, nahm er hierauf »seinen bleibenden Sitz in Cordova»! im Widerspruch mit dem Folgenden und ohne Belag. ISAK soll den »grössten Teil» der Bibliothek JOSEF's gekauft haben. ABRAHAM spricht von »vielen» Büchern des NAGID (SAMUEL'S?); s. jedoch die unten angeführte Stelle bei ABRAHAM BAR CHIJJA, S. 54 l. Zeile.

6 Über diesen Titel s. ZUNZ, l. c. 116. In dem von ASULAI citirten Gutachten (GRÄTZ, Anm. 4) steht aber: *hanissa* (der erhabene).

7 GRÄTZ beachtet die 20 Jahre nicht und lässt MU'ATAMID bei seinem Regierungsantritt a. 1069 den ISAK nach Sevilla berufen u. s. w. Bei AD. JELLINEK, Vorwort zu JOSEF IBN ZADDIK, *Mikrokosmos* p. VI ist das Todesjahr 1098 Druckfehler. — Über MU'ATAMID s. R. DOZY, *Scriptor. arabum loci de Abbadidis,* vol. III, Lugd. Bat. 1846, p. 397; desselben *Hist. des Musulmans d'Espagne,* T. IV, Lugd. Bat. 1861, p. 108 seq., Index p. 330.

8 Ms. der Bodleiana, wovon eine Durchzeichnung, früher mein Eigentum, jetzt im Besitz der hiesigen K. Bibliothek n. 464 Oct., f. 39^b. Zwei Sätze, deren Text Schwierigkeiten darbietet, habe ich nur durch Punkte angedeutet. Über ISAK als Poëten vgl. CHARISI Cap. 3, bei GRÄTZ S. 72. A. 2.

9 Über die Bedeutung der, im Talmud verpönten »griechischen Weisheit», oder Wissenschaft (DE ROSSI, l. c. substituirt

»Literatur«) sind die Gelehrten seit lange im Streite. GRÄTZ S. 72 scheint *dafür* Philosophie zu setzen, wenn er von ISAK meint: »seine Neigungen waren zwischen Astronomie, Mathematik, Philosophie und Talmud geteilt.« Von ISAK's philosophischen Studien im eigentlichen Sinne des Wortes wissen die Quellen Nichts.

[10] CH. HOROWITZ, Halach. Schriften der Geonim (*Beth Nechot* etc.) Frankf. a. M. 542 (1881), S. 35; das Verhältnis des Hebräischen zum Arabischen (welches fast unbrauchbar abgedruckt ist) lässt sich kaum erkennen.

[11] Das Jahr 1065 bei GRÄTZ soll wohl ein *Terminus ad quem* sein? Der angebliche »Titel« *Ibbur* ist nur eine Sachbezeichnung (s. weiter unten und *Catal. Bodl.* p. 2069 u. Add. u. p. 2171; HALBERSTAM zu IBN ESRA, *Ibbur* S. 8). ABRAHAM B. DAVID gebraucht den Ausdruck: *Machberet Ibbur wekhol Sodo,* d. h. »und dessen ganzes Geheimnis« mit Bezug auf die typisch gewordene Bezeichnung; s. Biblioth. Mathem. 1893, S. 112 Anm. 28.

[12] »Wegen des bedeutenden Umfanges« setzt GRÄTZ S. 72 als Grund hinzu, als ob kein andrer möglich wäre! — ISAK ISRAELI (IV, 3 f. 6 ed. 1848 [vgl II, 17 f. 35ᵇ] und IV, 6 f. 9ᵇ und 10ᵃ, Cap. 7 f. 11) kennt offenbar nur ABRAHAM BAR CHIJJA's Citate, daher schliesst er seine eigene Motivirung (IV, 6 Ende) mit den Worten: »so, *oder ähnlich,* waren [wohl] die Worte ISAK's.«

[13] Der Ausdruck *Sefer missifre ha-Kadmonim* bedeuted keinesfalls eine Schrift von anerkannter Autorität; vgl. SLONIMSKI, *Jesode ha-Ibbur,* 3 Aufl., Warschau 1889, S. 42; Über AD. SCHWARZ, *Der jüdische Kalender,* Breslau 1872, S. 42 vgl. die hier folg. Anm. 14.

[14] Von einer, nach ADDA benannten »Baraita« (s. über diese Bezeichnung § 8, wo auch der wahrscheinliche Ursprung) weiss erst ABRAHAM BAR CHIJJA. Characteristisch für die Argumentation von SCHWARZ (l. c. S. 43) ist es, dass er sich auf »OBADJA und ABRAHAM BAR CHIJJA« beruft, ohne zu sehen, dass OBADJA (erst 1341, s. *Catal. Bodl.* p. 2075, Magazin für die Wiss. d. Judenth. III, 97) mit seinem ganzen 10. Kap. nur ein Plagiat an ABRAHAM beging! die versprochenen Tabellen ist er schuldig geblieben; sie gehörten ebenfalls zum Plagiat. — Über das Verhältnis des Sonnenjahrs ADDA's zu BATTANI s. oben § 20.

[15] *Ha-Ibbur* ed. 1874 f. 10ᵇ Zeile 4 (vgl. Vorr. S. 8); vgl. Zeitschr. der deutschen morgenl. Gesellsch. **24,**

1870, 349; **30**, 1876, 117, so lies im Magazin f. d. W. d. Jud., III, 200. — Die Stelle bei IBN ESRA l. c. f. 10[b] über ISAK's Widerspruch gegen HASAN könnte aus ABRAHAM BAR CHIJJA stammen.

[16] Meine *Etudes sur Zarkali* p. 4 (Bullett. di bibliogr. d. sc. matem, **16**, 1883, p. 174).

[17] WOLF, *Bibl. hebr.* I, p. 743 n. 130 aus SALOMO IBN VERGA, *Schebet Jehuda*, hebr. ed. WIENER p. 57, deutsche Übersetzung, Hannover 1856, p. 114. — Das Vorbild der Erfindung dürfte *L'Image du Monde* gewesen sein, also nicht vor dem XIII. Jahrh.

Mathematisch-historische Miscellen.

Von Maximilian Curtze in Thorn.

7. War Johannes de Lineriis ein Deutscher, ein Italiener oder ein Franzose?

Nach Bernardino Baldi (Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **12**, 1879, 420) war Johannes de Lineriis »Tedescho di nazione«; nach der Ausgabe: *Algorismus de integris Magistri Prosdocimi Debeldomandis Pataui simul cum algorismo de deminutiis (!) seu fractionibus magistri Ioannis de Liuerij siculi. Reintegratus ab erroribus commissis a scriptoribus a me* Federico Delfino etc. (Venetiis MDXXXX) war er ein Italiener, und steht deshalb auch in der *Biblioteca matematica italiana* des Prof. Pietro Riccardi; nach M. Steinschneider endlich war er (Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **12**, 1879, 345 ff.) ein Franzose aus der Picardie. Da ich in der Lage bin die letztere Angabe als absolut sicher zu beweisen, so erlaube ich mir, den Lesern dieser Zeitschrift die Beweismittel kurz vorzuführen.

Nach Cantors *Vorlesungen* II, 115 existiert in Oxford handschriftlich eine *Tabula sinus Mag. Joh. de Ligneriis.* Diese *Tabula sinus* findet sich nun unter sehr verschiedenem Titel in einer ganzen Reihe von Handschriften,[1] von denen eine Autograph des bekannten Schülers unseres Johannes de Lineriis, des Johannes Danecowe de Saxonia ist. Dieses Exemplar ist enthalten im Codex Amplonianus F. 377[3] und schliesst mit folgendem Explicit: »Expliciunt canones tabularum astronomie ordinati per magistrum Johannem Pychardum de Lyneriis et completi Parisius (!) anno ab incarnacione Christi filii Dei 1322, scripte Parisius (!) per manus Johannis de Danecowe a. D. M°CCC°XXIII° in die cathedra Petri, Deo gr.«

Diesem jedenfalls unwiderleglichem Ausspruche reiht sich eine zweite Handschrift der Amploniana an, Cod. Ampl. Q. 349[7], welche die Schrift *de minutiis* des Johannes de Lineriis mit einer in allen mir bekannten sonstigen Handschriften nicht vorhandenen Widmung desselben enthält. Diese Widmung beginnt nun folgendermassen:[2] »Multiplicis philosophie variis illustrato domino Roberto de Bardis de Florencia Glacunensis (!) ecclesie inclito decano Johannes de Lineriis Anbianensis diocesis astronomie veritatis amator« u. s. w.

Da Anbianum, das heutige Amiens, die Hauptstadt der Picardie ist, so wird hier durch den fraglichen Verfasser selbst seine Landsmannschaft festgelegt. Aus beiden Notizen dürfte es also wohl absolut feststehen, dass Johannes de Lineriis französischer Nationalität gewesen ist und noch im Jahre 1322 gelebt hat.

Was den Johannes Danecowe de Saxonia betrifft, den die *Allgemeine deutsche Biographie,* ich weiss nicht aus welchem Grunde, nicht für werth gehalten hat, in ihre Spalten aufgenommen zu werden — der *Ictus* Johannes de Saxonia ist nämlich sicherlich mit Johannnes Danecowe nicht identisch —, so folgt aus einer Handschrift derselben Bibliothek, Cod. Ampl. Q. 365[20], dass derselbe schon im Jahre 1297 gelebt und geschrieben haben muss. Die Beschreibung der fraglichen Handschrift bei Schum, *Beschreibendes Verzeichnis der Amplonianischen Handschriften-Sammlung zu Erfurt,* S. 611 lautet nämlich folgendermassen:

20) Bl. 132—139. Notule Johannis Danko(!) *super compotum. Anf.:* Sicut dicit Ptholomeus in *Almagesti,* disciplina hominis. *Ende:* est causans ipsum. Expl. notule supra comp. mag. Joh. de Saxonia extracte a scriptis eiusdem completis a. D. 1297.

In einer zur Currentschrift neigenden Minuskel (s. Ex. codd. Ampl. Taf. XXIV) mit sehr blasser Tinte 2-sp. ohne Horiz. auf Pgt. geschr.; zu Anfang bunter Initial beabsichtigt.

Da Johannes de Saxonia, z. B. in der Handschrift Codex Amplonianus F. 386[20], sich folgendermassen ausspricht: »Quia plures astrologorum diversos libros fecerunt ... Johannes de Lineriis magister meus canones presentes ordinavit ... ego Johannes de Saxonia intendo« u. s. w., so muss Johannes de Lineriis jedenfalls älter als Johannes Danecowe gewesen sein, kann also nicht, wie Bernardino Baldi (a. a. O., 421) angiebt, um 1350 geblüht haben, während oben bewiesen wurde, dass er 1322 sicher noch am Leben gewesen ist. Beide Verfasser gehören also sowohl dem 13. als dem 14. Jahrhundert an.

[1] So heisst die Abhandlung z. B. im Cod. Ampl. Q. 366[1]: *Canones de sinibus, arcubus et cordis et aliis bonis* Johannis de Lineriis.

[2] Dieselbe Abhandlung findet sich auch im Cod. Ampl. Q. 366[5] unter den Titel: *Canones tabularum magistri* Johannis de Lyneriis. Dort heisst die Kirche, deren Decan Robertus de Bardis ist, jedoch »Glasquensis ecclesie«. Die Handschrift ist aus der Mitte des 14. Jahrh. ebenso wie Q. 349.

8. Über den Dominicus Parisiensis der "Geometria Culmensis".

In der *Geometria Culmensis*[1] wird ein gewisser DOMINICUS PARISIENSIS erwähnt und, wie der Herausgeber nachgewiesen hat, recht ausgiebig benutzt. Herr MENDTHAL bemerkt von ihm:[2] »Näheres scheint über ihn nicht bekannt zu sein». Meine Studien haben mir wenigstens in etwas den Schleier lüften lassen, welcher über dieser Persönlichkeit ruhete, und bin ich soeben im Begriffe sein Hauptwerk, die *Practica geometriae demonstrativa* in 3 Büchern zur Herausgabe vorzubereiten.

In einer Handschrift dieser *Practica geometriae* heisst es nämlich: »Explicit practica Geometriae magistri DOMINICI DE CLAVASIO astrologi cuiusdam regis Franciae». Da *Clavasium,* die heute *Chivasso* genannte Stadt in Piemont nordöstlich von Turin und direct südlich von Ivrea in der Nähe des Po gelegen ist, so dürfte DOMINICUS wohl aus dieser Stadt stammen, also ein Italiener sein, der später in Paris in die Dienste des Königs von Frankreich als Hofastrolog trat. Die fragliche Handschrift datiert von 1377, eine andere in Prag geschrieben von 1368, jedenfalls lebte also DOMINICUS vor 1368. Aus dem Inhalte der *Practica Geometriae,* in welcher die Perspective des WITELO erwähnt wird, welche am Ende des 13. Jahrhunderts geschrieben ist, und in welcher die Kenntnis des Verfassers mit Tangens und Cotangens *(Umbra recta* und *versa),* Sinus, Sinus versus, Complementum sinus versus, d. h. Cosinus hervorgeht, kann man ihn auch nicht in ein früheres als das 14. Jahrhundert setzen; er dürfte also ein Zeitgenosse des NICOLE ORESME gewesen sein.[3]

Einer freundlichen Mittheilung des Herrn Dr. PERLBACH in Halle entnehme ich noch folgende bestätigende Notizen. 1. Nach BULAEUS, *Historia universitatis Parisiensis* T. IV (1668), p. 945 war DOMINICUS DE CLAVASIO *olim bursarius collegii Constantinopolitani, deinde eiusdem primarius,* er hat also seine Studien zu Paris getrieben. 2. Nach dem *Chartularium universitatis Parisiensis edd.* DENIFLE *et* CHATELAIN T. II Sectio I (1891), p. 634 heisst es in dem *Rotulus univers. Parisiensis 1349 Mai 22 Avenione* unter *Provincia Bituricensis* (Zur Natio Gallicana gehörig) an 3. Stelle: M. DOMINICUS DE MARTINACIO DE CLAVAXIO, *clerico Yporegiensis dyocesis [de canonicatu S. Johannis in Leodio sc. provideatur a papa].* Ebendaselbst T. III, p. 45: 1356, Ian. 25 Paris wird unter den Magistern der *medicinischen* Fakultät aufgezählt: DOMINICUS DE CLAVASIO, und p. 48: 1357, Nov. 25 ebenfalls unter den Magistern der medicinischen Fakultät: DOMINICUS DE CLAVAXIO. Im *Auctarium*

universitatis Parisiensis edd. DENIFLE *et* CHATELAIN (1894) heisst es p. 138: 1349 zwischen Juni 2. und Juli 17.: *incepit in artibus dns* THEMO IUEDE *de Monasterio sub Magistro* DOMINICO DE CLAVAGIO, und p. 141: 1350 zwischen Febr. 16. und März 19.: *Dns* NYCHOLAUS *dictus* ROEDE *licenciatus fuit sub m.* DOMINICO. Daraus folgt also, dass DOMINICUS DE CLAVASIO wirklich aus Chivasso stammte, und dass er 1349—1350 als Magister der Artistenfakultät, 1356 und 1357 aber der medicinischen Fakultät zu Paris angehörte.

Ausser der *Practica geometriae* ist in einer Handschrift noch vorhanden eine Abhandlung *Lectiones de sphaera* zusammen mit einer ganzen Sammlung von Oresmischen Schriften,[4] und waren noch zu MONTFAUCON's Zeiten *Questiones de Perspectiva* erhalten, welche jedoch in der später dem Fürsten BONCOMPAGNI gehörenden Handschrift sich nicht mehr vorfanden.[5] DOMINICUS selbst beabsichtigte nach einer Bemerkung der *Practica geometriae* eine Schrift: *Tractatus de umbris et radiis*, welche sich mit Trigonometrie beschäftigen sollte, zu verfassen,[6] ob diese Absicht zur Ausführung gekommen ist, ist nicht bekannt.

Die *Practica geometriae* zeigt DOMINICUS als einen vortrefflichen Mathematiker, der für seine Zeit bemerkenswerthe Kenntnisse entwickelt. Er kennt genau EUKLID, PTOLOMEUS, WITELO und beweist das, was er als praktische Regeln aufstellt, in strenger Weise.

Nach vier einleitenden arithmetischen Sätzen und der Beschreibung des *Instrumentum Gnomonicum*, d. i. des *Quadratum Geometricum* GERBERTS, werden in 35 Paragraphen des ersten Buches der Reihe nach Längen-, Höhen- und Tiefenmessungen gelehrt. Es finden sich hier neben den Heronisch-Gebertschen Methoden auch die der späteren Zeit, speciell mit Astrolab und Quadrant. Das zweite Buch lehrt ebenso in 27 Paragraphen, denen wieder einige Erklärungen vorausgehen, Flächenberechnungen, auch die der Oberflächen der stereometrischen Körper. Hier sagt DOMINICUS ausdrücklich, das Verhältnis $3\frac{1}{7}$ zwischen Durchmesser und Umfang sei nicht genau, sondern es schliesse nur einen *error sensibilis* aus.[7] Hier könne er demnach seine Vorschriften nicht beweisen, sondern man müsse sie ihm auf Treu und Glauben hinnehmen. Jedenfalls würde ein nur unmerklicher Fehler begangen. Ähnliche Bemerkungen enthält das dritte Buch, das sich in 17 Paragraphen mit den entsprechenden Berechnungen des Körperinhaltes beschäftigt, in Bezug auf die runden Körper.

Die Herausgabe der *Practica geometriae* dürfte erweisen, dass DOMINICUS DE CLAVASIO ein würdiger Zeitgenosse des

NICOLE ORESME gewesen ist, und speciell seine grossen Verdienste um die Feldmesskunst hervortreten lassen.

[1] *Geometria Culmensis. Ein agronomischer Tractat aus der Zeit des Hochmeisters* CONRAD VON JUNGINGEN (1393—1407). *Herausgegeben von Dr.* H. MENDTHAL. Leipzig 1886.

[2] A. a. O., S. 6 Anmerkung.

[3] Die mir bekannten Handschriften der *Practica geometriae* sind folgende: 1. Codex Amplonianus Q. 352[19] geschrieben von CONRADUS DE BREITSCHEDE Pragae a. D. 1368; 2. Codex Amplonianus F. 395[36] geschrieben im Jahre 1373 in England; 3. Codex Amplonianus F. 37[2] geschrieben 1377 von Magister JOHANNES DE WASIA in Holland; 4. Codex Amplonianus F. 393[4] am Ende des XIV. Jahrh. geschrieben. In ihr heisst die Schrift: *practica geometriae Euclidis ordinata per reverendum magistrum, magistrum* DOMINICUM DE CLAVASIO, dadurch bezeugend, dass der Verfasser Geistlicher gewesen ist; 5. Codex latinus Monacensis 14908 geschrieben 1446 von *Frater* FRIDERICUS im Kloster Sti. Emmerami zu Regensburg; 6. Cod. lat. Monac. 410[2] im XVI. Jahrhundert geschrieben; 7. Codex Matritensis Aa. 30 im XV. Jahrhundert in Italien geschrieben; endlich Codex h 586 (alte Signatur DD III 24) Blatt 170—188 der Universitätsbibliothek zu Krakau. Hier heisst es: *Practica Geometriae* DOMINICI DE CLAVASIO *edita Parisius*(!) 1346, damit das Datum der Schrift festlegend. Damit stimmt ein nach HEILBRONNER, *Hist. math.* S. 618 in der Bodlejana zu Oxford befindliches Manuscript, welches DOMINICI DE MASCIARIO *Geometria Practica completa anno 1346* angiebt. Hier dürfte nämlich de MASCIARIO nichts anderes sein als eine falsche Lesart für DE MARTINACIO, wie es nach DENIFLE heissen müsste. N° 1—4 und 7 sind Pergament-, die drei anderen Papierhandschriften. Wir sehen, dass die Schrift weite Verbreitung gefunden hatte. Ich darf wohl auch an dieser Stelle meine anderswo ausgesprochene Bitte wiederholen, mir über weitere Handschriften, sowie über sonstige Lebensumstände der Verfassers, über welchen alle mir zugänglichen litterarischen Quellen versagen, gütigst Mittheilung zukommen zu lassen.

[4] Codex Amplonianus Q. 299[3]: »Expliciunt questiones supra tractatum de spera lecte a magistro DOMINICO dicto DE CLAVAGIO». Die in dieser Handschrift unter 1, 2, 4, 5 verzeichneten Schriften gehören NICOLE ORESME an. Auch sie sind bis jetzt unbekannt geblieben.

[5] M. s. Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **7**, 1874, S. 349—350: *Tractatus optici: Questiones Magistri* DE CLAVASIO *super Perspectiva,* und *Catalogo di manoscritti* ecc. *compilato da* ENRICO NARDUCCI, S. 144—145.

[6] *Practica Geometriae, liber I, Conclusio XV:* »Sed de isto fiet specialis tractatus, scilicet de umbris et radiis, quia multa possunt haberi per radios et umbras, quae cum difficultate acquiruntur per alia instrumenta astrolabica«. Vorher ist die Rede von *Umbra recta* und *Umbra versa,* von *Sinus rectus* und *Sinus versus* und *Residuum sinus versi,* also von Tangens, Cotangens, Sinus, Sinus versus, Cosinus.

[7] *Practica geometriae, liber II, Circulum quid nominis:* »Quia circumferentiae ad dymetrum non est aliqua certa proporcio demonstrata, ideo quando loquitur de numeracione circuli cum quadrato, non intendo demonstrative loqui, sed solum docere invenire arcum ita, quod error sensibilis non relinquatur«. Vrgl. auch den Schluss des *liber II:* »Istae conclusiones, quae sunt a decima nona usque ad praesentem conclusionem non sunt demonstratae, sed si opereris, ut docent, non multum relinqueretur erroris sensibilis«. Bei allen handelt es sich um Kreisflächen und Oberflächen von Kugeln, Cylindern und Kegeln. Ebenso heisst es im *liber III, Concl. VII:* »Sicut quadrati ad circulum nondum est aliqua certa proporcio demonstrata, sic nec eciam sphaerae ad corpus rectilineum. Sed in istis sufficit habere ita prope, quod non relinquitur error sensibilis«.

9. Alte Scherzaufgaben in deutscher Sprache.

Aus Cod. lat. Monac. 14908 setze ich hier noch einige Scherzaufgaben her, z. Th. an die früher mitgetheilten anklingend.

[*F. 125*] *Von dreyen Dingen.*

I. Item 3 gesellen haben 3 ding. Nu wiltu wissen, welcher daz oder daz hab. So gib ainem ding dy zal 1, und dem andern 2, dem dritten 3. [*F. 125'*] Darnach sprich zw it ainen, czu welchen du wild: duplir dy zal deines dings, vnd der merck gar wol. darnach sprich zu dem andern: multiplicir dy zal deins dings mit 9, den merck auch. darnach sprich zw dem dritten: multiplicir dy zal deins dings mit 10. darnach haysz dy drey sumen zesam thun, vnd waz dann komen ist, daz subtrahir ab 60, vnd waz do pleibt, daz merk vnd lueg, wie oft du 8 dauon magstu subtrahiren; vnd magstu 1 mal, so hat der,

der sein hat duplirt, daz ding, dem du 1 hast geben; magstu aber zwir, so hat er daz ding, dem du 2 hast geben, dezgleichen mit 3, vnd waz dann pleibt, wenn du 8 davon zeuchst, daz mustu auch merken. Wann pleibt 1 vber, so hat der, der sein ding mit 9 multiplicirt, daz ding mit 1; pleibt 2, so hat er daz ding mit 2, dezgleichen mit 3, vnd wenn man dy czwen waysz, so ist der dritt auch bekannt. [*F. 126*]

II. Item nym dir ein zal fur, wie vil du wild, so wil ichsz wissen. Sprich also zu ym: duplir dy zal, darnach haysz yn addiren 5, darnach haysz in multiplicirn mit 5, darnach haysz yn addiren 10, darnach multipliciren mit 10, vnd wenn nu daz geschehen ist und gemacht ist, so nym von der ganczen zal 350, vnd was vbrig pleibt, daz tail in 100, so kumpt dy summa.

350 { duplir —— zal
Addir
Multiplicir > 5
Addir
Multiplicir > 10

Du fragst, warvmb sol man dy zall 350 subtrahiren und kayne andre nit. Wiltu daz wissen, so nym dy clainsten zal fur dich, das ist 1. Nu duplir vnd machs nach der regel, so kumpt 450. Nu zeuch von der zal ein zal daz denn noch 100 pleibt, daz ist 350, et ideo.

Wurfel.

III. Nota des gleichen, wenn ir 3 mit einem wurfel werfen, und wild wissen, wie vil ydlicher hat geworffen, sprich zu dem ersten: duplir dy zal deiner augen, dy du geworffen hast. darnach haysz yn addirn 5 vnd multiplicirn mit 5. Darnach sprich zu dem andern, daz er addir sein augen, darnach haysz in addiren 10 vnd multiplicirn mit 10. Darnach sprich zu dem driten, dasz er [*F. 126'*] addir auch sein augen. Darnach nym von der summ 350, vnd waz do pleibt an der ersten stat an der linken hannd, daz hat der erst geworffen.

Du fragst war vmb sol man dy zal 350 subtrahiren etc. Nym dy clainsten zal für dich, daz ist 1 vnd aber 1; machs nach der regel, komen 461, davon mag man kain zal abzychen, daz 1 vnd 1 vnd 1 pleibt, dann 350.

Fingerlein.

IV. Item einer hat ein fingerlein an dem finger. Nu wiltu wyssen, welche person daz fingerlein hab, vnd an welchen

finger, vnd an welchen glid. Machs also. Sprich daz ayner unter in zel, vnd haysz in an heben an den ersten, vnd haysz in zelen vnz auf den, der daz fingerlein hat. Darnach haysz in dupliren dy selben zal, darnach haysz in addiren 5, darnach multipliciren mit 5, darnach haysz in addiren den finger, vnd sol an heben zu zelen von dem clainsten finger der rechten hand, darnach haysz in o fur die zal seczen, daz ist, haysz in dy zal multipliciren mit 10, vnd darnach haysz yn addiren das glid, vnd wenn daz geschehen ist, so subtrahir von der [*F. 127*] gemachten zal 250, vnd waz do pleibt, zaigt dir dain mainung. wann dy erst zal gegen der lincken hant bedeut dy person, dy ander zal den finger, dy drit zal daz glid; doch ye merck, wenn dy ander zal wirt o, so nym al mol 1 von der driten figur, vnd addirsz zw o, wirt der 10 finger, vnd dann pleibt darnach bedeut dy person.

Du fragst, war vmb sol man do subtrahirn 250, vnd hat vor subtrahirt 350? Wil du daz wissen, so nym dy clainsten zal, daz ist 1 man 1 finger 1 glid. Nu machsz nach der regel, kumpt 361; darvon musz man subtrahiren *1* zal, daz 1 . 1 . 1 pleibt, vnd daz ist kaine dann 250.

	4 man	7 finger	2 glid
250		duplir	—— zal
		addir	> 5
		multiplicir	
		addir	—— finger
		multiplicir	10
		addir	—— glid.

N° I ist absolut mit N° IX und XIX im Abschnitte 6 identisch, die letzte eine Erweiterung der N° XXV. Heisst bei N° II die zu suchende Zal x, so lässt unser Verfasser Folgendes ausführen:

$$x = \frac{[(2x+5)5+10]\,10-350}{100},$$

was eine identische Gleichung ist. In N° III mögen die drei geworfenen Zahlen, jede ist kleiner oder höchstens gleich 6, x, y, z sein, dann bildet der Verfasser

$$[(2x+5)5+y+10]\,10+z-350 = 100x+10y+z$$

und hat also in den drei Ziffern der Zal die geworfenen Augen. N° IV ist dem Wesen nach mit dem vorhergehenden identisch,

nur ist hier die Addition von 10 unterlassen, weshalb nicht 350, sondern nur 250 abzuziehen ist. Da hier auch der 10. Finger vorkommen kann, so wird sich das dadurch kundgeben, dass die vorletzte Ziffer eine Null ist. Das Beispiel gibt der Reihe nach die Zahlen 8, 13, 65, 720, 722, 472, wie es sein muss.

10. Zur Geschichte der Progressionen im Mittelalter.

Ich schliesse diese zweite Serie dieser Miscellen mit einem Abschnitt aus derselben Handschrift Cod. lat. Monac. 14908.

[*F. 29.*] *Progressio.*

Addir albeg zesam daz erst vnd das leczt, vnd daz selb multiplicir mit dem halben der zal der posicionum. *Exemplum* 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10. Addirt 1 zw 10, wirt 11; daz multiplicir mit 5, facit 55. Item: 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11. Addir 1 ad 11, erit 12; multiplica per $5\frac{1}{2}$ facit 66. Item: 3.5.7.9.11.13.15 faciunt 63. Item in fractis: $\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{2}$. $2\frac{1}{2}$. $3\frac{1}{2}$. $4\frac{1}{2}$. $5\frac{1}{2}$. $6\frac{1}{2}$. $7\frac{1}{2}$. Adde primum et ultimum, facit 8; hoc multiplica per medietatem istius numeri, hoc est 4, facit 32.

Item wiltu wissen dy zal des ritschendes, so duplir dy leczten zal, vnd von dem, daz do kumpt, subtrahir dy erst zal. *Exemplum* 1.2.4.8.16.32. facit 63.

Item wirt dy progressio tripla, so diuidir dy leczt zal mit 2, vnd addir zwm quocient dy leczt zal. *Exemplum* 1.3.9.27.81.243. facit 364. [*F. 29'*]. Item wirt dy progressio quadrupla, so diuidir dy leczt mit 3, vnd addir zum quocient dy leczt zal. Item wirt sy quintupla, so diuidir dy leczt mit 4 vnd addir dy leczt zal etc.

Exempla quere, reverte 10 folia.

[*F. 40*] Item einer hat 1 kue verkaufft nach den cloen, der sein 16. Und hat geben dy erst vmb 1 haller, dy ander vmb 2, dy drit vmb 4, dy viert umb 8 etc. ritschando. Nu ist dy frag, wye kumpt dy kue? Machs nach der regul progressionis. Facit 65535 haller, daz ist 54 ℔ Regensb. und 49 gl.

Item einer hat 1 pferd verkauft, nach den neglein, daz sein 32, vnd hat geben den ersten nagel pro 1 haller, den ander pro 2, den driten pro 4 etc. sic progressione ritschando. Facit 4294967295 haller, daz macht 3579139 ℔ Regensb. vnd 33 gl.

Nota. Ein kunig hat verseczt das pehemlandt, vnd hat daz verseczt nach dem schachpret, daz helt 64 feld; vnd hat daz geben nach dem ersten feld vmb 1 haller, vnd den ander

vmb 2 hall., den drit vmb 4 eciam progressione etc. ritschando. Queritur iterum. Facit 18446744073709551615 haller, facit 15372286728091293 ℔ Regensp. vnd 15 gl. Daz mecht kain kayser bezalen.

Der Verfasser rechnet bei der arithmetischen Progression also stets nach der Formel $s = (a + z)\frac{n}{2}$, auch wenn n ungerade ist, und kennt auch Progressionen mit Brüchen.

Bei der geometrischen Progression, welche er wunderlich *ritschando* nennt, benutzt er die Formel, welche bei PROSDOCIMO DEI BELDAMANDI nachgewiesen ist: $s = \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1} + q^{n-1}$. In den drei Beispielen auf Bltt 40, ist 1 ℔ Regenspurg. = 80 gl. und 1 gl. = 15 haller gerechnet worden. Es ist nicht ohne Interesse der Schachaufgabe in so eigenthümlich abgeänderte Gestalt zu begegnen. Dass sie in der gewöhnlichen Art auch bekannt war, hat CANTOR nachgewiesen.

RECENSIONEN. — ANALYSES.

H. G. Zeuthen. GESCHICHTE DER MATHEMATIK IM ALTERTUM UND MITTELALTER. VORLESUNGEN. Kjöbenhavn, Höst 1896. 8°, (4) + VII + 342 + (2) p.

Dans la Bibliotheca Mathematica 1893, p. 115—116 nous rendions compte des leçons sur l'histoire des mathématiques dans l'antiquité et au moyen âge, que M. ZEUTHEN venait de publier alors en danois, et nous exprimions en même temps le désir, que ces leçons fussent traduites bientôt en une langue plus répandue. Maintenant nos voeux sont comblés par l'ouvrage cité ci-dessus, qui contient essentiellement une traduction en allemand, par la main de M. R. FISCHER-BENZON, des leçons publiées il y a deux ans en danois. Comme le fait remarquer l'auteur lui-même dans la préface, les changements peu nombreux consistent principalement en ce que M. ZEUTHEN a utilisé les investigations récentes sur l'âge où vivait HERON, et les *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne* de M. PAUL TANNERY.

Dans l'analyse citée ci-dessus nous avons mentionné que l'ouvrage de M. ZEUTHEN contient peu de notices biographiques. Sans doute de telles notices sont en général d'une valeur secondaire pour l'intelligence des progrès des mathématiques, mais d'autre part elles peuvent parfois être très utiles pour les étudiants qui doivent imprimer dans la mémoire la marche des découvertes mathématiques. A ce point de vue, il nous semble d'un certain intérêt d'indiquer, si possible, les années de naissance et de mort des mathématiciens, ainsi que les dates de leurs principaux ouvrages. Cependant, des indications de cette nature manquent souvent dans les leçons de M. ZEUTHEN. Ainsi, la seule indication biographique qu'il nous donne sur NICOLE ORESME, est renfermée dans les mots suivants: »Da haben wir denn aus dem 14-ten Jahrhundert zwei Arbeiten des Franzosen NICOLE ORESME zu nennen» (p. 324); de même, pour ce qui concerne CHUQUET, il nous dit seulement que ce mathématicien distingué vivait 100 ans après ORESME (p. 325) et était contemporain de PACIUOLO (p. 328). Heureusement, nous possédons déjà un petit écrit contenant précisément ce qui manque à l'ouvrage de M. ZEUTHEN, savoir les *Zeittafeln zur Geschichte der Mathematik, Physik und Astronomie bis zum Jahre 1500, mit Hinweis auf die Quellen-Literatur* (Leipzig 1892) par M. F. MÜLLER, et nous nous permettons de recommander aux étudiants cet écrit comme complément à l'important ouvrage de M. ZEUTHEN.

A la fin de la traduction, on trouve une table alphabétique des noms et des matières. Il aurait été à désirer qu'on y eût réuni sous un même titre tous les renvois se rapportant au même sujet. Maintenant on trouve p. ex. dans la table les deux titres »Äste der Hyperbel» (p. 334) et »Hyperbeläste» (p. 337), avec le renvoi aux pages 200, 208, 211 au premier endroit, et aux pages 209, 211, 213 au second endroit.

Stockholm. G. Eneström.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von || journal d'histoire des mathématiques publié par G. Eneström. Stockholm. 8°.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von M. Cantor. Leipzig. 8°.
40 (1895): 5.

Alcaine, J. E., La operación geodésica de Eratóstenes.
San Salvador, Sociedad de ingenieria, Revista matematica **1**, 1895, 10—13.

Aubry, A., Notice historique sur la sommation des progressions géométriques décroissantes.
Journ. de mathém. élément. 3_4, 1894, 49—53.

Ball, W. W. R., A primer of the history of mathematics. London, Macmillan 1895.
8°, IV + 146 p. — [2 sh.]

°**Bode, P.**, Die Alhazen'sche Spiegel-Aufgabe in ihrer historischen Entwickelung nebst einer analytischen Lösung des verallgemeinerten Problems. Frankfurt am Main 1893.
8°, 50 p.

Boncompagni, B., Intorno alle lettere edite ed inedite di Alessio Claudio Clairaut.
Roma, Accad. d. Nuovi Lincei **45** (1892), 1894, 157—291.

Braunmühl, A. von, Der Unterricht in der Geschichte der Mathematik an der k. technischen Hochschule zu München.
Biblioth. Mathem. 1895, 89—90.

Brioschi, F., Notice sur Cayley.
Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{19}_2$, 1895, 189—200. — Extraite des A t t i d e l l a r e a l e a c c a d e m i a d e i L i n c e i.

Curtze, M., Mathematisch-historische Miscellen.
Biblioth. Mathem. 1895, 77—88.

Curtze, M., Anonyme Abhandlung über das Quadratum Geometricum.
Zeitschr. für Mathem. **40**, 1895; Hist. Abth. 161—165 + 1 pl.

°**Fink, K.**, Lazare-Nicolas-Marguerite Carnot, sein Leben und sein Wirken nach den Quellen dargestellt. Tübingen, Laupp 1894.
8°, 128 p. — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **40**, 1895; Hist. Abth. 139. (CANTOR.)

Fink, K., Dupin.
Corresp.-Bl. f. d. Gel. u. Realsch. in Württemberg 1893, 1—27.

Fiorini, M., Erd- und Himmelsgloben, ihre Geschichte und Konstruktion. Nach dem Italienischen frei bearbeitet von S. GÜNTHER. Leipzig, Teubner 1895.
8°, V + 137 + (1) p. — [4 Mk.]

Galli, I., Elogio del principe Don Baldassarre Boncompagni.
Roma, Accad. d. Nuovi Lincei, Atti **47**, 1895, 161—186.

°**Hoefer, F.**, Histoire des mathématiques depuis leur origine jusqu'au commencement du 19e siècle. 4e édition. Paris 1895.
8°, 3 + 609 p. — [5 fr.]

Hultsch, F., Die Elemente der ägyptischen Theilungsrechnung. Erste Abhandlung.
Leipzig, Sächsische Gesellsch. d. Wissensch., Abhandlungen (Phil.-hist. Cl.) **17**, 1895. 192 p.

°**Huygens, Chr.**, Oeuvres complètes publiées par la société hollandaise des sciences. Tome sixième. Correspondance 1666—1669. La Haye, Nijhoff 1895.
4°.

Kelvin, W., Isoperimetric problems.
Nature (London) **49**, 1894, 515—518. — Note historique.

Kitao, D., Eine Methode, mittelst zweier rechtwinkligen Lineale Cubikwurzeln zu finden.
Tokio, Sugaku butsurigaku kwai, Kiji **5**, 1894, 175—176. — Notice sur une méthode utilisée par les menuisiers en Japon et concordant essentiellement avec la méthode de PLATON pour construire deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données.

Klein, F., Riemann und seine Bedeutung für die Entwickelung der modernen Mathematik.
Tageblatt der Vers. deutscher Naturf. und Ärzte in Wien 1894, 212—221.

Korteweg, D. J., Over de Rodenberg'sche modellen van kubische oppervlakken met historische inleiding.
Amsterdam, Wisk. Genoots., Nieuw Archief **20**, 1893, 63—96.

Mansion, P., Sur l'enseignement élémentaire de l'algèbre en 1676 d'après l'Euclide de Henrion.
Bruxelles, Société scientifique, Annales **19**: 1, 1895, 101—105.

Martin, A., Historical note on an easy proof of the Pythagorean proposition.
Mathematical magazine **2**, 1892, 97.

°**Mauss, C.**, Le rectangle de Khorsabad et la théorie générale des mesures antiques. Paris, Fleury 1894.
8°, 22 p.

Meyer, F., Rapporto sullo stato presente della teoria degli invarianti. Traduzione dal tedesco di G. Vivanti.
Giornale di matem. **32**, 1894, 319—347.

Nöther, M., Arthur Cayley.
Mathem. Ann. **46**, 1895, 462—480. — Nécrologie.

°**Rudel, K.**, Georg Philipp Harsdörfer als mathematischer und naturphilosophischer Schriftsteller. Nürnberg 1894.
8°, 103 p. — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **40**, 1895; Hist. Abth. 136—137. (Cantor.)

Tannery, P., Pascal et Lalouvère. Seconde note.
Bordeaux, Soc. d. sc., Mémoires 4_4, 1894, 251—259.

Valentin, G., Die Frauen in den exakten Wissenschaften.
Biblioth. Mathem. 1895, 65—76.

Wolf, R., Einige neue Beiträge zur Biographie von Joost Bürgi und zur Geschichte des Planimeters.
Zürich, Naturforsch. Gesellsch., Vierteljahrsschr. **38**, 1893, 1—9.

Zeuthen, H. G., Notes sur l'histoire des mathématiques. V. Sur le fondement mathématique de l'invention du calcul infinitésimal. VI. Sur quelques critiques faites de nos jours à Newton.
Kjöbenhavn, Vidensk. Selskab, Oversigt 1895, 193—278.

Zeuthen, H. G., Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter. Vorlesungen. Kjöbenhavn, Höst 1896.
8°, (4) + VII + 342 + (2) p. — [6 Mk.] — Traduit du danois par R. Fischer-Benzon.

Question 52 [sur un ouvrage du mathématicien J. de Billy].
Biblioth. Mathem. 1895, 96. (G. Eneström.)

Becker, H., Die geometrische Entwickelung des Infinitesimalbegriffs im Exhaustionsbeweis bei Archimed und ihre Bedeutung für die Differentialgeometrie und die Schule. Insterburg 1894. 4°.
Zeitschr. für Mathem. **40**, 1895; Hist. Abth. 54—55. (Cantor.)

Bierens de Haan, D., Bouwstoffen voor de geschiedenis der wis- en natuurkundige wetenschappen in de Nederlanden. XXXIII. (Verhandl. der Akad. van Wetensch. te Amsterdam **2**, 1893).
Zeitschr. für Mathem. **40**, 1895; Hist. Abth. 56—57. (Cantor.)

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Dritter Band. Vom Jahre 1668 bis zum Jahre 1759. Erste Abtheilung. Die Zeit von 1668 bis 1699. Leipzig, Teubner 1894. 8°.
Blätter f. d. Gymnasialschulw. **31**, 1895, 611—615. (S. Günther.)

Descartes, R., Die Geometrie. Deutsch herausgegeben von L. Schlesinger. Berlin, Mayer & Müller 1894. 8°.
Zeitschr. für Mathem. **40**, 1895; Hist. Abth. 57—58. (Cantor.)

EUCLIDIS Opera omnia. Ediderunt J. L. HEIBERG et H. MENGE. Vol. VII. EUCLIDIS Optica, Opticorum recensio THEONIS, Catoptrica, cum scholiis antiquis. Edidit J. L. HEIBERG. Leipzig, Teubner 1895. 8°.
Mathesis 5_2, 1895, 254—255. (P. M.)

FERMAT, P. DE, Oeuvres. Publiées par les soins de P. TANNERY et CH. HENRY sous les auspices du ministère de l'instruction publique. Tome second. Correspondance de FERMAT. Paris 1894. 4°.
Zeitschr. für Mathem. **40**, 1895; Hist. Abth. 140—142. (CANTOR.)

GÜNTHER, S., Abriss der Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften im Alterthum. Zweite Auflage. (Handbuch der klassischen Alterthumswissenschaft **5**: 1. München 1893.)
Zeitschr. für Mathem. **40**, 1895; Hist. Abth. 53. (CANTOR.)

HERON D'ALEXANDRIE, Les mécaniques ou l'élévateur publiées pour la première fois sur la version arabe de Qosiâ ibn Lûqâ et traduites en français par CARRA DE VAUX. Paris 1894. 8°.
Zeitschr. für Mathem. **40**, 1895; Hist. Abth. 55—56. (CANTOR.)

HIPPARCHUS BITHYNUS, In Arati et Eudoxi Phaenomena commentariorum libri tres. Ad codicum fidem recensuit et germanica interpretatione instruxit C. MANITIUS. Leipzig 1894. 8°.
Zeitschr. für Mathem. **40**, 1895; Hist. Abth. 130. (CANTOR.)

JAMBLICHUS, In Nicomachi arithmeticam introductionis liber. Ad fidem codicis florentini edidit H. PISTELLI. Leipzig, Teubner 1894. 8°.
Zeitschr. für Mathem. **40**, 1895; Hist. Abth. 132. (CANTOR.)

KORTEWEG, D. J., Het bloeitijdperk der wiskundige wetenschappen in Nederland. Redevoering uitgesproken op den Jaardag der Amsterdamsche Universiteit den 8sten januari 1894. 8°.
Zeitschr. für Mathem. **40**, 1895; Hist. Abth. 53—54. (CANTOR.)

SILBERBERG, M., Sefer ha-Mispar. Das Buch der Zahl. Ein hebräisch-arithmetisches Werk des R. Abraham ibn Esra (XII. Jahrhundert). Zum ersten Male herausgegeben, ins Deutsche übersetzt und erläutert. Frankfurt a. M., Kauffmann 1895. 8°.
Biblioth. Mathem. 1895, 91—92. (M. STEINSCHNEIDER.)

STÄCKEL, P. und ENGEL, F., Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss. Eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der Nicht-Euklidischen Geometrie. Leipzig 1895. 8°.
Science (New York) 2_2, 1895, 308—309. (G. B. HALSTED.) — Mathesis 5_2, 1895, 255. (P. M.)

[Listes d'ouvrages récemment publiés.]
Biblioth. Mathem. 1895, 92—96. — Zeitschr. für Mathem. **40**, 1895; Hist. Abth. 199—200,

---

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

53. Desargues a publiè en 1636 une brochure avec le titre: *Exemple de l'une des manières universelles du S. G. D. L. touchant la pratique de la perspective sans emploier aucun tiers point de distance n'y d'autre nature, qui soit hors du champ de l'ouvrage* (in-folio, 12 pages + 2 planches), qui a été jugée introuvable jusqu'à nos jours (voir p. ex. Hoefer, *Histoire des mathématiques,* Paris 1874, p. 437). Un exemplaire de cette brochure a été trouvé par moi en 1885 dans la bibliothèque de la »Scuola d'applicazione per gl'ingegneri» à Roma (voir Biblioth. Mathem. 1885, 89—90), et quelques ans plus tard un autre exemplaire en fut découvert par M. Paul Tannery dans la Bibliothèque nationale à Paris (voir Bullet. d. sc. mathém. **14**$_2$, 1890, 248—250; cfr. Biblioth. Mathem. 1891, 30).

Est-ce qu'on connaît actuellement quelques autres exemplaires de cette brochure? (G. Eneström.)

54. La signification du mot *mukabula,* dont se servirent les algébristes arabes, a été l'objet de recherches à peu près simultanées par Chasles (*Histoire de l'algèbre. Deuxième partie;* Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **13**, 1841, p. 610—611) et Nesselmann (*Die Algebra der Griechen,* Berlin 1842, p. 48—50), qui ont conclu que ce mot, dont la traduction latine au moyen âge était *oppositio,* se rapporte à la réduction par soustraction de deux termes semblables placés dans différents membres d'une équation; cette conclusion semble aussi généralement admise de nos jours. Cependant Chasles a fait remarquer lui-même, que le mot *oppositio* doit avoir eu parfois un autre sens, et d'autre part on sait qu'Alkarchi entend par *mukabala* la résolution définitive d'une équation (voir p. ex. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* I (2[e] édition), p. 724—725).

Est-il vraisemblable que le mot *mukabala* ait eu chez les arabes un sens plus étendu que celui indiqué ci-dessus, et, en cas affirmatif, quel est ce sens? (G. Eneström.)

55. Le mathématicien français De la Roche, auquel on doit un traité d'arithmétique paru en 1520 sous le titre *Larismetique nouellement composee,* cite parmi les auteurs qu'il a utilisés, un certain Filippo Friscobaldi de Florence (comparez Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik,* tome 2 [1892], p. 342).

Est-ce que quelque écrit de Friscobaldi a été gardé jusqu'à nos jours? (G. Eneström.)

Index.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT	JOURNAL
FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK	D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES
HERAUSGEGEBEN VON	PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1896.

NEUE FOLGE 10. NOUVELLE SÉRIE 10.

STOCKHOLM
G. ENESTRÖM.
BRAHEGATAN 43.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
PRINZ LOUIS FERDINANDSTR. 2.

PARIS
A. HERMANN.
RUE DE LA SORBONNE 8.

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM, 1896.

Inhalt. — Table des matières.



BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK | JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES



HERAUSGEGEBEN VON | PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1896. STOCKHOLM. N° 1.

NEUE FOLGE. 10. | NOUVELLE SÉRIE. 10.

BERLIN. MAYER & MÜLLER. Markgrafenstrasse 51.

Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr.

PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Zur Geschichte der Übersetzungen der Elementa im Mittelalter.

Von MAXIMILIAN CURTZE in Thorn.

In der Abhandlung: *Beiträge zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter* (Zeitschr. für Mathem. **35**, 1890; Hist. Abtheilung S. 86—98) hat HEIBERG aus Handschriften in München und Bamberg und unter Zuhilfenahme der LACHMANN'schen Ausgabe der *Gromatici veteres* das zusammengestellt, was von einer alten, aus dem griechischen geflossenen Übersetzung des EUKLID sich noch hat auffinden lassen. Dieses Fragment umfasst Stücke aus dem 1. bis zum 4. Buche. Dass es noch aus dem 5. Buche ähnliche Fragmente, die 18 Definitionen umfassend, giebt, habe ich das Vergnügen aus drei Handschriften, von denen zwei der Münchener Hof- und Staatsbibliothek angehören, die dritte in der Kaiserlichen Hofbibliothek zu Wien sich befindet, hierdurch bekannt zu geben.

Die Handschrift, aus welcher ich den Abdruck bewirke, hat die Bezeichnung Cod. lat. Monac. 13084². Sie enthält als zweiten Bestandtheil eine eigenthümliche in 34 Capitel gegliederte Zusammenstellung von gromatischen Dingen. In anderer Anordnung und unvollständig findet sich dieselbe Compilation im Cod. lat. Monac. 14836.[1] Der Cod. lat. Monac. 13084² ist in der charakteristischen Schrift des X. Jahrhunderts geschrieben.[2] Das uns hier interessirende Capitel XVII (Blatt 54 und 54')

hat nun folgenden Wortlaut. Der Text ist fortlaufend geschrieben, die Ordnungszahlen habe ich eingefügt, wie sie dem griechischen Texte in der Ausgabe HEIBERGS entsprechen.

[1] Über diese Handschrift sehe man meinen Aufsatz *Die Handschrift No. 14836 der königl. Hof- und Staatsbibliothek zu München* in den Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik 7, 1895, S. 75—142.

[2] Der erste Bestandtheil des fraglichen Mscpts ist die Rhetorik des ALCUIN, im IX. Jahrhundert geschrieben, ein dritter Bestandtheil des HYGINUS *Poeticon astronomicon* aus dem X. Jahrhundert.

De proportione et proportionalitate. Cap. XVII.

1. Magnitudo minor[1] maioris magnitudinis <pars est>,[2] quando minor[3] maiorem magnitudinem permetitur.

2. Maior vero magnitudo minoris magnitudinis mutiplex est, quotiens a minore maior integra dimensione subpletur.

3. Proportio est[4] duarum magnitudinum cognatarum ad se invicem comparatione veniens habitudo.

4. Proportionem vero ad se invicem magnitudines habere dicuntur, quae possunt sese[5] invicem multiplicatae transcendere.

5. Eandem[6] vero proportionem prima magnitudo ad secundam magnitudinem tertiaque ad quartam tenere perhibentur, quando primae ac terciae magnitudinum aeque multiplices eas, quae sunt secundae atque quartae aeque multiplices, vel pariter transcendunt, vel ab his pariter[7] transcenduntur, vel his pariter exsaequantur,(!) cum scilicet in alterna comparatione sumantur.[8]

6. Quae vero eandem retinent proportionem, proportionaliter esse dicuntur.[9]

7. Quanto vero earum, quae sunt aeque multiplices, primae quidem magnitudinis <multiplex secundae> multiplicem superat, tertiae vero magnitudinis multiplex quartae magnitudinis multiplicem[10] minime transcendit, tunc prima magnitudo ad secundam magnitudinem maiorem proportionem quam tertia ad quartam tenere perhibetur.[11]

8. Proportionalitas vero in tribus ad minimum terminis invenitur.

11. Cumproportionales idem eiusdem magnitudines proportionis esse dicuntur praecedentes praecedentibus et consequentibus consequentes.

9. Quando autem tres magnitudines proportionaliter fuerint constitutae, tunc prima ad tertiam duplicem proportionem[12] quam ad secundam dicitur possidere.

10. Quando autem quatuor magnitudines proportionaliter fuerint constitutae, tunc prima ad quartam triplicem proportionem quam ad secundam dicitur obtinere.

13. Conversim sumere est: sic se habere consequens ad praecedens, sicuti est consequens ad praecedens.

12. Alternatim sumere est: ut se habet praecedens < ad praecedens >,[13] sic se habeat consequens ad consequens.

14. Componentem sumere est: ut sese habet praecedens cum consequente velut unum ad id ipsum, quod sequitur.

15. Dividentem vero sumere est: ut sese habet eminentia, qua eminet < praecedens > ab eo, quod consequitur, < ad ipsum, quod sequitur >.[14]

16. Retrorsum vero sumere est: ut se habet praecedens ad eminentiam qua praecedens eminet ab eo, quod est consequens, ita se habere praecedens ad eminentiam, qua[15] praecedens eminet ab eo, quod est consequens.

18. Confusa proportionalitas appellatur, quando fuerit: ut praecedens ad consequens, sic consequens ad praecedens, et ut consequens ad aliud, sic aliud ad praecedens.

17. Ex aequo est sumptio extremorum mediis intermissis.

[1]) minor] miror, *darüber steht von späterer Schrift* vel minor. — [2]) pars est *ist ausradiert.* — [3]) minor] miror. — [4]) Proportio est] Proportionem, *doch ist das* n *unterpunctirt.* — [5]) sese] esse. — [6]) Eandem] Eadem. — [7]) vel ab his pariter *steht auf Rasur.* — [8]) sumantur] sumatur. — [9]) dicuntur] dicantur. — [10]) *Das Mscpt liest durch Dittographie folgendermassen;* Quando vero earum quae sunt aequae multiplices primae quidem magnitudinis multiplicem superat. Tertiae vero magnitudinis multiplex. Secundae (*auf Rasur*) vero magnitudine multiplicem superat. Tertiae vero magnitudinis multiplex. Quartae magnitudinis multiplicem minime transcendit. — [11]) *Zuerst stand* prohibetur, *doch ist der Strich, welches* ro *bedeutet, wegradiert.* — [12]) proportionem] portionem. — [13]) ad praecedens *ist ausgelassen.* — [14]) *In der Handschrift steht:* Dividentem vero sumere est ut sese habet eminentis qua eminet ab eo quod consequitur. — [15]) ad eminentiam qua] ab eminentia quae.

Über Johann von Gemunden.

Von MAXIMILIAN CURTZE in Thorn.

Die Fragen über den Geschlechtsnamen und die Heimat JOHANNES VON GEMUNDEN sind bis jetzt nicht erledigt. Vielleicht dürfte die nachfolgende Betrachtung einen Beitrag zu ihrer Lösung geben.

Die K. K. Hofbibliothek zu Wien besitzt folgende Manuscripte:

1. N° 5412[3], Bltt 155'—160': JOHANNES SCHINDEL DE GAMUNDIA, *Tabulae stellarum fixarum partim verificatae per* GEORGIUM *praepositum Neoburgensem;*
2. N° 5415[2], Bltt 133'—160: JOHANNES SCHINDEL DE GAMUNDIA, *Canones pro ecclipsibus solis et lunae;*
3. N° 5418[4], Bltt 128—145: JOHANNES SCHINDEL DE GAMUNDIA, *Tractatus de quadrante horario;*
4. N° 5418[5], Bltt 146—164': JOHANNES SCHINDEL DE GAMUNDIA, *Tractatus de composicione cylindri;*
5. N° 5501[1], Bltt 1—19: JOHANNES SCHINDEL DE GAMUNDIA, *Calendarium.*

Von diesen gehören N° 1, 3, 4 und 5 sicher dem gewöhnlich nur als JOHANNES DE GAMUNDIA bezeichneten Verfasser an. N° 1, 3 und 4 sind unter diesem Namen z. B. in der Handschrift Cod. lat. Monac. 10662 enthalten. Es dürfte daher wohl nicht zu gewagt erscheinen, als Vatersnamen des JOHANN VON GEMUNDEN den Namen SCHINDEL zu bezeichnen, der dann von JOHANNES SCHINDEL aus Königgrätz wohl zu unterscheiden wäre. Die *Tabulae Codicum manu scriptorum in Bibliotheca Palatina Vindobonensi asservatorum,* vol. IV, verweisen daher auch in »Index auctorum» unter dem Stichwort SCHINDEL, JOHANNES auf JOHANNES DE GAMUNDIA, unter welchem Namen alles zusammengefasst ist, was in diesem Bande an Schriften mit beiderlei Namensbezeichnung aufgeführt ist.

Der Cod. Amplon. Q. 278[1] enthält eine Schrift mit dem Titel:

> *Scholae et sophismata a magistro* JOHANNE DE GEMUNDEN *Suevo de suppositionibus Marsilii de Ingen instituta* vom Jahre 1412, geschrieben *per* HERMANNUM DE STEYNA.

Hiernach erhielte die Annahme, dass Schwäbisch-Gmünd die Heimat des JOHANNES VON GEMUNDEN gewesen, wesentliche Stütze, obwohl dann wieder der 1404 zu Ulm studierende JOHANNES WISSBIER DE GAMUNDIA aus dem Spiele bleiben müsste.

Sur les découvertes mathématiques de Wronski.

Par S. Dickstein à Warszawa.

9. Intégration des équations différentielles et des équations aux différences.

Dans la *Critique de la théorie des fonctions génératrices de Laplace* et dans un manuscrit inédit: *Intégration générale des équations de tous les ordres,* Wronski s'occupe des méthodes générales d'intégration des équations. Les méthodes fondées sur la théorie des fonctions génératrices de Laplace et la définition même de ces fonctions que l'illustre géomètre déduit du développement suivant les puissances entières et positives d'une variable,[52] lui paraissent insuffisantes. Pour pouvoir supposer négative la variable x dans y_x, la théorie des fonctions génératrices, dit-il, est forcée d'imaginer dans sa série fondamentale

$$y_0 + y_1 t + \ldots + y_x t^x + \ldots$$

un prolongement indéfini du côté des puissances négatives de t; de plus, pour pouvoir supposer fractionnaire, irrationnelle ou même idéale (imaginaire) la même variable x, la théorie dont il s'agit est forcée de concevoir une infinité de termes intercalés entre ceux de la série fondamentale ou même une infinité de termes entièrement indépendants; ce sont différentes suppositions qui exigent selon Wronski des principes tout à fait étrangers à ceux du développement d'une fonction.

Les propriétés des fonctions *aleph* (voir la Bibliotheca Mathematica 1892, p. 85) conduisent Wronski à la construction des solutions des équations aux différences. Dans le manuscrit cité, il réduit l'intégration de l'équation aux différences:

$$F(x) = f_0(x)\, Y(x) + f_1(x)\, Y(x+a) + \ldots + f_m(x)\, Y(x+ma),$$

a étant un accroissement quelconque de la variable x, $F(x)$, $f_0(x)$, ..., $f_m(x)$ des fonctions données de cette variable, $Y(x)$ la fonction inconnue — à l'intégration de l'équation réduite

$$0 = f_0(x)\, Z(x) + f_1(x)\, Z(x+a) + \ldots + f_m(x)\, Z(x+ma),$$

$Z(x)$ étant la fonction cherchée. Il trouve pour cette fonction une expression de la forme

$$\begin{aligned} Z(x) = {} & C_1 \aleph_1 (n_1 + n_2 + \ldots)^{\frac{x + ak_1}{a}} \\ & + C_2 \aleph_2 (n_1 + n_2 + \ldots)^{\frac{x + ak_2}{a}} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + C_m \aleph_m (n_1 + n_2 + \ldots)^{\frac{x + ak_m}{a}}, \end{aligned}$$

$C_1, C_2, \ldots, C_m$ étant des constantes arbitraires; $k_1, k_2, \ldots, k_m$ des constantes déterminées; $n_1 = \frac{1}{z_1}$, $n_2 = \frac{1}{z_2}$, ..., où $z_1, z_2, \ldots$ sont les racines d'une équation du degré m, dont les coefficients s'expriment en fonctions des coefficients de l'équation réduite.

Dans la *Critique de la théorie des fonctions génératrices* Wronski énonce le problème général suivant:

Si l'on désigne par $\Gamma\varphi(x)$ la quantité

$$A_0 \varphi(x) + A_1 \varphi(x + \omega) + \ldots + A_\mu \varphi(x + \mu\omega),$$

ω étant l'accroissement de la variable x, $\varphi(x)$ une fonction de cette variable; $A_0, A_1, \ldots, A_\mu$ des constantes; $\Gamma^2\varphi(x)$ ce que devient $\Gamma\varphi(x)$, lorsqu'on y remplace $\varphi(x)$ par $\Gamma\varphi(x)$, $\Gamma^3\varphi(x)$ ce que devient $\Gamma^2\varphi(x)$, lorsqu'on y remplace $\varphi(x)$ par $\Gamma\varphi(x)$ et ainsi de suite, on aura l'expression de $\Gamma^\omega\varphi(x)$ en fonction des différences $\Gamma^{\omega-1}\varphi(x)$, $\Gamma^{\omega-1}\varphi(x + \omega)$ etc. Pour le problème inverse, c'est à dire pour la détermination de la fonction génératrice $\Gamma^{\omega-1}\varphi(x)$, quand la fonction engendrée $\Gamma^\omega\varphi(x)$ est connue, on a le théorème:

Soient $n_1, n_2, \ldots, n_\mu$ les racines de l'équation

$$0 = A_0 + A_1 n + \ldots + A_\mu n^\mu;$$

formons les fonctions *schin* (voir la Bibliotheca Mathematica 1892 p. 49)

$$\begin{aligned} N &= \text{ש}(n_1^{\nu_1} n_2^{\nu_2} \ \ldots\ n_{\mu-2}^{\nu_{\mu-2}} n_{\mu-1}^{\nu_{\mu-1}} n_\mu^{\nu_\mu}), \\ N_1 &= \text{ש}(n_2^{\nu_1} n_3^{\nu_2} \ \ldots\ n_{\mu-1}^{\nu_{\mu-2}} n_\mu^{\nu_{\mu-1}}), \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ N_\mu &= \text{ש}(n_1^{\nu_1} n_2^{\nu_2} \ \ldots\ n_{\mu-2}^{\nu_{\mu-2}} n_{\mu-1}^{\nu_{\mu-1}},); \end{aligned}$$

$$(\nu_1 = 1, \nu_2 = 2, \ldots, \nu_\mu = \mu)$$

on trouve

$$\Gamma^{\omega-1}\varphi(x) = \frac{(-1)^{\mu-1}}{NA_\mu}\Bigg| N_1 n_1^{\frac{x}{\omega}} \Sigma\left[\Gamma^\omega \varphi(x)\left(\frac{1}{n_1}\right)^{\frac{x}{\omega}}\right]$$

$$- N_2 n_1^{\frac{x}{\omega}} \Sigma\left[\Gamma^\omega \varphi(x)\left(\frac{1}{n_2}\right)^{\frac{x}{\omega}}\right]$$

. . . .

$$+ (-1)^{\mu-1} N_\mu n_\mu^{\frac{x}{\omega}} \Sigma\left[\Gamma^\omega \varphi(x)\left(\frac{1}{n_\mu}\right)^{\frac{x}{\omega}}\right]\Bigg| ,$$

en prenant ici l'intégrale indéfinie Σ par rapport à l'accroissement de la variable x.[53]

Cette théorie s'applique immédiatement à l'intégration des équations aux différences de la forme

$$f(x) = B_0\varphi(x) + B_1\Delta\varphi(x) + \ldots + B_\mu \Delta^\mu \varphi(x) ,$$

et en y considérant ω comme une quantité infiniment petite, on parvient à l'intégration de l'équation différentielle linéaire aux coefficients constants.

Wronski étend ces considérations aux fonctions de plusieurs variables indépendantes, c'est à dire aux équations aux différences et différences partielles.

Dans la *Réforme des mathématiques* (T. I p. XCIV et suiv.), Wronski expose une nouvelle méthode générale d'intégration des équations. Voilà en quoi consiste le principe de cette méthode.[54]

Soit p. ex. une équation linéaire aux différences ou aux différentielles sous la forme

$$\psi(x) = H_0\Omega + H_1\frac{d\Omega}{dx} + H_2\frac{d^2\Omega}{dx^2} + \ldots + H_\mu\frac{d^\mu\Omega}{dx^\mu} ,$$

Ω étant la fonction inconnue de x, $\psi(x)$ une fonction quelconque de la même variable, les coefficients H_0 , H_1 , . . . , H_μ des fonctions de x qui peuvent contenir l'inconnue Ω et ses différences ou différentielles. Soit k une valeur moyenne de la variable x entre les limites dont on veut se servir et $[H_0]$, $[H_1]$, . . . , $[H_\mu]$ les valeurs correspondantes des fonctions H_0 , H_1 , . . . , H_μ. En introduisant dans l'équation un paramètre ar-

bitraire a et la fonction se^{rx}, s et r étant des nombres arbitraires, formons une équation plus générale

$$\begin{aligned}&\psi(x) + (1-a)se^{rx}\\ (1)\quad &= [H_0]\left(\frac{H_0}{[H_0]}\right)^a \Omega + [H_1]\left(\frac{H_1}{[H_1]}\right)^a \frac{d\Omega}{dx} + \ldots + [H_\mu]\left(\frac{H_\mu}{[H_\mu]}\right)^a \frac{d^\mu \Omega}{dx^\mu},\end{aligned}$$

qui pour la valeur $a=1$ donne l'équation proposée et pour $a=0$ l'équation »réduite»

$$(2)\qquad \psi(x) + se^{rx} = [H_0]\Omega + [H_1]\frac{d\Omega}{dx} + \ldots + [H_\mu]\frac{d_\mu \Omega}{dx_\mu},$$

c'est à dire une équation aux coefficients constants, dont l'intégration peut être effectuée par des procédés connus. En regardant l'intégrale de l'équation (1) comme une fonction du paramètre a, on arrive de l'intégrale de l'équation (2) à celle de l'équation (1) par une des méthodes du développement données par Wronski, p. ex. par le »problème universel» ou par la »méthode suprême» (voir la Bibliotheca Mathematica 1894, p. 51, 85). Pour $a=1$ on en déduit l'intégrale de l'équation proposée.

L'introduction d'un paramètre arbitraire, soit en exposant soit en coefficient, soit enfin par les deux modes à la fois, peut fournir en effet un moyen pour avoir l'équation réduite relativement simple, mais l'application des développements infinis renfermant le paramètre arbitraire et le passage de l'intégrale de l'équation (2) à la solution de l'équation donnée présente la partie la plus difficile du problème. L'introduction de la fonction se^{rx} avec des constantes arbitraires s et r, a pour but d'assurer la convergence aux développements, mais on sait que les approximations même convergentes ne convergent pas nécessairement vers les solutions cherchées. Les questions délicates de ce genre appartiennent à la science moderne; Wronski s'efforçait de les résoudre par sa »génération neutre». Ce n'est qu'au dernier temps que M. Poincaré a énoncé un théorème général sur les intégrales des équations différentielles contenant un paramètre arbitraire.[55]

10. Résolution "systématique" des équations algébriques.

Dans l'opuscule: *Résolution générale des équations de tous les degrés* (1812) Wronski a donné pour les racines x_1, x_2, ..., x_m de l'équation de degré m:

$$0 = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_{m-1} x^{m-1} + x^m,$$

les expressions suivantes

$$x_i = \rho_i \sqrt[m]{\xi_1} + \rho_i^2 \sqrt[m]{\xi_2} + \ldots + \rho_i^{m-1} \sqrt[m]{\xi_{m-1}}\,, \quad (i=1,2,\ldots,m)$$

ρ_i étant les racines de l'équation $z^m - 1 = 0$, et les quantités $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}$ les $m-1$ racines de l'équation »réduite» de degré $m-1$:

$$0 = y_1 + y_2 \xi + \ldots + y_{m-2} \xi^{m-2} + y_{m-1} \xi^{m-1}\,,$$

dont les coefficients s'expriment algébriquement par les coefficients de l'équation donnée. La théorie de Wronski était évidemment fausse, ce qu'ont reconnu Ruffini[56] et Torriani;[57] on sait que c'est Ruffini qui, plus de dix ans avant l'apparition de l'opuscule de Wronski, a démontré l'impossibilité de la résolution par des radicaux algébriques des équations générales dont le degré est supérieur à 4.[58]

Dans la *Réforme des mathématiques* Wronski revient au même sujet; il y reproduit ses formules antérieures, mais il les envisage sous un autre point de vue. Il les fait dériver de son »problème universel», c'est à dire de la loi du développement de la quantité x déterminée par l'équation

$$0 = f(x) + x_1 f_1(x) + x_2 f_2(x) + \ldots,$$

dans laquelle il pose

$$f(x) = A_0 + x^m\,, \; f_1(x) = x^2\,, \; f_2(x) = x^3\,, \ldots$$

Dans ce développement, les quantités

$$\Xi_1^m = \xi_1\,, \; \Xi_2^m = \xi_2\,, \ldots, \; \Xi_{m-1}^m = \xi_{m-1}$$

s'exprimeront par des séries infinies, et les coefficients de l'équation réduite ne seront plus en général des fonctions algébriques des coefficients de l'équation donnée. On voit que la méthode de Wronski devient ainsi une méthode transcendentale de la résolution des équations algébriques, et comme telle elle est assujettie à toutes les précautions qu'il faut prendre pour que les développements soient non seulement convergents, mais qu'ils convergent aussi vers les racines chercées.

11. Changement des variables. Dérivées des ordres supérieurs.

Dans la *Philosophie de la technie* (1815, 1816—1817) on trouve plusieurs formules du calcul différentiel fort remarquables. Nous citerons celles qui se rapportent au changement de variables et aux dérivées des ordres supérieurs.

Si $F(z)$ est une fonction de y et y une fonction $\varphi(x)$ de la variable x, l'expression de la dérivée d'ordre m de la fonction F par rapport à la variable x sera d'après WRONSKI

$$\frac{d^n F}{dx^n} = \frac{\text{ש}\left[\frac{d\varphi}{dy}, \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2, \ldots, \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^{n-1} \frac{dF}{dy}\right]}{1^{1/1} \cdot 1^{2/1} \ldots 1^{n/1} \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}}.$$

Cette formule est très utile pour l'étude des développements des fonctions en séries.[59]

On trouve dans le même ouvrage les formules

$$\frac{d^n F}{dx^n} = \frac{d^n F(z)}{dz^n} \theta^{-\mu} + \frac{\mu - 1}{1} \frac{d^{n-1} F(z)}{dz^{n-1}} \left(\frac{d\theta^{-\mu}}{dz}\right) + \ldots;$$

$$\frac{d^n F}{dx^n} = \left|\frac{d^{n-1}\left(\theta^{-\mu} \frac{dF(x+z)}{dz}\right)}{dz^{n-1}}\right|_{z=0},$$

$$\theta = \frac{\varphi(x+z) - \varphi(x)}{z},$$

données postérieurement par HOPPE, SCHLÖMILCH et par autres savants.[60]

On y trouve aussi[61] la formule la plus générale exprimant la dérivée

$$\frac{d^m F(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{dy_1^{m_1} dy_2^{m_2} \ldots dy_n^{m_n}}. \qquad (m_1 + m_2 + \ldots + m_n = m)$$

12. Calcul des grades et des gradules.

Dans la *Philosophie des mathématiques* (1811), WRONSKI propose une nouvelle espèce de calcul infinitésimal par les définitions suivantes.

Soit $y = \varphi(x)$ une fonction de x; concevons que l'exposant de x reçoive un accroissement $\gamma(x)$, l'exposant de y recevra alors un accroissement que nous désignons par $\gamma(y)$. Nous aurons

$$y^{1+\gamma(y)} = \varphi(x^{1+\gamma(x)}), \quad y^{\gamma(y)} = \frac{\varphi(x^{1+\gamma(x)})}{\varphi(x)}.$$

Faisons $x^{1+\gamma(x)} = x + \xi$, il viendra

$$y^{\gamma(y)} = e^{\Delta \log \varphi(x+\xi)}.$$

Lorsque ξ est une quantité infiniment petite, le «grade» $\gamma(\varphi(x))$ devient un »gradule» $g(\varphi(x))$ et nous aurons

$$g(\varphi(x))=\frac{d\log\varphi(x)}{\log\varphi(x)}.$$

Ce sont le grade et le gradule du premier ordre; on définit le grade et le gradule du seconde ordre par les expressions

$$y^{\gamma(y)+\gamma_2(y)}=e^{\Delta\log\varphi(x+\xi)^{1+\gamma(\varphi(x+\xi))}},$$

$$\gamma_2(\varphi(x))=\frac{\Delta^2\log\varphi(x+2\xi)}{\log\varphi(x)},$$

$$g_2(\varphi(x))=\frac{d^2\log\varphi(x)}{\log\varphi(x)}.$$

Pour les grades et les gradules des ordres supérieurs on aura analoguement

$$\gamma_\mu(\varphi(x))=\frac{\Delta^\mu\log\varphi(x+\mu\xi)}{\log\varphi(x)},$$

$$g_\mu(\varphi(x))=\frac{d^\mu\log\varphi(x)}{\log\varphi(x)}.$$

D'après ces définitions on établit les lois du nouveau calcul, en particulier les formules pour

$$g_\mu(F(x)+f(x)),\ g_\mu(F(x)\,.\,f((x)),\ g_\mu(F(x)^{f(x)}),$$

et les lois qui lient cette nouvelle branche avec le calcul différentiel;[62] le calcul inverse des gradules répond au calcul intégral. WRONSKI regarde le nouveau calcul comme indépendant du calcul infinitésimal ancien. Pour ce qui concerne son utilité, l'algorithme des grades et des gradules est resté sans applications, malgré une application tentée par l'inventeur à la détermination de la nature des racines des équations algébriques et une autre inachevée, que j'ai trouvée dans un manuscrit inédit, à la théorie des nombres.

[52] LAPLACE, *Théorie analytique des probabilités* (*Oeuvres*, t. VII.), Livre I, Première Partie, chap. I: »Des fonctions génératrices à une variable.»

[53] E. WEST, *Exposé des méthodes générales en mathématiques* p. 287.

[54] E. WEST, l. c. p. 61 et suiv.

[55] H. POINCARÉ, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (Paris, 1892), Chapitre II: Intégration par les séries, p. 52 et suiv. — E. PICARD, *Sur les équations linéaires du second*

ordre renfermant un paramètre arbitraire. Comptes rendus de l'académie des sciences de Paris, 19 février 1894. *Sur les équations différentielles renfermant un paramètre arbitraire.* Ibid. 9 Avril 1894. — E. LINDELÖF, *Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude des intégrales réelles des équations différentielles.* Journal de mathématiques **10**$_4$, 1894, p. 125 et suiv.

56 P. RUFFINI, *Intorno al metodo generale proposto dal sig. Hoene Wronski onde risolvere le equazioni di tutti i gradi.* Memoria ricevuta li 20 Marzo 1816. Memorie della Società Italiana **18**, 1820.

57 TORRIANI, *Memoria premiada na Sessão publica de 24 de Janho de 1818 sobre o programma proposto para a mesmo anno: »Dar a demonstração das formulas propostas por Wronski para a resolução geral das equações«.* Memorias da Academia Real das Sciencias de Lisboa **6**, 1819, p. 33—56.

58 RUFFINI, *Teoria generale delle equazioni in cui si dimostra impossibile la soluzione algebrica delle equazioni generali di grado superiore al quarto* (Bologna 1799).

59 H. LAURENT, *Traité d'analyse.* T. V (1890) p. 36—38. — S. DICKSTEIN, *O »prawie najwyzszém« Hoene-Wrónskiego w matematyce* [Sur la loi suprême de WRONSKI]. Prace matematyczno-fizyczne **2**, 1890, p. 162. — H. ZORAWSKI, *O szeregach odwracajacych* [Sur l'inversion des fonctions par les séries]. Prace matematyczno-fizyczne **5**, 1894, p. 147.

60 R. HOPPE, *Theorie der independenten Darstellung der höheren Differentialquotienten.* (Leipzig 1845). — O. SCHLÖMILCH, *Compendium der höheren Analysis* **2** (1866), p. 3 et suiv. — R. MOST, *Über die höheren Differentialquotienten*, Mathem. Annalen **4**, 1872, p. 499—504. — L. KÖNIGSBERGER, *Über das Bildungsgesetz der höheren Differentiale einer Function von Functionen.* Mathem. Annalen **27**, 1886, p. 473 et suiv.

61 CH. LAGRANGE, *Développement des fonctions d'un nombre quelconque de variables indépendantes à l'aide d'autres fonctions de ces mêmes variables. Dérivées des fonctions de fonctions.* Mémoires de l'Académie de Belgique **48**, 1885.

62 A. S. DE MONTFERRIER, *Encyclopédie mathématique* **3**, p. 96—103. — W. KRAUZE, *Róznice i rózniczki wykladnicze* [Différences et différentielles exponentielles]. Prace matematyczno-fizyczne **5**, 1894, p. 160—168. — S. DICKSTEIN, *Z Wronskiego teoryi stopni skonczonych i nieskonczenie malych* [Sur la théorie des grades et des gradules de WRONSKI]. Prace matematyczno-fizyczne **5**, 1894, 169—174.

Nochmals der Jakobsstab.

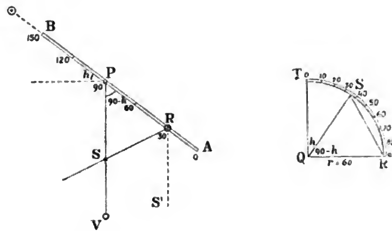
Von H. SUTER in Zürich.

In der Bibliotheca Mathematica 1895 (S. 13—18) veröffentlichte ich einen Artikel, betitelt *Zur Geschichte des Jakobsstabes,* in welchem ich als wahrscheinlich hinstellte, dass das Linear-Astrolabium oder der Stab des Tûsî mit dem Jakobsstab identisch sei und zugleich den Wunsch aussprach, es möchte Herr Baron CARRA DE VAUX in Paris die Güte haben, die Stellen des Ms. arab. N:o 1148, die über dieses Instrument handeln und die L. A. SÉDILLOT in seinem *Mémoire sur les instruments astronomiques des Arabes* weggelassen hatte, zu veröffentlichen. Herr Baron CARRA DE VAUX ist nun diesem Wunsche in höchst anerkennenswerther Weise nachgekommen und ich benutze diesen Ort, um ihm von meiner Seite aus den wärmsten Dank für seine Bemühungen auszusprechen.

Im Journal asiatique 1895 (N:o de Mai—Juin) hat der genannte Gelehrte die betreffende Stelle aus dem Ms. arab. N:o 1148 (jetzt N:o 2508), welches den 3. und 4. Bd. eines astronomischen Werkes von ABÛ'L-HASSAN 'ALI BEN 'OMAR EL-MERRAKESCHÎ, betitelt »die Gesammtheit der Anfänge und der Enden» enthält, im arabischen Text und mit französischer Übersetzung veröffentlicht. Die Übersetzung bot wegen des specifisch technischen Inhaltes der Abhandlung keine geringen Schwierigkeiten dar, die aber von Herrn CARRA DE VAUX in ausgezeichneter Weise überwunden worden sind, wie wir es auch von dem Herausgeber und Übersetzer der Mechanik des HERON nicht anders erwartet haben. Da aber der Text des Ms. gar keine Figur enthält, so wäre es trotz der beinahe wörtlichen Übersetzung äusserst schwierig, eine *genaue* Darstellung des in Frage stehenden Instrumentes zu geben, aus der jeder Leser die Construction und Anwendung desselben klar ersehen könnte; ich wenigstens muss in dieser Richtung mein Unvermögen bekennen. Eines aber steht fest, nämlich die Thatsache, dass der Stab des Tûsî *nicht identisch* mit dem Jakobsstab ist, dass also meine in dem oben genannten Artikel ausgesprochene Vermuthung eine irrige war. So bleibt also immer noch bis auf weitere Entdeckungen der von S. GÜNTHER und M. STEINSCHNEIDER als Erfinder oder wenigstens erster Beschreiber des Jakobsstabes genannte LEVI BEN GERSON als solcher in Kraft bestehen.

Der Stab des Tûsî ist ein vereinfachtes Astrolabium, bei welchem die auf den ebenen Astrolabien (Planisphärien) durch Kreis- oder elliptische Bögen dargestellten verschiedenen Himmelskreise (wie Äquator und seine Parallelkreise, die Ekliptik, die Mukantarate etc.) einfach durch die Durchschnittspunkte dieser Kreise mit der Linie, in welcher sich Meridiankreis und Projectionsebene schneiden (d. h. mit der Südrichtung) ersetzt waren, oder kürzer: Statt des Planisphaeriums nahm man einfach seine Südlinie (den Stab), mit den Durchschnittspunkten sämmtlicher Kreise des Planisphaeriums versehen. Das Instrument war, wie in der veröffentlichten Abhandlung auch an mehreren Stellen ausgesprochen wird, für die meisten Beobachtungen unpraktisch und ungenauer als das Planisphaerium, für die Auffindung der Azimute von Fixsternen sogar unbrauchbar.

Die erste in der Abhandlung beschriebene Anwendung dieses Instrumentes, diejenige zur Bestimmung der Sonnenhöhe, ist die einfachste und deshalb leicht verständlich; ich gebe sie im Folgenden wieder.



Der ganze Stab AB ist in 150 gleiche Teile geteilt (der Verfasser bemerkt, dass 180 die bequemere Teilung gewesen wäre); beim 30. Teilpunkt (R), dem *Mamsak* (= Rétenteur = Halter, Angriffspunkt), ist ein kleines Loch durch den Stab gebohrt, durch welches ein Faden geführt werden kann, beim 90. Teilpunkt (P), dem *Kutb* (= Pol), ist ein etwas grösseres Loch gebohrt, durch welches das Senkblei PV herabgelassen werden kann. Die 60 Teile PR repräsentiren den Radius des Wendekreises des Steinbocks, dessen Ebene bei den Planisphärien als Projectionsebene angenommen wird. Um nun die Sonnenhöhe *h* zu bestimmen, richtet man den Stab mit dem Polende genau nach der Sonne, lässt das Senkblei im Punkte

P hinunter, verschiebt an demselben eine Hülse (Marke) S soweit, dass PS = PR wird, spannt den in R herunterhängenden Faden RS' in die Richtung RS und bringt die Länge RS als Sehne an den Quadranten, dessen Radius ebenfalls = 60 Teilen des Stabes, also = PR sein muss, so gibt der Bogen ST die Sonnenhöhe *h* an.

Für die meisten Messungen sind ausser dem Stab und dem Quadranten auch noch Tafeln nothwendig, man sieht aber aus diesem einzigen Beispiele, dass die Messungs-Resultate mit diesem Stab des Tûsî keinen Anspruch auf Genauigkeit machen konnten. In der Abhandlung sind ausser dieser Höhenbestimmung der Sonne noch folgende Messungen beschrieben: Höhenmessung von Fixsternen, Bestimmung des *Fadl ed-Dâir,* d. h. des Stundenwinkels, ferner des Tagesbogens der Sonne, des Stundenwinkels eines auf dem Stab markirten Sternes, der verflossenen Zeit der Nacht, der Ascendenten zu irgend einer Tageszeit, der Aufgangszeit der auf dem Stabe markirten Sterne, der Co-Ascendenten der Häuser des Thierkreises, der Tageszeit und andere.

Geometrie mit constanter Zirkelöffnung im Altertum.

Von M. KUTTA in München.

Aus einer Stelle des PAPPUS[1] ist von Herrn CANTOR[2] geschlossen worden, dass schon die Griechen die Geometrie mit fester Zirkelöffnung kannten. Dort werden unter den als »werkzeugsmässig gelöst» (ὀργανικά), und als »der geometrischen Berechtigung entbehrend» (τῆς ἐξουσίας γεωμετρικῆς ἀφαιρούμενα) charakterisirten Problemen solche erwähnt, die »ἑνὶ διαστήματι» gezeichnet werden. Dem Zusammenhange nach aber erscheint es gewagt, diese als »mit fester Zirkelöffnung beschriebene» zu deuten, da bei den letzteren die Beweise äusserst leicht zu geben sind, und man mit den bei den Griechen als einzig rein geometrisch betrachteten Constructionsmitteln (Zirkel und Lineal) nicht nur ausreicht, sondern sogar diese nur in eingeschränktem Masse verwendet. Schon HULTSCH hat die anscheinende Unklarheit bemerkt und schlägt vor, an Stelle von ἑνὶ διαστήματι lieber κανονίῳ τινί (mit einem beweglichen Lineal) zu lesen, wobei er am Probleme wie die Würfelverdoppelung denkt. Eine vielleicht genügende Deutung der Stelle gewinnt man aber, ohne sie zu ändern, durch Heranziehung von PAPPUS 244, 14, wo bei Construction der Conchoide das Wort διάστημα in spezieller technischer Bedeutung für die constante auf den Strahlen abzutragende Strecke eingeführt wird.[3] Darnach sind die obigen Probleme also die durch Abtragung »einer constanten Strecke», analog wie bei der Conchoide, lösbaren, wozu die Charakterisirung vorzüglich passt. Eine Bekanntschaft der Griechen mit der Geometrie mit constanter Zirkelöffnung dürfte bei Annahme dieser Erklärung jener Stelle, der einzigen der griechischen Literatur, die darauf hinweisen könnte, unwahrscheinlich erscheinen.

[1] PAPPI ALEXANDRINI *Collectiones quae supersunt, ed.* F. HULTSCH, III (Berlin 1878), S. 1074.

[2] CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Band I (zweite Auflage), S. 421.

[3] *Καλείσθω δὲ ἡ μὲν ΑΒ εὐθεῖα »κανών», τὸ δὲ σημεῖον Ε »πόλος», »διάστημα» δὲ ἡ ΓΔ.*

RECENSIONEN. — ANALYSES.

M, Cantor. VORLESUNGEN ÜBER GESCHICHTE DER MATHEMATIK. DRITTER BAND. VOM JAHRE 1668 BIS ZUM JAHRE 1759. ZWEITE ABTHEILUNG. DIE ZEIT VON 1700 BIS 1726. Leipzig, Teubner 1896. 8°, p. 253—472.

L'ordre des matières traitées dans cette seconde partie du troisième tome des *Vorlesungen* est à peu près le même que celui adopté par M. CANTOR pour la période 1668—1699 (voir Biblioth. Mathem. 1894, p. 89—91). En premier lieu il signale les ouvrages d'histoire des mathématiques et les éditions d'auteurs classiques; après quelques notices sur l'histoire du calcul infinitésimal jusqu'en 1704, il donne ensuite une exposition détaillée (42 pages) des débats sur la priorité de l'invention des nouveaux calculs, débats commencés en 1699 par FATIO DE DUILLIER et terminés seulement après la mort de LEIBNIZ. Puis il rend compte successivement du développement de l'analyse combinatoire et du calcul des probabilités, de la théorie des suites et du calcul aux différences. Enfin les trois derniers chapitres sont consacrés aux progrès de l'algèbre, des procédés de différentiation et d'intégration, de la géométrie analytique et projective, ainsi que de l'intégration des équations différentielles.

Personne qui aura lu avec attention la nouvelle partie des *Vorlesungen,* ne niera qu'elle ne soit digne de son éminent auteur. Nous nous permettons de signaler p. ex. l'exposition des débats sur la priorité de l'invention du calcul infinitésimal, exposition tracée de main de maître et évidemment *con amore.* D'autre part nous ne serions pas surpris, si quelque lecteur émettait l'opinion que cette partie ne contienne pas une exposition complète et uniforme des recherches mathématiques les plus importantes faites pendant la période 1700—1726, mais qu'elle soit plutôt un recueil d'importants traités sur les progrès de plusieurs (ou bien la plupart) des branches de mathématiques pendant cette période, renfermant aussi un certain nombre de notices sur les progrès des autres branches dans le même temps. En effet, à partir du commencement du 18e siècle, les matériaux pour l'histoire des mathématiques deviennent si abondants et si hétérogènes, qu'il est à peu près impossible pour un seul homme de les traiter convenablement sans avoir recours à des monographies historiques sur chaque branche particulière. Et même en ce cas, on sera très facilement induit à s'occuper trop des

branches pour lesquelles on a une prédilection marquée, et de négliger un peu les autres.

Pour illustrer par un exemple ce que nous venons de dire, nous nous permettons de choisir l'histoire du calcul aux différences finies et en particulier les services rendus par Taylor à ce calcul. Dans notre mémoire *Differenskalkylens historia,* I (Upsala 1878), nous avons donné une exposition détaillée de ces services. Il en résulte que Taylor a introduit les termes *incrementum* (= différence), *integralis* et *valor successivus;* qu'il a donné les notations pour les différences et les intégrales, savoir

$$\underset{n}{x} = \Delta^n x\,,\ {}^n[x] = \Sigma^n x;$$

qu'il a établi le théorème pour la détermination des différences successives, et appelé l'attention sur la dépendance mutuelle entre les différences et les intégrales; en un mot, qu'il a jeté les fondements de la méthode générale du calcul aux différences. Il a, de plus, fait connaître diverses formules, comme celles qui donnent

$$u\ \ ,\ u_{x+h}\,,\ u_{x-h}\,,\ \Delta x^{(m)}\,,\ \Delta x^{(-m)}\,,\ \Delta a^x\,,$$
$$\Delta^n(u_x v_x)\,,\ \Sigma x^{(m)}\,,\ \Sigma x^{(-m)}\,,\ \Sigma a^x\,,\ \Sigma^n(u_x v_x)\,,\ \Sigma[a^x\varphi(x)]\,.$$

Il s'est aussi occupé de la théorie des équations aux différences; il a démontré l'existence d'une solution; il a déterminé la forme générale de la solution complète et exprimé la valeur de la variable dépendante sous la forme d'une série infinie; il a donné une méthode d'intégration pour certaines équations aux différences du premier ordre. Enfin il a appliqué le calcul des différences à l'interpolation et à la sommation des séries.

Maintenant, si nous examinons les quelques pages que M. Cantor a consacrées à Taylor, nous n'y trouvons à peu près rien relativement au calcul des différences finies. M. Cantor parle (p. 365) un peu des notations générales de Taylor, mentionne (p. 367—368) la déduction de la série connue sous son nom, nous avertit (p. 369) que Taylor s'est occupé de l'interpolation et de la sommation des séries, et fait observer enfin (p. 370) que dans la *Methodus incrementorum* »die Lehre von den endlichen Differenzen eigentlich am stiefmütterlichsten, mindestens am undeutlichsten behandelt ist, wiewohl sie dem Buche den Titel verlieh und das Buch wieder anderen Mathematikern den Anstoss gab, tiefer in den Gegenstand einzudringen». On voit que M. Cantor passe sous silence précisement les plus importantes contributions de Taylor au calcul des différences finies.

On pourrait nous objecter que, notre mémoire étant rédigé en suédois, les résultats en ont été inaccessibles à M. CANTOR, et que, par conséquent, s'il a traité TAYLOR en marâtre, il a agi tout à fait involontairement. L'objection est sans doute juste, mais nous faisons observer qu'un résumé, en allemand, de notre mémoire a été publié dans le Repertorium der literarischen Arbeiten auf dem Gebiete der Mathematik **2** (1879), p. 340—342, et qu'une courte analyse en français a été insérée au Bulletin des sciences mathématiques **3**$_2$, 1879, p. 381—382. Donc si M. CANTOR avait jugé indispensable de rendre compte de l'histoire du calcul des différences finies à partir de TAYLOR, il ne lui aurait pas été impossible de consacrer à ce sujet au moins une page de plus, sans qu'il lui eût été nécessaire de se livrer à une étude approfondie des passages obscurs et parfois presque incompréhensibles de la *Methodus incrementorum*.

Par ce qui précède, nous n'avons point voulu avancer positivement qu'il y a d'importantes lacunes dans l'exposition de M. CANTOR, d'autant moins que nous reconnaissons que la valeur relative d'une découverte mathématique peut être appréciée très diversement par différentes personnes. Notre intention a été seulement de faire ressortir que, pour les raisons que nous avons indiquées, il est très difficile d'éviter de telles lacunes en traitant la période dont s'est occupé M. CANTOR. En tout cas nous croyons pouvoir affirmer que son ouvrage, tel qu'il est actuellement, rendra les plus grands services à l'étude de l'histoire des mathématiques et que, par conséquent, il nous faut en être vivement reconnaissants à M. CANTOR.

Voici à la fin quelques petites observations, peu importantes au reste, que nous avons faites en lisant la nouvelle partie des *Vorlesungen*.

P. 255. L'écrit *Problema deliacum de duplicationi cubi* (Upsaliæ 1716) n'a pas pour auteur HARALD VALLERIUS (né en 1646, professeur des mathématiques à l'université d'Upsala depuis 1690, mort en 1716), mais (comparez Biblioth. Mathem. 1889, p. 3) son fils JOHANNES VALLERIUS (né en 1677, professeur des mathématiques à l'université d'Upsala depuis 1712, mort en 1718). Cet écrit contient une notice assez complète sur l'histoire du problème Déliaque, dont il indique 25 solutions proposées depuis HIPPOKRATES jusque vers la fin du 17e siècle.

P. 256. Aux écrits historico-mathématiques cités par M. CANTOR, on pourrait ajouter celui de J. GRAM: *De origine geo-*

metriæ apud Ægyptos (Hauniæ 1706; cf. Biblioth. Mathem. 1889, p. 76) et peut-être aussi celui de JEAN II BERNOULLI: *Dissertatio utrum Galli præstant Anglis inventorum physicorum et mathematicorum laude* (Basileæ 1724; cf. Biblioth. Mathem. 1890, p. 100).

P. 259. »Der ... geschichtlichen Literatur ist auch eine Gattung von Werken verwandt, deren erstes, so weit uns bekannt ist, der in diesem Abschnitte behandelten Zeit angehört. Wir meinen mathematische Wörterbücher». Il y a des dictionnaires mathématiques parus antérieurement au 18ᵉ siècle. Ainsi HIERONYMUS VITALIS publia en 1668 un *Lexicon mathematicum, astronomicum, geometricum; hoc est rerum omnium ad utramque immo & omnem fere mathesim quomodocunque spectantium collectio & explicatio. Adiecta brevi novorum theorematum expansione, verborumque exoticorum dilucidatione ut non injuria disciplinarum omnium mathematicarum summa & promptuarium dici possit* (Parisiis MDCLXVIII, in-8°), et JACQUES OZANAM est auteur d'un *Dictionaire mathématique ou idée générale des mathématiques, dans lequel sont contenus les termes de cette science, outre plusieurs termes des arts & des autres sciences, avec des raisonnemens qui conduisent peu à peu l'esprit à une connoissance universelle des mathématiques* (Paris et Amsterdam [deux différentes éditions] M. DC. LXXXXI, in-4°).

P. 281. M. CANTOR rapporte un passage d'un article de LEIBNIZ, où est citée la *Synopsis geometrica* du mathématicien HONORÉ FABRI, et il avertit (p. 282) que cet ouvrage a paru en 1669. Comme FABRI n'est pas mentionné dans le tome II des *Vorlesungen*, on aurait pu désirer une petite note signalant que ce savant, connu aussi par ses ouvrages d'astronomie et de physique, était né vers 1606 et mourut en 1688.

P. 340. Il convient de faire observer que l'écrit de JOHAN DE WITT sur la mortalité auquel JACQUES BERNOULLI fait allusion dans sa lettre à LEIBNIZ, est précisement la brochure: *Waerdye Van Lyf-Renten Naer proportie van Los-Renten* (Haag 1671), dont M. CANTOR a rendu compte aux pages 42—45 du cahier III: 1 des *Vorlesungen*.

P. 342. A l'instar de plusieurs auteurs antérieurs (p. ex. MONTUCLA et HOEFER), M. CANTOR indique que la première édition de la *Doctrine of chances* a paru en 1716, mais nous doutons qu'il y en ait des exemplaires portant sur le feuillet de titre cet an d'impression. Le livre de MOIVRE n'a été publié qu'en 1718 (cf. le compte rendu inséré dans les Acta Eruditorum 1721, p. 131), date signalée p. ex. par TODHUNTER et BALL.

P. 358. »Wir ... bemerken ... dass ... das ... Differenzenzeichen damals [c'est à dire en 1711] schon vorhanden war, wovon wir im 100. Kapitel uns überzeugen werden». — P. 439: »Noch eine zweite Bemerkung haben wir an die 1706 gedruckte Abhandlung [c'est à dire le mémoire de JEAN BERNOULLI sur le problème des isopérimètres] zu knüpfen. In ihr erscheint das Differenzenzeichen $\varDelta$». Le passage auquel se rapporte l'indication de M. CANTOR, est le suivant (Mémoires de l'académie des sciences de Paris 1706, p. 237): »Il faut aussi remarquer qu'en général on exprimera les différences des fonctions de RO, RT par $\varDelta RO \times TO$, en prenant $\varDelta$ pour le signe ou la caractéristique des différences des fonctions, où l'on omet les différences des grandeurs dont elles sont fonctions». Donc $\varDelta RO$ n'est pas la différence de RO, mais la différence d'une *certaine fonction de* RO; de plus, on trouve aisément qu'ici le mot »différence» ne signifie point différence finie, mais qu'il correspond au terme moderne »dérivée», et que, par conséquent, le symbole $\varDelta$ doit être défini non pas par l'équation $\varDelta f(x) = f(x+h) - f(x)$, où $f(x)$ est une fonction quelconque, mais par l'équation $\varDelta x = \frac{df(x)}{dx}$, où $f(x)$ est une fonction donnée à l'avance (cf. ENESTRÖM, *Framställning af striden om det isoperimetriska problemet.* Upsala universitets årsskrift 1876. Matematik och naturvetenskap II, p. 58). Il s'ensuit que JEAN BERNOULLI n'a pas introduit le symbole actuel de différence finie; autant que nous sachions, EULER est le premier auteur qui s'en est servi.

P. 362. On pourrait ajouter ici que le problème de l'interpolation a été traité déjà avant COTES par HERMANN, qui avait trouvé en 1704 ou 1705 une formule dont celle de NEWTON n'est qu'un cas particulier (cf. ENESTRÖM, *Differenskalkylens historia* I, p. 18—19).

P. 364. »Das Exemplar [der *Methodus incrementorum directa et inversa*] der Heidelberger Universitäts-Bibliothek trägt die irrige Bezeichnung: Londini MDCCXVII. Wir wissen nicht, ob das ein neuer Abdruck ist, oder ob die falsche Jahreszahl auf einem Druckfehler beruht». Dans notre mémoire déjà cité: *Differenskalkylens historia* I, p. 28, nous avons signalé qu'il y a deux variantes du feuillet de titre de la *Methodus incrementorum,* dont la première a l'indication: »Londini ... Prostant apud Gul. Innys ... MDCCXV», et la seconde l'indication: »Londini, Impensis Gulielmi Innys ... MDCCXVII». Mais tous les exemplaires que nous avons vus, appartiennent à une

même édition, sauf naturellement ceux de l'édition photolithographiée en 1862 à Berlin par Friedländer & Sohn, qui se sont servis de la seconde variante du feuillet de titre.

P. 369. »Von Unterschieden von endlicher Grösse ist ferner [in der *Methodus incrementorum*] nicht mehr die Rede». Nous faisons observer qu'aux pages 112—114 de l'ouvrage de TAYLOR se trouve une application de la théorie de l'intégration des équations linéaires aux différences finies.

P. 370. »NICOLE ... verfolgte die Absicht, klarer darzustellen, was in TAYLORS *Methodus incrementorum* nicht mit genügender Deutlichkeit ausgeführt sei. NICOLE hat diese seine Absicht durchaus erfüllt». Dans notre note *Om Taylörs och Nicoles inbördes förtjänster beträffande differenskalkylens första utbildande* (Öfversigt af [svenska] vetenskapsakad. förhandl. **51**, 1894, p. 177—187) nous avons essayé de démontrer que NICOLE s'est restreint à une partie peu considérable des questions du calcul aux différences finies, dont TAYLOR s'était occupé dans la *Methodus incrementorum.*

P. 404. L'indication que l'écrit *Enumeratio linearum tertii ordinis* de NEWTON a paru en 1706, est sans doute une simple faute d'impression (cf. p. 268 et p. 280, où M. CANTOR mentionne aussi qu'une analyse de cet écrit a été insérée par LEIBNIZ dans le cahier de janvier 1705 des Acta Eruditorum), bien qu'il soit vrai que la *seconde* édition en a été publiée en 1706. Au reste il est probable que la rédaction de cet écrit ait été commencée par NEWTON avant 1676, et que la rédaction définitive ait été achevée vers 1695 (cf. l'important mémoire de M. W. W. R. BALL *On Newton's classification of cubic curves;* Transactions of the London Mathematical society **22**, 1891, p. 104).

P. 429. »In den Acta Eruditorum vom Juni 1700 gab JAKOB BERNOULLI zunächst eine Anzahl von Beispielen [seiner Lösung des isoperimetrischen Problems]». La note à laquelle M. CANTOR fait allusion (Acta Eruditorum 1700, p. 261—266), n'est qu'un extrait d'un opuscule publié par JACQUES BERNOULLI sous le titre suivant: JACOBI BERNOULLII *ad fratrem suum Johannem Bernoulli epistola, cum annexâ solutione propriâ problematis isoperimetrici* (Basileæ 1700, in-4°). Le reste de cet opuscule a été réimprimé par CHARLES BOSSUT dans le journal: Observations sur la physique, sur l'histoire naturelle et sur les arts, dirigé par l'abbé ROZIER, tome XLI (1792), p. 161—173 (cf. ENESTRÖM, *Framställning af striden om det isoperimetriska problemet,* p. 32 et L'intermédiaire des mathématiciens **3**, 1896, p. 30).

P. 439. »JOHANN BERNOULLI hatte die Drucklegung seiner Abhandlung, sei es unabsichtlich, sei es absichtlich, sich verzögern sehen oder verzögern lassen». Dans notre petite note *Sur un point de l'histoire du problème des isopérimètres* (Biblioth. Mathem. 1888, p. 38) nous avons fait observer que JEAN BERNOULLI ne laissait point, pour parler avec BOSSUT (*Histoire générale des mathématiques,* tome II [Paris 1810], p. 41—42), son mémoire »dormir paisiblement pendant cinq ans aux dépots de l'académie». Si JEAN BERNOULLI avait fait sa volonté, le mémoire aurait probablement été publié déjà en 1701, mais VARIGNON arrangeait de manière que le manuscrit en fut retourné à son auteur. Ci-dessous nous nous permettons de reproduire quelques passages de la lettre que VARIGNON adressa à JEAN BERNOULLI sur ce sujet le 27 février 1701.

> Votre frère se prépare à partir dans 15 jours ou 3 semaines pour être à l'ouverture de votre paquet de solutions (que je donnai le 1er de ce mois à l'académie), et cela sans avoir encore fait imprimer les siennes, les apportant (dit-il) en manuscrit à l'académie. J'ai reçu vendredi une lettre des plus terribles . . . Vous ne sauriez croire tout ce qu'il me dit de duretés grossières par rapport à la partialité dont il m'accuse en ce rencontre. . . . Pour l'arrêter, je lui écrivis mercredi sur le champ que j'allais redemander votre paquet à Mr le secrétaire pour vous le renvoyer. Ce que j'ai effectivement fait (suivant l'avis de Mr le marquis de L'HÔPITAL, avec lequel j'en conférai le même jour), non seulement parce que j'ai conçu que vous ne seriez pas content que Mr votre frère fût ici à l'ouverture de vos analyses sans y être aussi pour vous défendre, et sans que les siennes soient publiques. Mais aussi par l'appréhension que j'ai que l'académie ne m'impute le vacarme qu'il pourra faire ici contre elle ou dans les journaux étrangers. A cela Mr le président a dit qu'il fallait que ce fût vous qui redemandassiez vous même votre paquet . . . Voyez et me dites incessamment ce que vous souhaitez en ce rencontre.

La réponse de JEAN BERNOULLI étant perdue, nous ignorons s'il réclama expressément son mémoire, mais en tout cas il est certain que le paquet lui fut renvoyé par FONTENELLE le 23 mars 1701. Après la mort du frère, JEAN BERNOULLI remit de nouveau à VARIGNON le paquet, qui portait encore le cachet de l'académie, et le mémoire fut enfin publié en 1706.

P. 458. »DANIEL BERNOULLI wartete noch zwei Jahre mit der Veröffentlichung seiner Methode». Cette indication

doit être un peu modifiée, car la méthode proposée par DANIEL BERNOULLI dans les Acta Eruditorum 1725, p. 473—475 avait été publiée déjà en 1724 dans l'ouvrage: DANIELIS BERNOULLII *exercitationes quædam mathematicæ* (Venetiis. MDCCXXIV, in-4°), p. 77—80. Par la »Licenza» insérée à la page 96 de cet ouvrage, on voit qu'il était achevé déjà le 11 juillet 1724.

P. 460. »Von CHRISTIAN GOLDBACH ... wissen wir kaum irgend etwas vor seiner Reise, welche er um 1720 nach Italien machte». Dans notre *Nouvelle notice sur un mémoire de Chr. Goldbach relatif à la sommation des séries, publié à Stockholm en 1718* (Biblioth. Mathem. 1887, p. 23—24), nous avons appelé l'attention sur une lettre adressée le 24 novembre 1723 par GOLDBACH à DANIEL BERNOULLI, où celui-là donne quelques renseignements sur ses occupations avant 1720. Par la notice citée et par la note antérieure sur le même sujet (Biblioth. Mathem. 1884, col. 15—16), on voit que GOLDBACH avait séjourné à Stockholm en 1718, et qu'il y avait publié alors un *Specimen methodi ad summas serierum,* reproduit plus tard dans les Acta Eruditorum 1720, p. 27—31; un résumé en suédois de ce *Specimen* se trouve aux pages 455—461 de l'ouvrage de A. G. DUHRE: *Första delen af en grundad geometria* (Stockholm 1721, in-4°). DUHRE dit (p. 459) que le *Specimen* a été imprimé en 1719, mais cette indication est probablement inexacte (cf. Biblioth. Mathem. 1884, col. 16). Dans son opuscule, GOLDBACH fait voir aussi que la série infinie dont le terme général est

$$\frac{e}{px^2 \pm qx \pm r},$$

peut être sommée si, le dénominateur étant réduite à la forme

$$p(x \pm a)(x \pm a + n),$$

n est un nombre entier, et que la somme en est

$$\frac{e}{np}\left(\frac{1}{1 \pm a} + \frac{1}{2 \pm a} + \ldots + \frac{1}{n \pm a}\right).$$

Nous ne nous souvenons pas d'avoir vu ce théorème signalé dans aucun traité antérieur à 1718.

La signature dont GOLDBACH s'est servi dans les Acta Eruditorum 1720, est C. G., et il nous semble très probable qu'il soit aussi l'auteur de la petite note *Temperamentum musicum universale,* publiée sous la même signature dans les Acta Eruditorum 1717, p. 114—115.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

M. Fiorini. Erd- und Himmelsgloben, ihre Geschichte und Konstruktion. Nach dem italienischen frei bearbeitet von **S. Günther.** Leipzig, Teubner 1895. 8°, VI + 137 + (1) p.

L'original de ce traité: *Le sfere cosmografiche e specialmente le sfere terrestri* a été publié dans le Bollettino della società geografica italiana. En le traduisant en allemand, M. Günther l'a considérablement augmenté, de manière que l'étendue de la traduction est à peu près le double de celle de l'original.

L'ouvrage est divisé en 17 chapitres dont les deux premiers se rapportent à l'antiquité, le 3e aux Arabes, le 4e au moyen-âge et le 5e à la renaissance. Les globes du 16e siècle et les méthodes pour leur construction sont traités dans les chapitres 6—10, et ceux du 17e siècle dans les chapitres 11—13. Enfin les auteurs ont consacré deux chapitres au 18e siècle, un au 19e siècle et quelques pages à des renseignements sur des globes lunaires.

Dans l'ouvrage de MM. Fiorini et Günther on trouve un très grand nombre d'intéressantes notices sur les globes terrestres et les sphères célestes, leur construction et leur histoire. Pour donner une idée de l'abondance des matériaux que les auteurs y ont utilisés, il suffit de mentionner qu'environ 600 auteurs ou constructeurs sont cités dans le texte ou dans les notes.

Dans le chapitre XII (»Globusstreifen mit nicht-kreisförmiger Begrenzung»), nous trouvons (p. 86—87) le passage suivant: »Antonio Floriani ist der Name des Kartographen, welcher als der erste eine neue Bahn bei der Konstruktion der Globussegmente betrat». Dans une note annexée à ce passage, M. Günther avertit, qu'il existe à la bibliothèque royale de Stockholm une mappemonde par Alonzo de Santa Cruz, faite en 1542 au moyen d'une méthode de projection parfaitement semblable à celle de Floriani, et il ajoute: »Weitere Untersuchungen werden uns darüber vergewissern müssen, ob und inwieweit dem ganz unbekannten Spanier vor dem Italiener, dessen Leistungen sich doch einigermassen klarer überblicken lassen, wirklich in dieser Angelegenheit die Priorität gebührt». Nous nous permettons de faire observer que Santa Cruz n'est point une personne »tout à fait inconnue». En effet, Navarrete a publié sur lui une notice biographique à part avec le titre: *Noticia biográfica de Alonso de Santa Cruz* (Madrid 1835), et plusieurs autres auteurs ont donné des renseignements sur

lui (voir p. ex. le petit article de RUIZ ARBOL cité par VICUÑA dans la Biblioth. Mathem. 1890, p. 18, et l'ouvrage de M. A. F. VALLÍN, *Cultura cientifica de España en el siglo XVI. Discursos leídos ante la real academia de ciencias exactas, fisicas y naturales,* Madrid 1893, p. 50—51, 77, 79, 80, 229, 252, 265). Il en résulte que SANTA CRUZ, »comografo real» à partir de 1536 et mort en 1572, a été un cartographe très actif, et qu'il s'est aussi occupé à des problèmes d'astronomie pratique, par exemple la détermination de la longitude sur mer. Par suite, si FLORIANI ne s'est servi de sa méthode que vers l'an 1553, il semble plus probable que le droit de priorité appartienne à SANTA CRUZ. — M. GÜNTHER mentionne aussi que M. E. W. DAHLGREN a publié une reproduction de la mappemonde de SANTA CRUZ; il convient de signaler que cette reproduction a paru en 1892 (non 1894), et qu'elle a été accompagnée d'une intéressante étude sur la mappemonde (*Map of the world by Alonzo de Santa Cruz 1542. Explanations by* E. W. DAHLGREN, Stockholm 1892; 47 pages grand-in-8°).

A la page 100, les auteurs indiquent que la *Cosmographia* du néerlandais P. SMIT a été publiée en 1689, et que la seconde édition en a paru en 1720. Mais d'après BIERENS DE HAAN (*Bibliographie néerlandaise historique-scientifique des ouvrages importants dont les auteurs sont nés aux 16e, 17e et 18e siècles, sur les sciences mathématiques et physiques avec leurs applications,* Rome 1883, p. 253), cet ouvrage a été publié en 1698 et réédité en 1754; la même indication est répétée aussi par HOUZEAU et LANCASTER (*Bibliographie générale de l'astronomie* I: 2, Bruxelles 1889, p. 1149).

Stockholm. G. ENESTRÖM.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von || journal d'histoire des mathématiques publié par G. ENESTRÖM. Stockholm. 8°.
1895: 4.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von M. CANTOR. Leipzig. 8°.
40 (1895): 6. — Supplement [= Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik **7**]. — **41** (1896): 1.

Aubry, A., Essai historique sur la théorie des équations.
Journ. de mathém. spéciales **19**, 1895, 81—85, 111—113, 127—131, 153—156, 181—185, 197—200.

Aubry, A., Notice historique sur la trigonométrie.
Journ. de mathém. élémentaires **19**, 1895, 104—108, 126—129, 154—157, 173—178.

Birkenmajer, L., Marcina króla z Przemyśla Geometrya praktyczna. Warszawa 1895.
8°, (4) + IX + 82 p. — La *Geometria practica* de MARTINUS DE ZORAWICA (géomètre polonais du 15e siècle).

Bosscha, J., Christiaan Huygens.
Nederlandsch Natuur- en Geneeskundig Congres, Handelingen **5** (Amsterdam), 1895, 583—611.

°**Bosscha, J.**, Christian Huygens. Rede zum 200. Gedächtnisstage seines Lebensendes. Mit erläuternden Anmerkungen. Übersetzt von T. W. ENGELMANN. Leipzig 1895.
8°. — [1·60 Mk.]

Boyer, J., Le mathématicien franc-comtois François-Joseph Servois, d'après des documents inédits.
| *Doubs*, Société d'émulation, Mémoires 1895. 26 p.

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Dritter Band. Vom Jahre 1668 bis zum Jahre 1759. Zweite Abtheilung. Die Zeit von 1700 bis 1726. Leipzig, Teubner 1896.
8°, p. 253—472. — [6 Mk.] — [Analyse:] Mathesis **6**$_2$, 1896, 68. (P. M.) — [Analyse du tome III: 1:] Monatshefte für Mathem. **6**, 1895, 20—21.

Carli, A. e **Favaro, A.**, Bibliografia Galileiana (1568—1895), raccolta ed illustrata. Roma 1896.
8°, VIII + 402 + (1) p. — Ministero della pubblica istruzione. Indici e cataloghi XVI.

Curtze, M., Mathematisch-historische Miscellen.
Biblioth. Mathem. 1895, 105—114.

Curtze, M., Ein Beitrag zur Geschichte der Algebra in Deutschland im fünfzehnten Jahrhundert.
Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik **7**, 1895, 31—74.

Curtze, M., Die Handschrift No. 14836 der königl. Hof- und Staatsbibliothek zu München.
Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik **7**, 1895, 75—142 + 1 pl.

°**Czuber, E.**, Aphorismen zur Entwickelungsgeschichte der Mathematik im 19. Jahrhundert. Wien 1895.
8°, 15 p. — [1 Mk.]

Derousseau, J., Historique et résolution analytique complète du problème de Malfatti.
Liège, Soc. d. sc., Mémoires **18**$_2$, 1895. 52 p.

Eneström, G., Om lifränteberäkningsmetoderna under sextonhundratalet.
Stockholm, Vetenskapsakad., Öfversigt **53**, 1896, 41—49. — Sur les méthodes employées au 17e siècle pour calculer la valeur d'une rente viagère.

Favaro, A., Serie undecima di scampoli Galileiani.
Padova, Atti e memorie **12**, 1895—1896, 11—40.

Favaro, A., Sette lettere inedite di Guiseppe Luigi Lagrange al P. Paolo Frisi tratte dagli autografi nella Biblioteca Ambrosiana di Milano.
| *Torino*, Accad. d. sc., Atti **31**, 1895—1896. 15 p.

Favaro, A., Nuove contribuzioni alla storia delle scienze nel decimosettimo secolo. Tito Livio Burattini.
Venezia, Istituto Veneto, Atti $\mathbf{7}_7$, 1896, 110—116.

Fontès, M., Caroli Bovilli liber de numeris perfectis.
Toulouse, Acad. d. sc., Mémoires $\mathbf{6}_9$, 1894, 155—167.

Fontès, M., Pierre Forcadel, lecteur du roy ès mathématiques (1560—1573).
Toulouse, Acad. d. sc., Mémoires $\mathbf{6}_9$, 1894, 282—296.

Galdeano, Z. G. de, Carácter y trascendencia de las matemáticas en la época presente. Zaragoza 1895.
8°, 61 p. — Discurso leído en la universidad de Zaragoza en la solemne apertura del curso académico de 1895 á 1896.

Galilei, G., Opere. Edizione nazionale sotto gli auspicii di sua maestà il re d'Italia. Volume V. Firenze 1895.
4°, 429 + (1) p. — Edition publiée sous la direction de M. A. FAVARO.

Günther, S., Maria Klara Eimmart, ein Bild aus dem Gelehrtenleben des XVII. Jahrhunderts.
Germania 1895, 376—385. — D'après les indications de M. GÜNTHER, MARIA KLARA MÜLLER, née EIMMART n'est pas auteur de l'ouvrage: *Iconographia nova contemplationum de sole* qui lui a été attribué (voir Biblioth. Mathem. 1895, 74, où il faut mettre aussi 1707 au lieu de 1717).

Heiberg, J. L., Overleveringen af Euklids Optik.
Kjöbenhavn, Vidensk. Selskab, Oversigt 1895, 117—131.

Heiberg, J. L., Ptolemäus de analemmate.
Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik **7**, 1895, 1—30.

Hill, G. W., Remarks on the progress of celestial mechanics since the middle of the century.
New York, Americ. mathem. soc. $\mathbf{2}_2$, 1896, 125—136.

Hurwitz, A. und **Rudio, F.**, Briefe von G. Eisenstein an M. A. Stern.
Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik **7**, 1895, 169—203.

Isely, L., Les connaissances mathématiques des anciens Egyptiens.
Arch. d. sc. phys. de Genève **33**, 1895, 587—589.

Kikuchi, D., On the method of the old Japanese school for finding the area of a circle.
Tokyo, Sugaku butsurigaku kwai, Kiji **7**, 1895, 24—26. — La méthode consiste dans l'application du théorème binomial et du procédé d'intégration de WALLIS. — [Traduit en italien:] Periodico di matem. **11**, 1896, 23—25.

Kikuchi, D., Various series for π obtained by the old Japanese mathematicians.
Tokyo, Sugaku butsurigaku kwai, Kiji **7**, 1896, 47—53. — Le plus ancien ouvrage cité par M. KIKUCHI est de la première moitié du 18e siècle.

Kohn, G., Emil Weyr †.
Monatshefte für Mathem. **6**, 1895, 1—4. — [Traduction en italien par F. GERBALDI:] *Palermo,* Circolo matem., Rendiconti **9**, 1895, 260—262.

Königsberger, L., Hermann v. Helmholtz's Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik und Mechanik. Rede zum Geburtsfeste des höchstseligen Grossherzogs Karl Friedrich am 22. November 1895. Heidelberg 1895.
4°, (2) + 51 p.

Korteweg, D. J., Das Geburtsjahr von Johannes Hudde.
Zeitschr. für Mathem. **41**, 1896; Hist. Abth. 22—23.

Loria, G., Un' opera recente sulla storia delle matematiche elementari.
Periodico di matem. **11**, 1896, 1—13. — Sur l'ouvrage de M. ZEUTHEN: *Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter* (Kjöbenhavn 1896).

[Mansion, P.], Nécrologie. J. Graindorge.
Mathesis $\mathbf{6}_2$, 1896, 48.

M[ansion], P., Le prince B. Boncompagni.
| Revue des questions scientifiques 7_2, 1894. 3 p.

Maupin, G., Note relative à un passage d'Albert Girard.
Paris, Soc. mathém. de France, Bulletin **23**, 1895, 191—192.

Mehmke, R., Przyczynek do historyi machin rachunkowych.
Prace matematyczno-fizyczne **7**, 1895, 177—182. Traduction de la note *Zur Geschichte der Rechenmaschinen* indiquée à la page 31 de la Biblioth. Mathem. 1895.

Meyer, F., Rapport sur les progrès de la théorie des invariants projectifs. Traduction annotée par H. FEHR. (Suite).
Bullet. d. sc mathém. $\mathbf{19}_2$, 1895, 213—224, 246—264.

Miller, G. A., On the lists of all the substitution groups that can be formed with a given number of elements.
New York, Americ. mathem. soc. $\mathbf{3}_2$, 1896, 138—145.

Nagy, A., Sulle opere di Ja'qub ben Ishaq Al-Kindi.
Roma, Accad. d. Lincei, Rendiconti (sc. storiche) 4_5, 1895, 157—170.

Rudio, F., Eine Autobiographie von Gotthold Eisenstein. Mit ergänzenden biographischen Notizen.
Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik **7**, 1895, 143—168.

Schlegel, V., Die Grassmann'sche Ausdehnungslehre. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik in den letzten fünfzig Jahren.
Zeitschr. für Mathem. **41**, 1896; Hist. Abth. 1—21.

Söderhjelm, Sanny, Ur den elementära matematikens historia.
| Nya svenska läroverket 1882—1892 (Helsingfors 1892). 26 p.

Söderhjelm, Sanny, Det historiska elementet i matematik-undervisningen.
Helsingfors, Pedagogiska föreningen, Tidskrift **31**, 1894, 73—77.

Söderhjelm, Sanny, Ett blad ur ekvationslärans historia.
Nya svenska lärovärkets berättelse 1895, I—XV.

Steinschneider, M., Die Mathematik bei den Juden.
Biblioth. Mathem. 1895, 97—104.

Wassilief, A., Nikolaj Ivanowitsch Lobatschefskij. Rede, gehalten bei der feierlichen Versammlung der kaiserlichen Universität Kasan am 22. October 1893. Aus dem Russischen übersetzt von F. ENGEL.
Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik **7**, 1895, 205—244.

°**Wohlwill, E.,** Galilei betreffende Handschriften der Hamburger Stadtbibliothek.
Jahrbuch der Hamburgischen wissenschaftlichen Anstalten **12**, 1895. 77 p. — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **40**, 1895; Hist. Abth. 219—220. (CANTOR.)

Question 53 [sur un opuscule de DESARGUES]. — Question 54 [sur la signification du mot *mukabala*]. — Question 55 [sur le mathématicien FRISCOBALDI].
Biblioth. Mathem. 1895, 120. (G. ENESTRÖM.)

BALL, W. W. R., A primer of the history of mathematics. London, Macmillan 1895. 8°.
Mathesis 6_2, 1896, 69. (P. M.)

CAJORI, F., A history of mathematics. New York, Macmillan & Co. 1895. 8°.
Zeitschr. für Mathem. **40**, 1895; Hist. Abth. 220—221. (CANTOR.)

LORIA, G., Le scienze esatte nell' antica Grecia. Libro II. Il periodo aureo della geometria greca. Modena 1895. 4°.
Zeitschr. für Mathem. **40**, 1895; Hist. Abth. 218—219. (CANTOR.) — Bullet. d. sc. mathém. 19_2, 1895, 265—271. (P. TANNERY.)

REBIÈRE, A., Mathématiques et mathématiciens. Pensées et curiosités. Deuxième édition, revue et augmentée. Paris, Nony 1893. 8°.
El progreso matem. **3**, 1893, 178—182.

Répertoire bibliographique des sciences mathématiques. Première série: Fiches 1 à 100. Paris, Gauthier-Villars 1894. 8°.
Jornal de sc. mathem. **12**, 1895, 120—121. (G. T.)

STÄCKEL, P. und ENGEL, F., Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss. Eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der Nicht-Euklidischen Geometrie. Leipzig 1895. 8°.
Revue des questions scientifiques 8_2, 1895, 603—613. (P. MANSION.) — Monatshefte für Mathem. **6**. 1895; Lit. Ber. 32—34. (WIRTINGER.)

VIVANTI, G., Il concetto d'infinitesimo e la sua applicazione alla matematica. Mantova, Mondovi 1894. 8°.
El progreso matem. **4**, 1894, 119—120. — La controversia (Madrid) **18**, 1896, 324.

ZEUTHEN, H. G., Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter. Vorlesungen. Kjöbenhavn, Höst 1896. 8°.
Biblioth. Mathem. 1895, 115—116. (G. ENESTRÖM.)
ZEUTHEN, H. G., Notes sur l'histoire des mathématiques. (Bulletin de l'académie des sciences de Danemark 1893—1895.)
Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{20}_2$, 1896, 24—28. (P. TANNERY.)

Mathematisches Abhandlungsregister. 1894. Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. December.
Zeitschr. für Mathem. **40**, 1895; Hist. Abth. 226—240.

[Listes d'ouvrages récemment publiés.]
Biblioth. Mathem. 1895, 116—119. — Zeitschr. für Mathem. **40**, 1895; Hist. Abth. 224—225. **41**, 1896; Hist. Abth. 39—40.

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

56. JOHAN DE WITT a publié en 1671 une brochure intitulée *Waerdye Van Lyf-Renten Naer proportie van Los-Renten*, dont une nouvelle édition par D. BIERENS DE HAAN a paru dans la *Feest-Gave van het Wiskundig Genootschap te Amsterdam ter gelegenheid der viering van zijn honderdjarig bestaan* (Haarlem 1879, fol.). D'après une indication dans le *Traité du calcul des probabilités par* H. LAURENT (Paris 1873), p. 268, l'écrit de DE WITT a été traduit en français dans ses *Oeuvres* (La Haye 1709), et M. D. KORTEWEG a bien voulu m'avertir qu'il y en a deux traductions anglaises, l'une insérée dans l'Assurance Magazine **2** (London 1853), et l'autre publiée en 1856 en Amérique par R. G. BARNWELL.

On demande:

1) des indications bibliographiques exactes sur les traductions signalées ci-dessus et sur d'autres traductions du même écrit, s'il en existe;
2) une liste des travaux où l'écrit de DE WITT a été l'objet d'une analyse détaillée. (G. Eneström.)

57. Le médecin italien APOLLONIO MENABENO a publié en 1581 un écrit intitulé: *Libellus de causis fluxus & refluxus aquarum Stocolmiensium. In quo continentur non pauca de fluxu & refluxu maris generatim dicta* (Mediolani, Apud Michaelem Tinum. M. D. LXXXI), signalé aussi par M. RICCARDI dans la *Biblioteca matematica italiana.* Où peut on avoir des renseignements biographiques sur MENABENO? On a conjecturé qu'il ait

été pendant quelque temps le médecin du roi suédois JOHAN III (né en 1537, mort en 1592); est-ce que cette conjecture est juste? (G. Eneström.)

58. Dans une lettre adressée le 15 mai 1714 par JEAN BERNOULLI au jeune mathématicien anglais WILLIAM BURNET (né en 1688, mort en 1729) et dont une copie est gardée dans la bibliothèque de l'académie des sciences de Stockholm, on trouve le passage suivant: »Pour ajouter un mot sur le *Commercium epistolicum,* je ne sais si vous savez que M. LEIBNITS, qui se trouve à Vienne depuis plus d'un an, y a publié une petite réponse sur une feuille de papier, qui doit servir d'avantcoureur à une réponse plus ample quand il sera de retour chez lui». Par ce passage on pourrait croire que LEIBNIZ a fait imprimer lui-même à Wien une édition de l'opuscule connu sous le nom de »la brochure de l'an 1713» (»Das Flugblatt von 1713»; cf. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* III: 2, p. 301). Est-ce qu'on connaît actuellement quelque exemplaire d'une telle édition?

(G. Eneström.)

Remarque sur la question 34. Cette question (voir Bibliotheca Mathematica 1891, p. 64) a été mise au concours encore une fois pour le prix de l'année 1897 par l'académie des sciences de Madrid. (G. Eneström.)

Inhalt. — Table des matières.

STOCKHOLM, TRYCKT I CENTRAL-TRYCKERIET, 1896.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK | JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES



HERAUSGEGEBEN VON | PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1896. STOCKHOLM. N° 2.

NEUE FOLGE. 10. | NOUVELLE SÉRIE. 10.

Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr.

BERLIN. MAYER & MÜLLER. Markgrafenstrasse 51. | PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Die Mathematik bei den Juden.

Von MORITZ STEINSCHNEIDER in Berlin.

Je näher wir besser bekannten Zeiten und Erscheinungen rücken, desto knapper müssen unsere Mitteilungen werden und sich auf Nachweisung vorhandener Vorarbeiten und das eigentliche Thema begrenzen.

22. Wir treten in das *XII. Jahrh.* mit einer kurzen Erwähnung des spanischen Juden MOSES, der als Leibarzt ALFONS' VI. mit dem Namen PETRUS ALFONSI das Christentum annahm (1106; s. mein *Hebr. Übersetz.* S. 934). Seine Bedeutung für die spanische, indirect für die europäische, Literatur ist anderswo vielfach erörtert; hier sei nur auf eine Leistung im Gebiete der mathematischen Geographie hingewiesen, welche WUTTKE im Serapeum 1853 n. 18 bespricht.

Das XII. Jahrh. ist für die Gesamtentwickelung europäischer Cultur maassgebend durch die Übertragung *arabischer,* auf griechischer ruhenden *Wissenschaft.* Die Juden haben ihren Anteil daran. An der Seite des ersten Übersetzers werden wir einen jüdischen Mathematiker ABRAHAM aus Barcelona sehen, der zugleich für seine, in benachbartem Lande lebenden, des Arabischen unkundigen Glaubensgenossen die arabische Mathematik und Astronomie in hebräisches Gewand kleidete, welches sein christlicher Gefährte teilweise mit einem lateinischen vertauschte. Bald darauf trieb almohadischer Fanatismus eine Anzahl jüdischer Gelehrter in die christlichen Länder, wohin sie in

hebräischen Übersetzungen aus dem Arabischen und in eigenen Schriften ungeahnte Begriffe und Erkenntnisse und neue Ausdrücke dafür verbreiteten. Der genialste unter ihnen, ebenfalls ein ABRAHAM, der bis nach England, Italien und Ägypten seine Reisen ausdehnte, wurde mit Unrecht als Schüler des ersterwähnten bezeichnet; ihre schriftstellerische Thätigkeit *zusammenzufassen* war ich veranlasst nicht allein durch den Umstand, dass ihre Gleichnamigkeit, also dieselbe Bezeichnung »ABRAHAM IUDAEUS» Confusion und Zweifel, vermehrt durch noch andere alte Hononymi, hervorrief, sondern auch durch ihre ähnliche Wirksamkeit.[1] — Wir gehen an die Einzelheiten.

ABRAHAM BAR (Sohn des) CHIJJA ('HIJJA), HA-NASI (der Fürst), erhielt wahrscheinlich von hoher Stelle den arabischen Ehrentitel: »Sa'hib al-Schorta»,[2] welchen ich in dem Namen SAVASORDA (unten N. 6) erkannte. Er lebte sicherlich in Barcelona und hielt sich wohl nur vorübergehend in der Provence auf, dem lange fruchtbaren Mutterlande hebräischer Übersetzungen. ABRAHAM diente wahrscheinlich als Dolmetscher aus dem Arabischen dem ältesten bekannten Übersetzer aus dem Arabischen, PLATO aus Tivoli (1134—1136, s. unten N. 7). — Unser ABRAHAM scheint verschieden von »ABRAHAM IUDAEUS», dem Lehrer des RODOLPHUS BRUGENSIS, welchem ABRAHAM bei der Bearbeitung einer Schrift über das Astrolab (als Dolmetsch??) dictirte (*Hebr. Übersetz.*, S. 569, 583). — ABRAHAM B. CHIJJA's Geburts- und Todesjahr sind kaum annähernd anzugeben. Wahrscheinlich war er schon 1116 schriftstellerisch thätig und starb in höherem Alter (s. unten).

In der Aufzählung der Schriften behalte ich die Reihenfolge in der Zeitschr. für Mathem. **12**, 1867, S. 10 ff. bei und erwähne zuletzt ein Werk und einen Brief, welche nicht eigentlich zur Mathematik gehören, aber mit ABRAHAM's Studium derselben zusammenhängen. Sämtliche Schriften sind hebräische, natürlich mit Ausnahme von N. 7—9.

1. Eine Encyklopädie, betitelt: *Iesode ha-Tebuna u-Migdal ha-Emuna* (Die Grundpfeiler der Einsicht und der Turm des Glaubens), wovon nur ein Fragment erhalten ist, und zwar die allgemeine Einleitung mit dem obigen Titel nur in ms. De Rossi 1170 vor der speciellen Geometrie (unten N. 6). Ich habe daraus die Einteilung mitgeteilt (Hebr. Bibliogr. VIII, 85), wonach der I. Tractat in 4 Grundlagen zerfällt, deren erste, in 5 »Säulen», die 4 bekannten mathematischen Wissenschaften und die Logik behandeln soll. Ich habe aber einen mathematischen Teil anderswo entdeckt, nämlich Arithmetik,

Geometrie, Optik (Musik und Astronomie sollten folgen), nicht bloss im anonymen ms. München 36[16], sondern auch, mit der falschen Überschrift »Collectanea aus dem Buche der Zahl des ARCHIMEDES» in ms. Michael 772[c] (jetzt in der Bodl., bei NEUBAUER 1268[7] s. Add., im Index p. 921 unrichtig als »Arithmetik» bezeichnet) und ms. Luzzatto 114 (jetzt K. Bibl. in Berlin 244 Oct., n. 79[15] meines Verzeichnisses S. 59). Ausführlich besprach ich die Anordnung, Terminologie und die zu jedem Zweige angeführten älteren Autoren in der Hebr. Bibliogr. VII, 86 ff., letztere auch in Zeitschr. für Mathem. **10**, 1865, S. 466.

Die Wissenschaften sind hier nur encyklopädisch nach ihrem allgemeinen Inhalt, namentlich Definitionen, Quellen u. dergl. behandelt.

2. *Zurat ha-Arez* (Form der Erde),[3] gewidmet einem sonst unbekannten ABRAHAM BEN SALOMO, astronomische Geographie und Astronomie; ein zweiter Teil sollte die Astrologie behandeln, scheint aber unausgeführt oder verloren. Dieses, mit dem damals vielbenutzten arabischen ALFERGANI (s. mein *Abraham ibn Esra,* S. 120) noch genauer zu vergleichende Werk, war lange nur aus SEB. MÜNSTERS Auszug (1546) bekannt, auch nach der vollständigen Ausgabe mit hebr. Commentar, Offenbach 1720; DELAMBRE und LELEWEL kennen letztere nicht. Noch weniger bekannt war eine vollständige lateinische Übersetzung in ms. Vat. Ottob. 2079: »*Liber de forma terra ... quem traduxit in latinum magister* HYSAACH *hebraeus francogena ad compascentiam ... principis domini* ALBERTI *Sij de Sabaudia*» (Mitteilung BONCOMPAGNI's, Zeitschr. für Mathem. **12**, 1867, S. 12). Der Übersetzer (ISAK ZARFATI) erinnert an einen Homonymus (1554—1568), dessen kabbalistische Compilationen in mehreren Turiner mss. (PEYRON p. 157, 158, 316, auch in Parma ms. De Rossi 1070); doch wäre erst ALBERT von Savoyen nachzuweisen. Den Juden in allen Ländern war dieses Buch bald und lange Zeit die Hauptquelle für Geographie.

3. *Cheschbon Mahlachot ha-Kochabim* (Berechnung der Bewegungen der Sterne) in 20 Abschnitten, worauf schon in N. 2 (Ende Pf. I f. 10[b]) verwiesen wird, unter Anderen von JOSEF KASPI (um 1330) empfohlen, findet sich nur in unedirten mss. Bodl. Oppenh. Add. Oct. 5 (eine Copie GOLDBERG's vom J. 1849 aus ms. Paris), Brit. Mus. (Add. 27,106, früher Almanzi 212), Florenz, (Medic. Plut. 88. Codd. 28[5] und 30[b]), Leyden (Warner 37), Paris 1092[4], Vatican 379, Fragmente in der Bodl. (Oppenh. 1665 zu NEUBAUER 2253[4]), München 36[10]. —

Das Vorwort und der Schluss, worin ABRAHAM das astrologische Quadripartitum des PTOLEMÄUS anpreist, sind in der folgenden N. 5, S. VIII gedruckt, vgl. Zeitschr. für Mathem. **12**, 1867, S. 13. Das Werk enthält gewissermaassen die »*Canones*« zu den Tabellen (hier folgend).

4. *Luchot* (Tabellen), astronomische, welche wir vielleicht nur in einer Redaction, jedenfalls mit Noten, des ABRAHAM IBN ESRA (§ 23) besitzen. Die Radix in uns. N. 3 und 4 ist Cyklus 257 (1104—1123). Die der Untersuchung bedürftigen mss. (vgl. Zeitschr. für Mathem. **12**, 1867, 16) sind: Berlin 649 qu. (n. 102, S. 103 meines Verzeichnisses), Bodl. (URI 443, 437, NEUBAUER 2070, 2071), Cesena Pl. 28, C. 14 (MUCCIOLI II, 193). Nach Catal. Par. 1044 fänden sich dort Noten des IBN ESRA zu uns. N. 3[2] (vgl. *Hist. Lit. de la France*, t. **31**, p. 698 und meinen Catal. der hebr. mss. in München, ed. II, 1895, p. 161). — Diese Tafeln werden Tafeln des »*Nasi*«, oder des (d. h. nach) PTOLEMÄUS genannt.

5. *Ha-Ibbur* (auch *Cheschbon ha-Ibbur*,[4] Kalenderberechnung, nicht die »erste« Chronologie, wie die einzige Ausgabe durch P. FILIPPOWSKI (London 1851) auf dem Titel angiebt, aber die wichtigste, von deren historischen Nachrichten, unter Anderen in den vorangehenden Paragraphen, Gebrauch gemacht wurde.

Ausser diesen Schriften kenne ich keine astronomische. Nun hat ED. BERNARD eine astronomische Schrift von »IBN ESRA«, die er sehr lobt, aus lateinischen mss. Digby und Selden ediren wollen. Das angebliche Datum 1100 führte WOLF auf unseren ABRAHAM (s. Zeitschr. für Mathem. **12**, 1867, 17, wo ich auf ms. Digby 40 hinweise, über welches leider auch MACRAY's Catalogus [1883 p. 37] nichts Entscheidendes bietet). Das ms. aus dem Anfang des XIII. Jahrh. beginnt: Dixit ABRAHAM IUDAEUS, »Cognitum est corpus solare magnitudine omnia corpora vincere«, passt also nicht zu unseren N. 2—4 und müsste mit den astrologischen Schriften IBN ESRA's verglichen werden.

6. *Chibbur ha-Meschika we-ha-Tischboret*, eine halb arabistische Doppelbezeichnung für Geometrie in IV Abschnitten, in 2 Recensionen erhalten, deren eine vielleicht in der Encyklopädie (N. 1) stand, was heute schwer zu ermitteln wäre. Rec. A enthält Cod. de Rossi 1170 hinter der Einleitung zur Encyklopädie, ohne diese ms. München 250; Rec. B enthalten mss. München 299, Paris 1048 und 1061 (Zeitschr. für Mathem. **12**, 1867, 44), Vatican 400. Dass diese Schrift

(mit Ausnahme der Vorrede und des Epilogs) unter dem Titel: *Liber Embadorum Savasordae* von PLATO aus Tivoli ins Lateinische übersetzt (mit Hülfe des Verfassers?), in mss. zu Paris 7224 und 11246, Florenz (Magliab. Scaff. 2 Palch. IV n. 36 und St. Marco 184) und Bologna (Graf Isolani) erhalten sei, habe ich zuerst im Serapeum 1858 (N. 3 und 6) nachgewiesen, damit auch die Bedeutung des Buches, über welches ich auf Hebr. Bibliogr. VII, 85 und Zeitschr. für Mathem. **12**, 1867, 18—22 verweisen muss; vgl. auch WEISSENBORNS *Gerbert* (1888) S. 84. Das Datum 530 Arabum (20. Iuni 1116) bietet einige Schwierigkeit. Das unübersetzte Vorwort, welches die unrichtige Behandlung der Geometrie in Frankreich erwähnt, ist nach einem einzigen Pariser ms. schlecht abgedruckt in der hebr. Zeitung Hammagid (1858); ich habe längst eine bessere Redaction nach 5 mss. vorbereitet, den Epilog habe ich meiner Ausgabe der *Mischnat ha-Middot* (1864) angehängt (vgl. Biblioth. Mathem. 1894, S. 38); beide und der Schluss des Buches erschienen so eben in dem Sammelband der Gesellschaft *Mekize Nir damim* (Berlin 1895).

Bei den nun folgenden lateinischen Übersetzungen des PLATO aus Tivoli, kommt die Mitwirkung ABRAHAM's als Dolmetsch in Betracht; sie ist wahrscheinlich bei N. 7, möglich bei N. 8, zweifelhaft bei N. 9 (*Hebr. Übersetz.* S. 972, 1049). Hier wird eine Hinweisung auf anderweitige Besprechung der Autoren und Schriften genügen.

7. IMRANI (»*Embrani*«), *De horarum Electionibus,* im J. 1184? s. Zeitschr. für Mathemat. **16**, 1871, 370, auch ms. Amplon. Oct. 83[4], s. Biblioth. Mathem. 1890, 43.

8. *Capitula* (Aphorismen) an ALMANSOR, von zweifelhaftem Autor, 1136; s. Zeitschr. für Mathem. **12**, 1867, 28—36, Biblioth. Mathem. 1890, 42; *Hebr. Übersetz.* S. 972.

9. AHMED BEN IUSUF etc., Commentar zum *Centiloquium* des PTOLEMÄUS (gedruckt unter dem Namen des Commentators des *Quadripartitum*) übersetzt 1136, nennt weder PLATO noch ABRAHAM; meine Vermutung (Zeitschr. für Mathem. **12**, 1867, 41) ist nicht genügend begründet; der Übersetzer könnte JOHANNES HISPALENSIS sein (s. § 24); s. Biblioth. Mathem. 1890, 42.

10. Eine Nativität vom Jahre 1136 in Beziers ist sehr zweifelhaft, wohl eher von IBN ESRA; Zeitschr. für Mathem. **12**, 1867, 41.

Zur Ergänzung dienen folgende Notizen (vgl. Zeitschr. für Mathem. **12**, 1867, S. 5 ff.). Eine unedirte Schrift (*Me-*

gillat ha Megalle . . . »Rolle des Entrollers des Geheimnisses des Zeitpunktes der Erlösung»), handschriftlich in der Bodl. (URI 324, NEUBAUER 1233), in München 10 (s. Catal. ed. II 1895; ich habe längere Stellen daraus excerpirt), und daselbst Bibl. Merzbacher 50; auch ein Fragm. Bodl. (Opp. 254, fol., NEUBAUER 221[10c], wo der Titel *ha-Kez*, vgl. Lit.-bl. des Orient XI, 341 aus URI 160 f. 113, *ha-Kizzim* bei IBN ESRA zu Daniel 10, 31) — giebt eine chronologische Zusammenstellung von Sternconjunctionen mit den wichtigsten Weltereignissen bis zu seiner Zeit, offenbar mit Benutzung arabischer Quellen, die er auch für die nächste Conjunction im J. 1186 ausdrücklich nennt (ms. M. f. 262, s. Zeitschr. der deutschen morgenl. Gesellsch. **28**, 1874, 633); früher (f. 246[b]) beruft er sich auf die Autorität des PTOLEMÄUS.

Für die Stundenwählerei richtete er eine apologetische Epistel an einen Rabbiner (wahrscheinlich von Marseille), welche edirt ist in der Beilage zur hebr. Zeitschrift Libanon III (Paris 1866), S. 315, aber ohne den Schluss (Zeitschr. für Mathem. **12**, 1867, 6), in welchem er, sicherlich im vorgeschrittenen Alter, darauf hinweist, dass er frühzeitig von »Fürsten- und Königtum» Ehren erworben habe etc.

23. ABRAHAM IBN ESRA BEN MEIR, geboren in Toledo, bald in Cordova lebend, starb nach vielfachem Umherwandern über England und Africa durch viele Städte Italiens, wahrscheinlich in Rouen (Frankreich)[5] im Januar (nach LOEB, Revue des études juives I, 317) des J. 1067, im Alter von 75 Jahren; er war niemals in persönlicher Berührung mit ABRAHAM BAR CHIJJA, den er nur »Rabbi» (etwa = magister) titulirt.

IBN ESRA zeichnete sich durch Leistungen auf fast allen Gebieten der damaligen Studien aus und führte in einem eleganten, aber durch esoterische Hinweisungen auf sein Steckenpferd, die Astrologie, oft verdunkelten hebräischen Style arabische Wissenschaft den Juden in christlichen Ländern zu. Nachdem seine Verdienste um verschiedene Wissenszweige gewürdigt worden waren, machte ich als Laie den Versuch, das Material seiner mathematischen Arbeiten zusammenzustellen unter dem Titel: *Abraham ibn Esra (Abraham Judaeus, Avenare). Zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften im XII. Jahrh.* Zeitschr. für Mathem. **25**, 1880; Suppl. der histor.-liter. Abtheil., S. 58—128; s. darüber Hebr. Bibliogr. XX, 118); ich werde hier mit der Abbreviatur »*AiE*» auf jene Abhandlung verweisen, welche zuerst (S. 58—83) die biographischen und bibliographischen Momente überhaupt bespricht. Auch in der

kurzen Aufzählung der mathematischen Schriften folge ich der dortigen Anordnung (S. 84 ff.). Danach kommen hier in Betracht:

A) *mathematische Excurse* oder Stellen in seinen verschiedenen Schriften, welche meist an das Geheimnis des unaussprechlichen Gottesnamens (*Tetragrammaton*) knüpfen.

Dahin gehören in seinen hebr. Commentaren die Erörterungen zu Exod. 3, 15; 23, 21 und Vers 26; 32, 1; 33, 21; zu Kohelet 7, 27 (s. *AiE,* S. 88—95); ferner Stellen in dem Buche *ha-Schem,* edirt von LIPPMANN (Fürth 1838); im 6. Kap. führt der Verf. 3 Ansichten vom Werte von π an, nämlich die des PTOLEMÄUS, der »Geometer» und der Weisen Indiens (*AiE,* S. 97) und giebt das, aus den 9 Ziffern gebildete magische Quadrat in beiden Formen an.[6] Endlich folgt (*AiE,* S. 100) eine Stelle aus dem Buche *Iesod Mora* (verf. 1158), mit deutscher Übersetzung herausgegeben von dem der Mathematik kundigen M. CREIZENACH (gest. 5. Aug. 1842), Frankfurt a. M. 1840.

B) *eigentliche mathematische Monographien.*

1) *Sefer ha-Echad* (Buch der Eins, oder des Einen), zuerst in der hebr. Zeitschrift Jeschurun, herausg. von I. KOBAK, I: 1 (Bamberg 1856) sehr incorrect, nach mss. verbessert von S. PINSKER (starb vor Beendigung) Odessa 1867, auch mit lateinischem Titel (*AiE,* S. 102).

2) *Sefer ha-Mispar* (Buch der Zahl) überwiegend arithmetisch, ausführlich besprochen in *AiE,* S. 103—118, liegt nunmehr in einer guten Ausgabe mit deutscher Übersetzung von SILBERBERG (1895) vor; vgl. mein Referat darüber in der Biblioth. Mathem. 1895, 91. Es wird nunmehr Aufgabe der Historiker sein, zu untersuchen, ob etwa dieses arabistische Rechenbuch auch den Christen bekannt wurde, wie beinahe gleichzeitig der *Algorithmus* eines anderen toledanischen Juden, nämlich des getauften JOHANNES HISPALENSIS (unten § 24, s. *AiE,* S. 110).

3) Zweifelhaft ist der, von LIBRI in seiner *Histoire* aus 3 mss. edirte »Liber augmenti et diminutionis vocatus *numeratio divinationis*», welchen ein ABRAHAM nach einem *liber Indorum* verfasste. Wenn nicht ein Araber IBRAHIM gemeint ist, und die Wahl zwischen unseren beiden ABRAHAM bleibt, so würde Inhalt und Form mehr für IBN ESRA sprechen, dessen allerdings nirgends erwähntes Original ein hebräisches wäre.[7]

4) *Ta'hbula* (Kunstgriff), das sogen. Josephspiel, von 15 Schülern und 15 Taugenichtsen im Schiffe, erst 1546 gedruckt,

wozu ich Nachweisungen in *AiE,* S. 124 und im *Katalog der hebr. Handschr. in München* zu 341 (S. 184 der neuen Ausg. 1895, Anfang dieses Jahres fertiggedruckt, aber im März 1896 noch nicht ausgegeben) gegeben habe, wozu vgl. CURTZE in der Biblioth. Mathem. 1895, 35. Sollte dieses arithmetische Volksrätsel wirklich schon den Juden des XII. Jahrh. bekannt gewesen sein?

5) Das unechte Gedicht über das Schachspiel sei hier nur erwähnt (*AiE,* S. 124).

C) *Astronomisches* (*AiE,* S. 125).

1) Eine Nativität, gestellt in Beziers 1136, zweifelhaft.

2) Antwort auf 3 chronologische Fragen des DAVID NARBONI (kurz vor 1139), von mir zusammen mit MAIMONIDES' Abhandlung über die Einheit, Berlin 1847 edirt (vgl. auch Hebr. Bibliogr. XX, 118).

3) *Luchot* (astron. Tabellen), vielleicht zuerst eine Redaction der Tabellen des ABRAHAM BAR CHIJJA (§ 22, 4), oder selbständig, und zwar zuerst in Lucca (um 1145?), revidirt in Narbonne (kurz vor 1160? vgl. unten N. 9). Vielleicht gehören hieher einige lateinische mss. unter dem Namen ABRAHAM, wenn sie nicht ABRAHAM ZACUT bezeichnen. — Einzelnes enthält ms. München 343[23,29].

4) *Sefer ha-Ibbur,* Buch vom Kalender (sehr gedrängt) in 2. Recension Verona 1146, herausg. von HALBERSTAM (*so*) Lyck 1874. Ein Memorialvers, den ich im Letterbode VII, 109 veröffentlicht habe, findet sich verbessert in ROSIN's Ausgabe der Gedichte IBN ESRA's mit deutscher Übersetzung.

5) *Kele ha-Nechoschet* (Messingwerk, d. h. Astrolab) existirt in 1. Recension (1146), z. B. in ms. München 299[4], die 2. (1148) ist elend herausg. von H. EDELMANN, Königsberg 1845 (S. *AiE,* S. 125; bei SCHORR, he-Chaluz XI, 92 ist ein Schreibfehler anzunehmen). Zu einer correcten Ausgabe dienen folgende mss., welche eine von beiden Recensionen oder eine Nebenrecension enthalten: vier Bodl. mss. verzeichnet NEUBAUER, worunter (2022) mit Commentar eines SALOMO (BEN ABIGEDOR?), sieben sind in Paris, München 256 (2. Rec.), Mantua 10, Petersburg 345, Turin 71, London Jews Coll. 138/10, Wien, Pinsker 26 (1. Rec.?) und wohl noch sonst, was die Verbreitung dieser Schrift beweist. Zu vergleichen wäre die *magistr. compositio* des HENRICUS BATES (1274).

6) Eine Reihe (8) astrologischer Schriften teilweise in 2 Recensionen (1146—1148), von denen eine durch den Juden CHAJJIM 1273 in Mecheln französisch und danach das Buch *de*

mundo von HENRICUS BATES (1281) lateinisch, mit der Redaction der anderen von PETRUS D'ABANO (1293) unter dem verstümmelten Namen *Avenare* 1507 erschien, sowie eine abweichende Recension des Buches *de Nativitatibus* 1485, worin ich das Jahr 1154 nachgewiesen habe (S. 127). Auch eine spanische Bearbeitung fand einen lateinischen Übersetzer. Die Bedeutung dieser Schriften, sowohl wegen der darin gegebenen Citate als wegen ihres Ansehens in christlichen Kreisen, bedarf einer ausführlichen Monographie; hebr. mss. finden sich fast in jeder Sammlung. Einzelnes gebe ich in dem eben vorbereiteten Catalog der neuen Erwerbungen der K. Bibliothek in Berlin. Vgl. auch Biblioth. Mathem. 1889, 67—68.

7) Zwischen den 8. Originalschriften in N. 6 findet man häufig die Übersetzungen von 2 astrologischen arabischen Schriften — Fragen und über Eclipsen — des Juden MASCHALLAH. Ich bin nicht mehr sicher, dass IBN ESRA der Übersetzer sei.

8) *Iggeret* (Brief des) *Sabbath* an den Verfasser (1158 in London) gedruckt in der Sammelschrift Kerem Chemed IV (Prag 1839) S. 159—173, von S. D. LUZZATTO edirt, wendet sich gegen JEHUDA HA-PARSI's Behauptung, das israelitische Jahr sei ein Sonnenjahr gewesen, und handelt im 2. Abschnitt über Neumond (vgl. *AiE,* S. 69, A. 30).

9) Übersetzung des arabischen Werkes »Gründe der Tabellen des KHOWARESMI« von IBN AL MUTHANNA (so, s. *Hebr. Übersetz.* S. 372); ms. Bodl. (Mich. 835) und Parma, de Rossi 212, woraus ich die interessante historische Vorrede ABRAHAMS hebr. und deutsch edirt und weitläufig behandelt habe (*Zur Gesch. d. Übersetz.* etc., Zeitschr. der deutschen morgenl. Gesellsch. Bd. **24**, 1870 u. **25**, 1871).

10) Zwei Horoscope von den Jahren 1160 (in Narbonne) und 1165, s. zu München 202[4] (Katal. ed. 1895, S. 87).

Andere verdächtige Angaben bleiben unberücksichtigt.

[1] *Abraham Judaeus—Savasorda und Ibn Esra von* M. STEINSCHNEIDER, Zeitschr. für Mathem. **12**, 1867, 1—44; *Hebr. Übersetz. d. Mittelalters* S. 971.

[2] ABRAHAM rühmt sich hoher Ehren (s. Ende dieses §); wahrscheinlich wurde er als Astrolog von Fürsten und Vornehmen zu Rate gezogen.

[3] Über diesen und ähnliche Titel s. Zeitschr. für Mathem. **12**, 1867, S. 10, A. 19; *Hebr. Übersetz.* S. 950.

[4] Ms. Almanzi 8 und Vatican 379; eine Stelle bei WOLF,

Bibl. Hebr. I, 53 aus ms. Coll. Neophyt. steht in der Ausgabe p. 109.

[5] Siehe BACHER, Jewish quarterly review **6**, 1894, p. 370.

[6] Zu meinen Parallelen über dieses Quadrat füge ich: GAZZALI (A. 147), *al-Munkids,* ed. Bulak p. 50 (mit Buchstaben und Ziffern); BERTHELOT, *La chimie au moyen-âge* III, 150; F. A. P. BERNARD, *Theory of magic squares and of magic cubes.* Memoirs of the nation. acad. of Sciences, vol. IV, P. 1 (Washington 1888), p. 210—270, zuletzt Bibliographie a. 1535—1888 (aus d. XV. Jahrh. MOSCHOPOLUS); GABR. ARNOUX, *Arithmétique graphique* (Paris 1894).

[7] D. KAUFMANN vermutet, dass ABRAHAM BAR CHIJJA ein ethisches Schriftchen in arabischer Sprache abgefasst habe; das beweist immer noch Nichts für ein arithmetisches; s. *AiE,* S. 119 ff.; Hebr. Bibliogr. XX, 118.

Ein Beitrag zur Geschichte der Physik im 14. Jahrhundert.

Von Maximilian Curtze in Thorn.

Im Cod. Dresd. Db 86 befindet sich, wie ich schon in meiner Beschreibung desselben[1] mitgetheilt habe, eine Schrift, welche dort »*De Insidentibus Aquae*» betitelt ist. Ein früherer Besitzer der Handschrift, der Professor der Mathematik zu Leipzig Walentin Taw,[2] hat zu diesem Titel die Randbemerkung gemacht: »*scripsit et Archimedes de insidentibus aquae et reperitur Coloniae*». Dieselbe bezieht sich, wie Heiberg[3] wohl sicher nachgewiesen hat, nicht auf das griechische Original des Archimedes, sondern auf die durch Wilhelm von Moerbeka nach dem Griechischen gefertigte lateinische Übersetzung, deren Originalniederschrift sich im Codex Ottobonianus N° 1850 noch heute erhalten hat, während die Cölner Abschrift verloren gegangen sein dürfte. Bekanntlich hat Tartaglia diese Übersetzung des Wilhelm von Moerbeka als seine eigene drucken lassen,[4] wohl nicht das einzige Plagiat, das ihm zur Last fällt.

Unsere Abhandlung behandelt die Möglichkeit unter Zuhilfenahme des specifischen Gewichtes zu ermitteln, wieviel von verschiedenen Substanzen in einer aus denselben gemischten Masse sich befindet, und dürfte sowohl des Gegenstandes halber als wegen ihrer Beweisführungen nicht unwerth sein, der Öffentlichkeit übergeben zu werden. Für die Geschichte der Physik im 14. Jahrhundert ist sie jedenfalls ein nicht zu unterschätzender Beitrag.

[1] Zeitschr. für Mathem. **28**, 1883; Hist. Abth. S. 12 N° 37.
[2] Nach dem *Portenser Stammbuch* war Valentin Taw, Alumnus zu Schulpforta und später Prof. der Mathematik zu Leipzig.
[3] Zeitschr. für Mathem. **34**, 1889, Supplement, 1—51: *Neue Studien zu Archimedes.*
[4] A. a. O.

[*F. 272*] De insidentibus aquae.

Quoniam propter irregularem[1] quorundam corporum composicionem non potuit eorundem per geometriam haberi certa proporcio, et quoniam precia quorundam, qui emuntur et ven-

duntur, debent magnitudinibus ipsorum corporum proporcionari, necessarium fuit per ipsorum pondera corporum eorum magnitudinem proporcione reperire, ut singulis magnitudinibus per porciones suorum ponderum cognitis valeant certa precia sociari. Primo igitur iustiri, per quod examinant ponderum quantitates, racio danda est.

Est igitur instrumentum examinis ponderum virgula recta, in cuius medio est foramen recipiens perpendiculum, cum quo sustinetur virgula cum ponderibus in extremitatibus ipsius appensis, cum debent ponderis alicuius quantitatem per mensuram ponderum deprehendi.

Calculus est minima ponderum mensura ad quem [2] omnes mensurae ponderum referuntur, et sunt eius multiplices.[3]

Illius corporis ponderi calculi aequati dicuntur, quando corpore in una extremitate virgulae appenso et calculis in alia virgula in neutram partem [4] nutum facit.

Illius ponderis dicuntur esse calculi, quorum pariter acceptorum pondus illi ponderi adaequatur.

Scitum [5] pondus est, cuius calculorum numerus est scitus.

Corpus naturaliter descendens grave dicitur respectu eorum, quae habent ex natura ascendere.

Duorum gravium unius ad alium relacio duplici modo possunt considerari; uno modo secundum speciem, alio modo secundum numerositatem.

Secundum speciem, ut si volumus gravitatem auri in specie ad gravitatem argenti comparare, et debet fieri supposita duorum corporum auri et argenti aequalitate.

Secundum numerositatem fit relacio unius duorum corporum ad aliud, quando volumus discernere per pondus, an massa auri sit maior quam massa argenti, cuiuslibet magnitudinis sint datae massae.

Duorum corporum gravius secundum numerositatem dicitur, cuius virgula instrumenti nutum facit iisdem corporibus in extremitatibus virgulae appensis.

Corpora eiusdem generis dicuntur, inter quae nulla est substancialis differencia, ut auri ad aurum comparati et argenti ad argentum.

Diversacio [6] corporum in magnitudine [7] est magnitudo, in qua maior excedit minus; in pondere vero pondus, in quo gravius excedit levius.

Duarum quantitatum unius ad aliam proporcio est tanquam numeri, secundum quem illa communis mensura in ipsa continetur, ad numerum, secundum quem [8] continetur in alia.

Petitiones. 1. Nullum corpus in se ipso grave esse; ut aqua in aqua, oleum in oleo, aër in aëre non est alicuius quantitatis.
2. Omne corpus in aëre quam in aqua maioris esse ponderis.
3. Duorum aequalium corporum altero gravius esse specie, cuius pondus maiori calculi numero adaequatur.
4. Corporum eiusdem generis magnitudinum eandem esse proporcionem.
5. Omnia corpora suis calculis proporcionalia esse.
6. Aeque gravia corpora dicuntur in specie aequalia, qualium[9] pondus est aequale.

Proposicio prima. Omnis corporis pondus in aëre quam in aqua maius est per pondus aquae sibi aequale in magnitudine.

Sit enim *b* aqua, pondus aquae *a*, si *a* in aëre ponderetur. Igitur cum *a* in aqua nihil ponderet per peticionem primam, *b* in aëre ponderabit *a* in aqua, et aquae pondus sibi aequale in magnitudine. Sed *a* aqua est aequalis aquae *b*, ergo *a* in aëre [*F. 272'*] quam in aqua pondus maius est per pondus aquae sibi aequale in magnitudine. Vel paulatim effundatur, ita scilicet, quod eius millesima pars submersa sit sive octava, necesse est millesima tocius *f* sive octava.

Item eciam patet de omni alio corpore. Sit enim *a* corpus aureum, cuius *d* paulatim infundatur ita, quod eius millesima pars tanta submersa sit sive octava, necesse est millesimam differenciae tocius *f* differenciam esse, eius scilicet, quod est *a* in aëre, et *a*, cuius millesima vel octava est immersa in *d*; et sic de aliis partibus differenciae et submersi corporis. Sed quantum de auro ingreditur, tantundem de aqua exit necessario, ita quod octava aquae aequalis auro egreditur; sed auri octava in *d* aquam immergitur, et sic de aliis partibus. Sitque tota aqua aequalis *a* in quantitate et non in pondere, et eius pondus *g*. Est ergo proporcio *a* auri submersi ad differenciam *f*, sicut aquae *e* egressae ad pondus *g*; ergo permutatim, et sic liquet propositum.

Proposicio secunda. Omnium duorum corporum eiusdem seu diversi generis est unius ad aliud proporcio tanquam differenciae ponderis unius in aëre ad pondus eiusdem in aqua ad differenciam ponderis alterius in aëre ad pondus eius in aqua.

Sit unum duorum corporum *a*, et aqua ei aequalis in magnitudine *c*, et pondus aquae *e*; et sit similiter *b* corpus reliquum, et *d* aqua ei aequalis in magnitudine, et *f* pondus illius aquae. Cum igitur per praecedentem *c* aqua sit aequalis *a* corpori, et

d aqua sit aequalis *b* corpori, erit proporcio *a* ad *b* tanquam *c* ad *d*. Et cum *c* et *d* sunt corpora eiusdem generis, et *e* et *f* sunt eorum pondera, erit *e* ad *f* tanquam *c* ad *d* per quartam peticionem: ergo tanquam *a* ad *b*, quod proponebatur.

PROPOSICIO TERCIA. *Si alicuius corporis in duobus diversis liquoribus et in aëre fuerit data gravitas, unius eorundem liquorum ad gravitatem alterius in specie erit proporcio data.*

Sint duo liquores aqua et oleum, et sit *a* corpus, cuius pondus in aëre *c* et in oleo *d* ponderabit, igitur magis in aëre quam in aqua, vel quam in oleo per secundam peticionem. Sit *e* differencia ponderis, quam in aëre habet, ad id, quod in aqua, et sit *f* differencia ponderum aquae et olei corporum, quorum utrumque est aequale corpori *a* per primam. Sit igitur *g* aqua, cuius pondus est *e* et sit *h* oleum, cuius pondus est *f*. Quoniam igitur *g* et *h* sunt aequalia corpora [*F. 273*] diversorum generum, et *c* et *f* sunt eorum pondera data, habemus proporcionem per terciam peticionem.

PROPOSICIO QUARTA. *In corpore ex düobus mixto quantum sit in eo de utroque declarare.*

Si fuerit aliquod corpus ex duobus mixtum[10] corporibus notis et[11] volumus scire, quantum in eo sit de utroque ipsorum, ponderabimus unumquodque corporum per se in aëre et in aqua, sumemus superhabundanciam ponderis cuiusque, quod in aëre habet,[12] ad illud, quod in aqua,[13] et has superhabundancias seorsim ponemus. Deinde ponderabimus corpus mixtum in aëre et in aqua, et ponderis ipsius, quod in aëre habet, superhabundanciam ad illud, quod in aqua, sumemus, et hoc semper sumitur inter duos superhabundancias. Erit ergo proporcio levis corporis, quod in mixto corpore est, ad ipsum mixtum, sicut superhabundancia ponderis mixti corporis ad superhabundanciam levioris corporis.

PROPOSICIO QUINTA. *Si duorum quorumcunque corporum, ut auri et argenti, pondera in aqua et in aëre fuerint data, eorum corporum proporciones in magnitudine et specie sunt datae.*

Sint illa duo corpora *a* et *b*, et sit pondus *a* in aëre *c* et in aqua *e*, et differencia ponderis *e* ad pondus *c* sit *g*, et sit pondus corporis *b* in aëre *d* et in aqua *f*, et differencia ponderis *f* ad *d* sit *h*; et sit *i* corpus de genere *a* aequale corpore *b*, et pondus eius in aëre *k*: dico ergo, quod *a* ad *b* vel ad *i* aequalis est proporcio, quae *g* ad *h* per primam proposicionem, et est *a* ad *i* tanquam *c* ad *k* per quartam peticionem, et est

alia, quae *g* ad *h*. Et *g* ad *h* proporcio est scita, quare *c* ad *b* proporcio est scita. Sed *c* pondus est scitum, ergo *k* pondus est scitum, et *d* fuit scitum per ypothesin: ergo proporcio ponderis corporis *a* in specie ad corpus *b* in specie, et magnitudinis *a* ad magnitudinem *b* proporcio est scita per terciam proposicionem, et sic habemus propositum.

Proposicio sexta. Corporis mergibilis, ut ferri, ad corpus immergibile, ut ceram, proporcionem in magnitudine et proporcionem in pondere secundum speciem invenire.

Sit *a* corpus mergibile, *b* eius pondus in aqua, *d* differencia. Item sit *e* corpus immergibile, et coniungantur *a* et *e* ita, quod *a* possit secum trahere *e* ad fundum,[14] et sit *f* pondus coniuncti in aëre, et *hi* pondus coniuncti in aqua, et *kl* differencia, et sit *f* parciale pondus tanquam *b*, et *h* tanquam *e*, et *k* tanquam *d*. Remanebit itaque *g* pondus in aëre corporis *e*, et *i* pondus in aqua corporis *e*, et *l* differencia. Erit ergo *d* et *l* differenciarum tanquam *a* ad *e* proporcio corporum per terciam proposicionem[15] [*F.* 273']. Et sit *m* corpus de genere *a* aequale corpori *e*, et *n* sit pondus in aëre corporis *m*, quare corporis *a* ad *de* vel *am* proporcio est tanquam proporcio differenciae *d* ad *l* per terciam proposicionem. Sed *d* ad *b* proporcio est scita, quare *b* ad *e* est scita;[16] sed *b* pondus scitum per ypothesin, ergo *n* pondus est scitum. Cum ergo *m* et *e* corpora sunt aequalia diversorum generum, et *n* et *g* pondera eorum sint scita, scita erit proporcio ponderum in specie per quintam peticionem, et eorum corporum proporcio in magnitudine est scita, quod proponebatur.

Proposicio septima. Si fuerint duae quantitates inaequales, inter quas ponatur quantitas minor una et maior alia, erit quod fit ex differencia extremarum in mediam aequale eis, quae fiunt ex differencia minorum in maximam et maiorum in minimam pariter acceptis.

Sint duae quantitates *a* maior, *b* minor, *c* media, quae sit minor *a* et maior *b*. Differencia *a* ad *c* sit *d*, et differencia *c* ad *b* sit *e*, compositumque ex *d* et *e* sit *f*, eritque *f* differencia *a* ad *b*: dico quod fit ex *f* in *c*, aequum est ei, quod fit ex *e* in *a*, cum eo, quod fit ex *d* in *b*. Sit enim, ut ex *e* in *a* fiat *g*, eritque *g*, quantum fit ex *e* in *d* et in *c*, quae sint *k* et *h*. Item ex *d* in *c* fiat *l*, eritque *l*, quantum quod fit ex *d* in *e* et in *b*, quae sint *n* et *m*. Et quia ex *d* in *e* et *e* in *d* producta aequalia, erit *k* aequalis *n*, eritque *g* aequale *h* et *n*; ergo *m* addito utrobique erunt *gm* tanquam *hn* et *m*; et quia *n* et *m*

componunt *l*, erit *gm* tanquam *hl*, quare patet propositum. Fiebat enim *g* ex *a* in *e*, et *m* ex *d* in *b*; at vero *h* ex *e* in *c*, et *b* ex *d* in *c* [*F. 274*].[17]

PROPOSICIO OCTAVA. Si fuerint tria corpora aequalia, quorum duo sunt simplicia diversorum generum et inaequalium ponderum, tercium vero corpus ex utrique simplicium genere mixtum: erit partis mixti, quae in ipso est de genere gravioris, ad partem, quae in ipso est de genere levioris, proporcio tanquam proporcio differenciae ponderis mixti ad pondus mixti corporis.

Sint duo corpora simplicia *a* et *d* aequalia, et mixtum ex eis *k* inaequale utrique eorum; et sit *b* pars eius de genere *a*, et *c* pars eius de genere *d*; et sit *a* gravius *d*, et sit *e* pondus corporis *a* et *h* pondus corporis *d*, et *fg* pondus corporis *bc* ita, quod *f* parciale pondus sit corporis *b* parcialis, et *g* parciale pondus corporis *c* parcialis. Erit itaque *e* pondus maius *fg* pondere, et *fg* pondus maius *h* pondere. Sit et *e* pondus maius *fg* pondere per differenciam *k* et sit *l* corpus aequale *b* tociens sumpto, quot unitates sunt in *k*; et sit *m* corpus aequale *c* eciam tociens sumpto. Quare erit *l* ad *m* tanquam *b* ad *e*. Et sit *en* pondus aequale *f* ponderi tociens sumpto, quot unitates sunt in *ik*; et sit *o* pondus aequale *g* ponderi tociens sumpto, quot unitates sunt in *ik*, quare erit *n* ad *o* sicut *f* ad *g*. Et sint *p* corpus et *q* pondus aequalia *a* corpori et *e* ponderi tociens sumptis, quot unitates sunt in *ik*; et sint *r* corpus et *s* pondus aequalia *d* corpori et *h* ponderi tociens sumptis, quot unitates sunt in *c*, quare *p* corpus et *i* pondus tanquam *k* differencia ad *i* differenciam. Item proporcio corporis *a* ad corpus *b* parciale tanquam ponderis *e* ad pondus *f* parciale, et tanquam corporis *p* ad corpus *l* parciale, et tanquam ponderis *q* ad pondus *n* parciale. Item proporcio corporis *d* ad corpus *c* parciale est sicut proporcio ponderis *h* ad pondus *g* parciale, et sicut corporis *r* ad corpus *m* parciale, et sicut ponderis *s* ad pondus *o* parciale, quod est proporcio quantitatis *a* ad quantitatem *b* ut *g* ad *d*, quia sumpto multiplici *a* quod sit *e* et aequale virtutis *g*, quod fit *z*, et *z* potencia similiter pones ad *b* in *h* et ad *d* virtutem *c*, et ex multiplicata simul.[18]

PROPOSICIO NONA. Corpora, quorum utrumque aequipollet uni in genere,[19] [*F. 274'*] *sunt eiusdem generis.*

Quia sumptis aequalibus de utroque illi tercio erunt ipsorum virtutes aequales ad invicem, quia tercius *g* patet, et additis, si sint minora, per diffinitionem corporum eiusdem generis.

Proposicio decima. Cum fuerint corporum in magnitudine et virtute proporcio una, erunt eiusdem generis.

Proporcio corporum sit *a* ad *b* et potenciarum *g* ad *d*, dico quod *a* et *b* sunt eiusdem generis, quia corpus est generis *a* sic aequale corpori *b*, cuius potencia *z* erit, ergo *b* ad *a* ut *z* ad potenciam ipsius *a*, quae est *g*. Patet propositum per praemissam.[20]

[1]) Mspt *iraritatem* (!). — [2]) *qui.* — [3]) *et sunt eius multiplices* verbindet das Mspt mit dem Folgenden. — [4]) *parte.* — [5]) *Satuum* (so!) — [6]) *Disaio.* — [7]) *in magnitudine est magnitudine est magnitudo* (!). — [8]) *numeri suiquam* (!). — [9]) *in specie aequalium.* — [10]) *mixtis.* — [11]) *ut.* — [12]) *scilicet quam habet in aëre.* — [13]) *in aqua* habe ich zugesetzt. — [14]) *f. dum.* — [15]) *proporcionem.* — [16]) *sita.* — [17]) Hier schiebt das Mscpt am Ende der Seite den folgenden Lehrsatz nochmals in etwas anderer Fassung ein: *Si fuerint tria corpora aequalia, quorum duo sunt simplicia diversorum generum, aliud vero mixtum ex utrisque gravium unius gravius reliquo, erit partis, quae in ipso est de genere gravioris, ad partem, quae in ipso est de genere levioris, proporcio differenciae ponderis mixti ad pondus levioris ad differenciam ponderis gravioris ad pondus mixti.* — [18]) Hier ist der Sinn dadurch getrübt, dass der Abschreiber mit einem male in die Abhandlung *de gravi et levi* des Euklides geräth. — [19]) Hinter *genere* steht im Mscpte noch *quoque.* — [20]) Die beiden letzten Sätze sind in umgekehrter Ordnung die beiden letzte Sätze des Fragmentes *de gravi et levi* Euklids und gehören jedenfalls nicht an diese Stelle. Mit Satz 8 hatte wohl die ursprünglich beabsichtigte Abhandlung ihr Ende erreicht.

Zum Andenken an Ludwig Ofterdinger.

Von HANS KÜNSSBERG in Dinkelsbühl.

Am 10. April dieses Jahres verstarb in Ulm im Alter von 86 Jahren Prof. Dr. LUDWIG OFTERDINGER. Geboren zu Biberach am 18. Mai 1810 studierte er vom J. 1828—1831 auf der Universität Berlin Mathematik und Astronomie, erhielt 1829 den goldenen Preis für die von der Universität Berlin gestellte mathematische Preisaufgabe über »Die Theorie der Grenzen», promovierte dortselbst am 16. Juli 1831 zum Doktor der Philosophie und Mathematik, habilitierte sich im Herbst 1831 an der Universität Tübingen als Privatdozent für Mathematik, Astronomie und Physik, wurde dort später ausserordentlicher Professor und im Jahre 1852 Professor der Mathematik am Obergymnasium in Ulm. Im Jahre 1875 trat er in Pension, war aber nach wie vor wissenschaftlich und litterarisch sehr thätig auf dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Pädagogik, der Litteraturgeschichte, insbesondere der Wielandforschung und in der Politik; sein Lieblingsstudium aber blieb bis in seine letzten Tage die Geschichte der griechischen Mathematik. Er war Mitglied mehrerer gelehrter Gesellschaften und Vereine, z. B. der Valdarnesischen Akademie der Wissenschaften, der von Valle Tiberina, der Gesellschaft zur Verbreitung der mathematischen Wissenschaften zu Hamburg, des Vereins für Mathematik und Naturwissenschaften in Ulm, etc.

Von seinen im Druck erschienenen Arbeiten sind zu erwähnen:

1. Die oben genannte Preisschrift »de limitum theoria». Der erste Teil derselben bildete seine Doktorsdissertation mit dem Titel: *Methodorum expositio, quarum ope principia calculi superioris inventa sunt.* Der zweite Teil enthält den Versuch, das 4. Porisma von FERMAT auf Kegelschnitte anzuwenden.
2. *Beiträge zur Wiederherstellung der Schrift des Euklides über die Theilung der Figuren.* Ulm 1853.
3. *Beiträge zur Geschichte der griechischen Mathematik.* Ulm 1860.
4. *Beiträge zur Geschichte der Mathematik in Ulm bis zur Mitte des 17. Jahrhunderts.* Ulm 1867.
5. *Zum Andenken an Keppler.* Ulm 1872.

6. *Discurs, welcher Gestalt allerhand Ulmische Massachen in einander zu verknüpfen und zu conservieren sein möchten von* J. Keppler. Ulm 1872.
7. *I. G. F. von Bohnenberger.* 1885.
8. *Tobias Mayer.* Mathem.-naturw. Mittheilungen (Tübingen) 2, 1887, 116—132.
9. *Über die fünf Aufgaben des Apollonius.* Ulm 1888.
10. *Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften in Ulm.* 1890.
11. *Über den Zusammenhang der euklidischen Lehre von den geometrischen Verhältnissen mit den Anfängen der Exhaustionsmethode.* 1890.

Auch an den 1867, 1868, 1873 in Stuttgart erschienenen Mathematischen Unterhaltungen von Riecke, namentlich am 3. Heft, hatte er einen Anteil.

Von seinen historischen Forschungsresultaten sind besonders wertvoll seine Untersuchungen über die von Pappos beschriebenen analytischen Schriften der griechischen Mathematiker, so z. B. seine Sichtung der fünf geometrischen Aufgaben des Apollonios, welche schon durch ihre Beziehungen auf die neuere synthetische Geometrie einen grossen Erfolg aufzuweisen haben; nicht geringere Beachtung verdienen seine schönen Entwicklungen über die analytische Methode der Alten.

Ferner verdanken wir ihm tiefgehende Untersuchungen über das V. Buch der euklidischen Elemente und die Exhaustionsmethode, gewissermassen die höhere Analysis der Alten. Er geht hiebei von der Ansicht aus, dass die schon den Ägyptern und Babyloniern einigermassen bekannte Lehre von den geometrischen Proportionen von Pythagoras und seinen unmittelbaren Schülern, wenn auch zunächst nur mit Beschränkung auf ganze Zahlen, weiter ausgebildet wurde auf Grund einer ähnlichen Erklärung, wie sie Euklid in seiner ersten arithmetischen Schrift (Elem. VII, def. 20) aufstellt: 4 Zahlen a, b, c, d bilden eine geometrische Proportion, wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = m$, wo m eine ganze Zahl bedeutet. Da nun im V. Buch der *Elementa* auch von ungleichen Verhältnissen, wie sie namentlich zum Studium des Archimedes so nötig sind, die Rede ist, so lasse sich die 5. Definition so ausdrücken: Wenn $\frac{a}{b} > \frac{m}{n}$, so ist $na > mb$, und wenn zugleich $\frac{c}{d} \gtreqless \frac{m}{n}$, so ist $nc \gtreqless md$ und umgekehrt. Am ausgiebigsten hätten die Alten von der ungleichen Verhältnissen

Gebrauch gemacht durch Verbindung derselben mit der apagogischen Beweisart. Eine Verallgemeinerung der letzteren rühre von LUCAS VALERIUS (1604) her, welcher dieselbe die Methode »*per explosum excessum atque defectum*» nannte; erst A. TACQUET (1669) soll dafür die noch jetzt geläufige Bezeichnung »Exhaustionsmethode» eingeführt haben.

Bekanntlich hat schon HIPPOKRATES den Satz bewiesen, dass Kreisflächen sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten. Hiezu erinnert OFTERDINGER daran, dass von jeher viele neue Sätze durch Analogie und Induktion aufgefunden worden seien und dass man daher annehmen dürfe, HIPPOKRATES habe aus Elem. XII,1 den Satz XII,2 abgeleitet, ohne ihn gerade streng bewiesen zu haben, und diese Vermutung liege um so näher, als in ähnlicher Weise PAPPOS in einer Reihe von Sätzen beweist, dass unter allen regulären Polyedern von gleicher Oberfläche dasjenige den grössten Inhalt hat, welches von den meisten Seitenflächen begrenzt wird, und hieraus durch Analogie den Satz folgert, dass unter allen regulären Körpern von gleicher Oberfläche die Kugel das grösste Volumen besitze.

Ein weiteres Verdienst erwarb sich OFTERDINGER durch seinen gründlichen Versuch einer Wiederherstellung des von PAPPOS und PROKLOS erwähnten, verloren gegangenen Buches des EUKLID über die Teilung der Figuren, vermutlich einer Sammlung von Aufgaben für die praktische Geometrie und zugleich einer Mustersammlung für die Schüler des EUKLID. Da die beiden von DEE, bezw. WOEPCKE behandelten arabischen Manuskript-Fragmente, das Oxforder und Pariser, schwer zu beschaffen sind, so gewinnt diese Arbeit OFTERDINGERS besonderen Wert, wenn er sich auch dagegen verwahrt, als ob er behaupte, dass EUKLID seine Schrift genau so und in derselben Ordnung wie er verfasst habe. Soviel stellt er indes als sehr wahrscheinlich hin: Im allgemeinen liess EUKLID die Sätze folgen nach der Art der zu teilenden Figuren; im besonderen werden wohl die Sätze im Pariser Manuskript und dann erst die im Oxforder auf einander gefolgt sein.

Seit einer Reihe von Jahren war OFTERDINGER damit beschäftigt, eine Gesamtausgabe aller seiner kleineren Schriften mit Verbesserungen, Zusätzen und weiteren Ausführungen vorzubereiten, doch blieb ihm sein sehnlichster Wunsch, die Vollendung seines Werkes noch zu erleben, leider versagt.

Le commentaire de Jakob Ziegler sur la "Saphea" de Zarkali.

Par G. Eneström à Stockholm.

Dans son intéressant mémoire: *Jakob Ziegler, ein bayrischer Geograph und Mathematiker*[1] M. S. Günther, ayant rapporté (p. 19) un passage d'un ouvrage[2] de Ziegler où celui-ci fait mention de son commentaire sur la »Saphea«, ajoute que ce commentaire lui est inconnu. En effet, on ne connaît actuellement aucun écrit sur ce sujet portant le nom de Ziegler. Mais comme la forme latinisée de ce nom est »Lateranus«,[3] et comme il y a dans la bibliothèque impériale de Wien un manuscrit[4] (Cod. 5280) contenant un commentaire sur la »Saphea« par »Jacobus Lateranus ex Landoia Bavariæ«, il est évident que ce commentaire est identique à celui signalé par Ziegler dans le passage cité.

Le manuscrit a été mentionné par M. Steinschneider dans ses *Études sur Zarkali*[5] et plus tard dans une petite note *Über eine lateinische Bearbeitung von Zarkali's Saphea* insérée à la Biblioth. Mathem. 1890, p. 11—12. Il en résulte que le commentaire de Ziegler a été composé en 1504 à Köln, et qu'il n'est pas, comme M. Steinschneider l'avait cru d'abord, le même que celui publié en 1534 par Schöner.[6] D'autre part Schöner a reproduit un passage de l'écrit de Ziegler se rapportant à l'usage de la *postica* (dos ou côté opposé) de l'instrument.

Dans son mémoire,[7] M. Günther fait observer aussi qu'on trouve différentes versions sur l'année de naissance de Ziegler, mais que celui-ci naquit sans doute avant 1493. La justesse de cette remarque est mise hors de doute par la date du commentaire, que Ziegler n'avait évidemment pu composer à l'âge de 11 ans.

[1] Forschungen zur Kultur- und Litteraturgeschichte Bayerns. Herausgegeben von K. von Reinhardstöttner, 4, 1896, p. 1—61.

[2] *De solidae sphaere constructione* (Basileæ 1536).

[3] Ziegler = lateranus = tuilier. — Une notice de Schelhorn citée par M. Günther (l. c. p. 34) semble indiquer qu'il

existe un autre manuscrit de Ziegler où celui-ci s'est appelé »Lateranus».

[4] *Tabulae codicum manu scriptorum in bibliotheca palatina Vindobonensi.* T. IV (Wien 1870), p. 85.

[5] Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **17**, 1884, p. 789—794.

[6] *Sapheae recentio res doctrinæ patris Abrysakh Azarchelis summi astronomi* (Norimbergæ M.D.XXXIIII).

[7] Nous saisissons cette occasion pour faire observer que la notice inexacte de Joh. Messenius, d'après laquelle Ziegler aurait été »Matheseos in academia Upsaliensi professor», et que M. Günther (l. c. p. 34) avait cherché en vain dans la *Schondia illustrata* de Messenius, se trouve dans le petit écrit *Sveopentaprotopolis* (Stockholm 1611, cap. 16) du même auteur.

RECENSIONEN. — ANALYSES.

W. W. R. Ball. A PRIMER OF THE HISTORY OF MATHEMATICS. London, Macmillan 1895. 8°, IV + 146 p.

Ce livre est essentiellement un extrait de la seconde édition de l'*Account of the history of mathematics,* et les additions que M. BALL y a faites, ne dépassent guère deux pages. Par conséquent, comme nous avons rendu compte de l'*Account* dans la Biblioth. Mathem. 1893, p. 90—91, nous aurions pu nous restreindre à mentionner la publication du *Primer,* et ajouter que plusieurs des erreurs que nous avions trouvées dans la 2e édition de l'*Account,* se sont glissées aussi dans le *Primer.* Mais l'auteur semble vouloir considérer lui-même le *Primer* comme un ouvrage à part ayant pour but de donner une exposition condensée et en même temps populaire de l'histoire des mathématiques, à l'usage de professeurs et d'étudiants; pour cette raison nous nous sommes décidé à lui consacrer ici une analyse particulière, d'autant plus qu'il nous manque actuellement un abrégé si succint de l'histoire des mathématiques et que, par conséquent, il est d'un certain intérêt de savoir, si le *Primer* a comblé cette lacune ou non.

Tout d'abord nous faisons observer qu'un abrégé de l'histoire des mathématiques peut être rédigé de différentes manières. En effet, on peut y attacher de l'importance exclusivement à la filiation des idées et des méthodes scientifiques, et omettre tous les détails qui ne s'y rapportent pas; un ouvrage de cette espèce est p. ex. le traité récemment paru de M. ZEUTHEN: *Om den historiske Udvikling af Mathematiken som exakt Videnskab indtil Udgangen af det 18de Aarhundrede.* D'un autre côté on peut se contenter de réunir, en ordre chronologique, des renseignements sur les découvertes mathématiques les plus importantes, comme l'a fait p. ex. M. FELIX MÜLLER dans ses *Zeittafeln zur Geschichte der Mathematik.* Assurément, toutes les deux espèces d'abrégés sont utiles, chacun en son genre.

M. BALL a évidemment voulu tenir le milieu entre ces deux extrêmes. D'une part on trouve dans son *Primer* un assez grand nombre de notices historiques, biographiques et bibliographiques, d'autre part il y a inséré ça et là de petits aperçus sur le développement des idées mathématiques. Sans doute il a senti qu'une exposition de la filiation des méthodes mathématiques, quelque intéressante qu'elle soit, ne deviendrait guère populaire, et qu'une simple énumération des découvertes mathématiques, très recommandable pour un livre de référence, n'est pas non plus convenable à un traité populaire.

Il s'ensuit de ce que nous venons de dire que nous n'avons rien à objecter contre le plan général de l'ouvrage de M. BALL. Quant à l'exécution du plan, il nous faut avouer que, dès le commencement, nous avons eu l'impression que le *Primer* est assez inégalement rédigé. Ainsi p. ex. neuf pages sont consacrées à NEWTON et $3\frac{1}{2}$ pages à PASCAL, tandis que la notice sur EULER occupe environ $\frac{1}{2}$ page, dont 11 lignes se rapportent à son action scientifique. Mais il pourra se faire que ces inégalités de l'exposition dépendent du but de l'ouvrage, et nous passons à examiner de plus près les indications y contenues.

Il va sans dire que dans un exposé complet de l'histoire des mathématiques, où l'on doit mentionner des faits par milliers, il est presque impossible d'éviter un certain nombre d'indications inexactes, mais que cet inconvénient diminue à mesure qu'on abrège l'exposition. D'autre part la nécessité d'être court amène le besoin d'élire précisément les renseignements les plus importants et de leur donner une forme non seulement exacte mais en même temps concise, ce qui peut occasionner parfois de grandes difficultés. En examinant le livre de M. BALL, nous croyons avoir trouvé qu'il n'a pas réussi à surmonter ces difficultés. Non seulement il rend compte d'un grand nombre de faits peu importants pour l'histoire des mathématiques, mais ses indications sont trop souvent données sous une forme peu satisfaisante. Pour ce qui concerne la première remarque, nous ne nous arrêterons pas aux nombreuses anecdotes citées par M. BALL, ni à l'espace disproportionné qu'occupent dans le *Primer* les renseignements biographiques, car M. BALL pourra nous répondre que ces anecdotes et ces renseignements sont intercalés seulement pour lui fournir beaucoup de lecteurs, et que, en tout cas, ils n'amènent point de désavantage. Mais nous voulons faire ressortir que le choix en donnera lieu à des remarques fondées. En effet, quel intérêt le lecteur peut-il avoir à apprendre (p. 121) à peu près autant sur le *père* de POISSON que sur la vie d'un mathématicien si éminent que LÉONARD EULER? Et si M. BALL a jugé nécessaire de rapporter une partie de la caractéristique que BOSSUT (*Histoire des mathématiques,* Paris 1810, II, p. 428—429) a donnée sur CLAIRAUT, pourquoi citer (p. 105) précisément le passage le moins intéressant au point de vue scientifique?

En dehors des anecdotes et des notices biographiques, il y a aussi dans le *Primer* d'autres renseignements qui nous semblent inutiles dans un abrégé de l'histoire des mathématiques. En voici quelques exemples. »JORDANUS, whose works were

almost unknown until the last few years» (p. 48); »DESARGUES ... whose name until recently was almost unknown» (p. 75); »we know little of the life of STEVINUS» (p. 69). Toutes ces indications se rattachent évidemment à l'histoire des recherches historico-mathématiques, et des remarques semblables peuvent être faites relativement à un très grand nombre d'autres mathématiciens. — »The stories ... of the use of burning glasses to destroy the ships of the Roman blockading squadron will recur to most readers» (p. 20). Il est très problématique s'il y a quelque fondement pour l'histoire à laquelle M. BALL fait allusion, et pour cette raison il nous semble le mieux de la passer sous silence dans un abrégé.

Nous avons dit plus haut que les indications du *Primer* ne sont pas toujours données sous une forme satisfaisante. En effet, plusieurs de ces indications sont trop catégoriques, p. ex. celles-ci: »ARCHIMEDES ... marvellous mathematical powers have been surpassed only by those of NEWTON» (p. 19); »in the old and medieval world ARCHIMEDES was unanimously reckoned as the first of mathematicians» (p. 23); »ultimately he [APOLLONIOS] returned to Alexandria and lived there till his death» (p. 23); »PTOLEMY ... died in 168» (p. 28); »LEONARDO of Pisa was born in 1175» (p. 46); »mathematicians had barely assimilated the knowledge obtained from the Arabs, including their translations of the works of Greek writers, when the refugees who escaped from Constantinople after the fall of the eastern empire brought with them the original books and the traditions of Greek science» (p. 55).

Parmi les autres observations que nous avons faites en lisant le *Primer,* nous mentionnons ici les suivantes, en faisant ressortir expressément que nous n'avons pas eu l'intention de signaler par préference les erreurs les plus importantes (à cet effet il aurait fallu annexer en plusieurs endroits de longues argumentations), et que quelques-unes des observations ne portent pas même sur des erreurs directes.

P. 17. »The Arabian writers, who may perhaps convey to us the traditions of Alexandria, represent him [EUKLIDES] as a gentle and kindly old man.» Il convient de faire observer que déjà PAPPOS (ed. HULTSCH, VII, p. 676) a dépeint EUKLIDES comme un homme doux et modeste (cf. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* I [2e éd.], p. 247).

P. 18. Il nous semble très étrange que M. BALL ne fasse aucune mention du 13e livre des *Elementa;* au moins il aurait pu signaler que ce livre existe.

P. 26. L'exactitude de l'indication que HERON a vécu vers l'an 120 avant J.-C. semble actuellement un peu douteuse. MM. DIELS, P. TANNERY et CARRA DE VAUX (cf. Biblioth. Mathem. 1894, p. 88—89) se sont efforcés de démontrer qu'il faut placer HERON à une époque plus basse, en tout cas après J.-C.

P. 28. »PTOLEMY was the author of numerous works on mathematics.» Autant que nous sachions, PTOLEMEUS n'a écrit qu'un ouvrage de mathématiques pures; cet ouvrage est actuellement perdu, mais PROKLOS nous en a conservé quelques passages (cf. CANTOR, l. c. I [2 éd.], p. 395).

P. 29. »It would seem that he [PAPPOS] discovered the focus in the parabola.» Nous n'osons point affirmer que cette opinion soit fausse, mais nous nous permettons de faire remarquer qu'elle n'est pas généralement admise; d'après M. ZEUTHEN (voir *Keglesnitslæren i Oldtiden,* Kjöbenhavn 1885, p. 239—242; *Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter,* Kopenhagen 1896, p. 211), le foyer de la parabole était probablement connu dès EUKLIDES.

P. 32. Selon M. BALL, DIOFANTOS vivait vers l'an 420 après J.-C., mais NESSELMANN (*Die Algebra der Griechen,* Berlin 1842, p. 249—251) a déjà appelé l'attention sur le fait que DIOFANTOS est cité par THEON d'Alexandrie, ce qui »als späteste Grenze seiner Lebenszeit die zweite Hälfte des vierten Jahrhunderts feststellt». M. CANTOR (l. c. I [2e éd.], p. 434—435), semble porté à placer DIOFANTOS au commencement du 4e siècle, et plusieurs auteurs (voir p. ex. F. MÜLLER, l. c., p. 35) partagent l'opinion de M. P. TANNERY que DIOFANTOS était un contemporain de PAPPOS, c. à. d. qu'il vivait dans la seconde moitié du 3e siècle. En ce cas il faudrait modifier l'indication de M. BALL à la page 30: »In the fourth century we *begin* to come across problems which lead directly to algebraical equations.»

P. 48. »The above [c. à. d. les écrits de JORDANUS NEMORARIUS] is the earliest instance known in European mathematics of syncopated algebra, in which letters are used for algebraical symbols.» Il convient de faire observer que LEONARDO PISANO, dans un passage de son *Liber abbaci* (voir *Scritti pubblicati da* B. BONCOMPAGNI I, Roma 1857, p. 132—133; cf. CANTOR, *Ahmed und sein Buch über die Proportionen,* Biblioth. Mathem. 1888, p. 8—9) a aussi employé des lettres comme des symboles algébriques.

P. 49. »No mathematicians of the same ability as LEONARDO and JORDANUS appear in the history of the subject for

over two hundred years.» A notre avis, il y a dans la période signalée par M. BALL un mathématicien qui puisse être en quelque sorte mis au côté de NEMORARIUS, savoir NICOLE ORESME (vers 1323—1382). Voici le jugement de M. CANTOR (l. c. II, p. 125) sur l'*Algorismus proportionum* de cet auteur: »In ihm hat ORESME einen Gipfelpunkt erreicht, der so weit über das Vorherbekannte sich erhob, dass gespannte Erwartung sich äussern darf, nach welcher Richtung der nächste Fortschritt sich vollziehen werde.» En tout cas il nous semble un peu surprenant, que M. BALL n'ait pas même mentionné le nom d'ORESME.

P. 50. »About this time [c. à. d. vers le 14e siècle] the almanacks began to add to the explanation of the Arabic symbols the rules of addition, subtraction, multiplication, and division, 'de algorismo'.» Naturellement il est très possible qu'un petit traité »de algorismo» ait été annexé à quelque almanack du 14e siècle, mais nous ne croyons guère qu'on puisse dire avec raison qu'on commençait alors d'ajouter aux calendriers un tel traité.

P. 57. »In the algebra PACIOLI found expressions for the sum of the squares and the sum of the cubes of the first n natural numbers.» Cette indication n'est pas directement inexacte, mais comme M. BALL n'a mentionné aucun auteur antérieur qui eût trouvé la valeur de ces sommes, le lecteur est induit à croire qu'on en doit la connaissance à PACIUOLI. Par conséquent, on aurait désiré une notice que Σx^2 avait été trouvée déjà par ARCHIMEDES, et que la valeur de Σx^3 a été indiquée par les arpenteurs romains et par les mathématiciens arabes.

P. 60. »The chief works of TARTAGLIA are an arithmetic published in 1556 and a treatise on numbers published in 1560.» Les deux ouvrages que M. BALL a en vue, sont des parties du *General trattato di numeri e misure,* dont les deux premiers volumes ont paru en 1556 et le dernier en 1560, après la mort de l'auteur. Il n'est pas parfaitement exact de dire que le dernier volume est un traité des nombres, car il traite aussi de la géométrie et de l'algèbre (cf. CANTOR, l. c. II, p. 482—488).

P. 61. Nous regrettons que M, BALL n'ait pas jugé nécessaire de mentionner SCIPIONE FERRO, auquel on doit la première méthode pour résoudre l'équation cubique.

P. 62. »The equations he [CARDANO] considered are numerical, but in some of his analysis be used literal coefficients». Nous n'avons pu retrouver les passages où CARDANO se sert de coefficients algébriques (le passage cité à la page 251 du 2^d^ tome de l'*Histoire des sciences mathématiques et physiques* de MAX. MARIE ne nous semble guère pouvoir appuyer l'assertion de

M. BALL) et nous ne nous souvenons pas qu'ils aient été mentionnés dans aucun ouvrage d'histoire des mathématiques auquel on puisse se fier.

P. 64. M. BALL dit que PASCAL donna le premier une méthode générale pour former les coefficients dans le développement d'un binome. On pourrait y objecter que déjà STIFEL a signalé une formule recurrente pour les coefficients (comparez sur ce sujet la remarque de M. P. TANNERY dans L'Intermédiaire des mathématiciens **3**, 1896, p. 98—99).

P. 65. »Till this time it had been the custom to introduce new symbols to represent the square, cube, etc., of quantities which had already occurred in the equations». Nous nous permettons d'appeler l'attention sur une petite note *Om vanliga bokstäfver såsom tecken för obekanta storheter* (Tidsskr. for Mathem. $\mathbf{3}_4$, 1879, p. 161—165), où nous avons montré que STIFEL, dans la nouvelle édition de *Die Coss* de CHR. RUDOLFF (Königsberg 1553), a désigné l'inconnue par 1A et ses puissances successives par 1AA, 1AAA, 1AAAA.

P. 66. Par un passage du journal de CONST. HUYGENS rapporté par M. D. J. KORTEWEG dans L'Intermédiaire des mathématiciens **2**, 1895, p. 193, on trouve qu'ALBERT GIRARD est mort le 9 décembre 1632 (non 1633 comme on l'a supposé auparavant). Quant à l'année de naissance de GIRARD, M. KORTEWEG (voir L'Intermédiaire des mathématiciens **3**, 1896, p. 88) semble vouloir la fixer à 1595 (M. BALL indique 1590). Au reste GIRARD était natif de Lorraine et par conséquent il est un peu impropre de l'appeler »a Dutch mathematician».

P. 68. L'indication que HARRIOT mourut en 1620 est probablement une faute d'impression au lieu de 1621 (cf. BALL, *A short account of the history of mathematics*, 2e éd., p. 241).

P. 68. »HARRIOT was, I believe, the earliest writer who realized the advantage to be obtained by taking all the terms of an equation to one side of it». Déjà STIFEL (*Arithmetica integra*, f. 283b) avait réduit une équation à la forme $f(x) = 0$. Au reste MONTUCLA (*Histoire des mathematiques*, Paris 1758, II, p. 77) fait observer que HARRIOT emploie cette forme en passant, dans un seul chapitre de son ouvrage. Comme on sait, DESCARTES est le premier mathématicien qui s'en soit servi systématiquement.

P. 99. »I think the evidence leads to the conclusion that LEIBNIZ obtained the idea of the differential calculus from a manuscript of NEWTON's, which he saw in 1675». Sans doute

il est *possible* que l'opinion de M. Ball soit juste, mais à cet effet il faut supposer que Tschirnhaus ait: 1) vu à London la lettre sur le problème des tangentes écrite par Newton le 10 déc. 1672; 2) copié cette lettre; 3) remis cette copie à Leibniz en 1675 (cf. Cantor, l. c. III, p. 161, 174).

P. 101. M. Ball dit que, vers la fin du 17e siècle, le journal Acta Eruditorum était »the only private scientific journal of any importance». A notre avis, il y avait alors au moins un autre journal de la même nature, savoir le Journal des savants, où p. ex. plusieurs des répliques relatives à la querelle sur le problème isopérimétrique ont été insérées.

P. 103. »After the deaths of Leibniz and l'Hospital he [Jean Bernoulli] claimed the merit of some of their discoveries; these claims are now known to be false». Dans notre note *Om upptäckten af sättet att medelst differentiation bestämma värdet af en bråkfunktion, då täljare och nämnare samtidigt blifva noll* (Öfversigt af vetensk.-akadem. förhandl. [Stockholm] **51**, 1894, p. 297—305), nous avons démontré que la méthode de déterminer par différentiation la valeur d'une fraction dont le numérateur et le dénominateur tendent en même temps vers zéro, est due à Jean Bernoulli et non au marquis de l'Hôpital. Il y a donc au moins un cas où la réclamation de Jean Bernoulli était à sa place.

P. 107. »His [Daniel Bernoulli] earliest mathematical work, published in 1724, contains a theory of the oscillations of rigid bodies and a solution of the differential equation proposed by Riccati». Dans les *Exercitationes quædam mathematicæ* (Venetiis 1724) de Daniel Bernoulli nous avons cherché en vain quelque traité de la théorie des oscillations.

P. 108. En parlant de Taylor, M. Ball ne dit pas un mot sur la découverte du calcul aux différences finies. Nous ignorons si cette omission est intentionnelle ou involontaire, mais en tout cas nous la regrettons vivement (voir sur ce sujet notre analyse du tome III: 2 des *Vorlesungen* de M. Cantor dans la Biblioth. Mathem. 1896, p. 18).

P. 109. D'après M. Ball, la *Geometria organica* de Maclaurin a paru en 1719. Pour le moment nous n'avons recours à aucun exemplaire de cet ouvrage, mais d'après l'analyse insérée aux Acta Eruditorum 1722, p. 323—326, le feuillet de titre de la *Geometria organica* porte les mots: »Londini, impensis Guil. & Joh. Innys 1720». La même année d'impression est signalée p. ex. par M. Cantor, l. c. III, p. 419, et par J. W. Müller, *Auserlesene mathematische Bibliothek* (Nürnberg 1820), p. 71.

P. 109. »The result [c. à. d. le théorème de MACLAURIN] ... is at once deducible from TAYLOR's theorem, on which the proofs by STIRLING and MACLAURIN are admittedly founded». Cette indication nous semble inexacte au moins pour ce qui concerne MACLAURIN. En effet, dans l'article 751 de la *Treatise on fluxions,* MACLAURIN déduit son théorème par la méthode des coëfficients indéterminées; à la fin il ajoute qu'on peut le démontrer à l'aide du théorème des binomes.

P. 134. »The scientific treatment of the fundamental principles of algebra, initated by HAMILTON and by GRASSMANN ... was further developed by ... G. CANTOR». Le point de départ des recherches de M. GEORG CANTOR est essentiellement différent de ceux de HAMILTON et de GRASSMANN. M. G. CANTOR a cité HAMILTON une seule fois (*Zur Lehre vom Transfiniten* I, Halle 1890, p. 16) et précisément pour faire ressortir la différence essentielle entre la notion de nombre selon lui-même et selon l'éminent géomètre anglais.

Outre les fautes dont nous avons déjà parlé, il y a dans le *Primer* aussi quelques impropriétés des expressions. A la page 2, M. BALL rend compte (§ 3) des mathématiques égyptiennes et phéniciennes sous la rubrique »Mathematics under greek influence», mais vers la fin de ce paragraphe il dit: »to the interest excited by various geometrical propositions thus communicated by the Egyptian priests ... we may ascribe the commencement of the study of mathematics by the Greeks». — A la page 21 nous lisons: »confining myself to such works of his [ARCHIMEDES] as are still extant, I may mention the following», mais dans le suivant, M. BALL rend compte aussi (p. 22) d'un ouvrage perdu. — P. 44: »The Arabs introduced the trigonometrical *expressions* which are now current». — P. 103: »In 1713 [c. à. d. 8 ans après sa mort!] he [JACQUES BERNOULLI] established the fundamental propositions of the calculus of probabilities». — Comme une impropriété il faut aussi considérer le fait que M. BALL mentionne CAUCHY *après* WEIERSTRASS. — Parfois les mêmes notices sont répétées deux fois p. ex. (p. 110, 114) celle sur l'introduction de la notion de potentiel par LAGRANGE, et (p. 120, 135) celle sur la géométrie synthétique.

Quant aux jugements portés dans le *Primer* sur les mérites des mathématiciens et sur la marche du développement, il nous a paru qu'ils ne soient pas toujours bien précisés; parfois nous les avons trouvés aussi un peu superficiels.

Par ce qui précède, il s'ensuit que, à notre avis, M. BALL

n'a pas réussi à rédiger un abrégé condensé de l'histoire des mathématiques qui puisse être recommandé soit aux professeurs, soit aux étudiants. Selon nous, la cause en est qu'il n'a pas encore entrevu les grandes difficultés d'une telle tâche, ce qui l'a naturellement empêché de prendre les mesures pour s'en acquitter avec succès.

Stockholm. G. Eneström.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von || journal d'histoire des mathématiques publié par G. Eneström. Stockholm. 8°.
1896: 1.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von M. Cantor. Leipzig. 8°.
41 (1896): 2.

Curtze, M., Zur Geschichte der Übersetzungen der Elementa im Mittelalter.
Biblioth. Mathem. 1896, 1—3.

Curtze, M., Über Johann von Gemunden.
Biblioth. Mathem. 1896, 4.

Dickstein, S., Sur les découvertes mathématiques de Wronski.
Biblioth. Mathem. 1896, 5—12.

Kutta, M., Geometrie mit constanter Zirkelöffnung im Altertum.
Biblioth. Mathem. 1896, 16.

Suter, H., Nochmals der Jakobsstab.
Biblioth. Mathem. 1896, 13—15.

Zeuthen, H. G., Om den historiske Udvikling af Mathematiken som exakt Videnskab indtil Udgangen af det 18de Aarhundrede.
Inbydelsesskrift til Kjøbenhavns Universitets Aarsfest den 8de April 1896 (Kjøbenhavn 1896, in-4°), (4) p. + p. 1—90.

Question 56 [sur un écrit de Johan de Witt relatif au calcul de rentes viagères]. — Question 57 [sur l'auteur italien Menabeno]. — Question 58 [sur une brochure publiée par Leibniz en 1713]. — Remarque sur la question 34.
Biblioth. Mathem. 1896, 31—32. (G. Eneström.)

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Herausgegeben von E. Lampe. Band 25 (1893—1894). Berlin, Reimer 1896.
8°. — Les pages 1—97 contiennent un compte rendu des ouvrages d'histoire des mathématiques parus en 1893—1894.

CANTOR, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Dritter Band. Vom Jahre 1668 bis zum Jahre 1759. Zweite Abtheilung. Die Zeit von 1700 bis 1726. Leipzig, Teubner 1896. 8°.

Biblioth. Mathem. 1896, 17—24. (G. ENESTRÖM.) — Giorn. di matem. 3_2, 1896, 11—13. (G. LORIA.)

FIORINI, M., Erd- und Himmelsgloben, ihre Geschichte und Konstruktion. Nach dem Italienischen frei bearbeitet von S. GÜNTHER. Leipzig, Teubner 1895. 8°.

Biblioth. Mathem. 1896, 25—26. (G. ENESTRÖM.)

[Listes d'ouvrages récemment publiés.]

Biblioth. Mathem. 1896, 26—31. — Zeitschr. für Mathem. **41**, 1896; Hist. Abth. 78—80.

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

59. On sait que LEONELLI a publié en 1803 la première table des logarithmes d'addition et de soustraction connus sous le nom de »logarithmes de GAUSS». Mais déjà en 1639 CAVALIERI, dans son ouvrage *Centuria di varii problemi per dimostrare l'uso e la facilità di logaritmi nella gnomonica, astronomia, geograffia, altimetria, pianimetria, stereometria et aritmetica prattica; toccandosi anco qualche cosa nella meccanica, nell' arte militare e nella musica,* avait fait connaître un procédé permettant de calculer le logarithme de la somme ou de la différence de deux nombres dont on connaît les logarithmes, sans se servir des valeurs de ces nombres.

On demande une recherche historique sur les méthodes proposées avant LEONELLI pour trouver $\log(a+b)$ ou $\log(a-b)$ si l'on connaît $\log a$ et $\log b$, sans recourir à a et b.

(G. Eneström.)

Inhalt. — Table des matières.

STOCKHOLM, TRYCKT I CENTRAL-TRYCKERIET, 1896.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK | JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON | PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1896. STOCKHOLM. N° 3.

NEUE FOLGE. 10. | NOUVELLE SÉRIE. 10.

BERLIN. MAYER & MÜLLER. Markgrafenstrasse 51.

Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr.

PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Über die im Mittelalter zur Feldmessung benutzten Instrumente.

Von MAXIMILIAN CURTZE in Thorn.

Im Jahrgange 1888 dieser Zeitschrift findet sich auf S. 37 eine kurze Notiz H. WEISSENBORNS: *Über die verschiedenen Namen des sogenannten geometrischen Quadrates.* In dieser Note sowohl als in den einschlägigen Capiteln seines »*Gerbert*» (S. 111 und S. 154—156)[1] behauptet Herr WEISSENBORN, dass Astrolabium, Quadrant und geometrisches Quadrat Namen ein und derselben Vorrichtung seien. Ich will vom Standpunkte unserer Kentnisse aus diese Behauptung nicht vollständig als unrichtig hinstellen, werde mir aber erlauben im Nachfolgenden zu zeigen, dass die Schriftsteller des Mittelalters sicher recht hatten, wenn sie diese drei Instrumente wohl auseinanderhielten, und weiter zeigen, dass das *Quadratum geometricum* nur aus dem Astrolabium und nicht aus dem Quadranten entstanden sein kann. Astrolabium und Quadrant beruhen nämlich auf absolut entgegengesetzten Prämissen, welche ungefähr so sich entgegenstehen wie das Ptolomäische und das Coppernicanische Weltsystem. Dies wird sich aus einer Beschreibung der zum Höhen-, Längen- und Tiefenmessen auf denselben befindlichen Vorrichtungen absolut ergeben, und da wohl niemand das Ptolomäische und das Coppernicanische System als identisch bezeichnen würde, so ist die Identität von Astrolab und Quadrant ebenso wenig zuzugestehen. Dagegen beruht das *Quadratum geometricum,* so wie es

GERBERT und dessen Nachfolger benutzten, auf demselben Principe wie das Astrolabium. Für England giebt freilich CANTOR[2] eine Abart an, welche aus dem Quadranten abgeleitet ist, aber diese Angabe ist nicht richtig, wie ich anderswo nachweisen werde.

Bei der Beschreibung der Instrumente beschränke ich mich einzig und allein auf diejenigen Theile, welche der Feldmessung dienten, und lasse alles bei Seite, was an denselben für den Astronomen bestimmt war. In Bezug auf das *Quadratum geometricum* bemerke ich zugleich vorgreifend, dass vor PEURBACH niemand dasselbe zu astronomischen Beobachtungen gebraucht hat, dass für dieses Instrument bei keinem Benutzer vor PEURBACH von *umbra recta* und *versa* die Rede ist, und dass gerade in der universellen Benutzung durch PEURBACH diejenige Seite seiner Abhandlung hervortritt, welche allein sie zu einer vor den übrigen hervorragenden macht.

I. Vom *Astrolabium* wurde nur die Rückseite, die *postica* oder das *dorsum astrolabii* zur Feldmessung benutzt. Ich beschränke mich daher auf die Beschreibung nur dieses Theiles. Das Astrolabium bildete einen Vollkreis, welcher in 360°, *gradus dierum,* getheilt war. Bei 0° war ein Aufhängsel angebracht, an welchem man dasselbe in die Höhe halten konnte: für Sonnen- und Sternbeobachtungen, welche auf der *antica* gemacht wurden, mit der rechten, für Höhen-, Längen- und Tiefenmessungen mit der linken Hand. Sonst würde nämlich beidemale der Arm des Beobachters das Visieren nach dem Beobachtungsobjecte verhindern. Von den Aufhängsel aus, also von 0°, war der Durchmesser *ab* und der dazu senkrechte *cd* gezogen, dann aber das dem Kreise eingeschriebene Quadrat *fghi* so gezeichnet, dass seine Seiten diesen beiden Durchmessern parallel liefen. Die Seiten dieses Quadrates waren in je 24 gleiche Theile (*puncta*) getheilt und diese von den festen Durchmessern aus nach den vier Ecken hin von 1 bis 12 bezeichnet. Um den Mittelpunct des Kreises *e* war ein Diopterlineal *kl* drehbar, welches beim Visieren auf den Quadratseiten einen bestimmten Theilpunkt einschnitt.

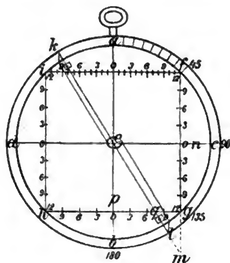


Fig. 1.

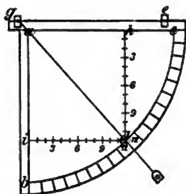
Visierte man nach einer Höhe, so wurden die Seiten des zweiten oder vierten Quadranten geschnitten, ebenso beim

Visieren von Tiefen; bei Längenmessungen dagegen traf das Lineal die Seiten des ersten und dritten Quadranten. Diejenigen Punkte, welche auf den zu dem wagerechten Durchmesser parallelen Seiten abgeschnitten wurden, hiessen *puncta umbrae rectae,* diejenigen auf den beiden vertikalen Seiten *puncta umbrae versae.* Es ist daraus klar, dass die *umbra recta* unserer Cotangente, die *umbra versa* unserer Tangente entsprechen. Visierte man nach der Höhe, so war das Dreieck *epq* dem von der Visierlinie, der Höhe und der Horizontalen gebildeten Dreiecke ähnlich, und wenn man die Entfernung zwischen dem Beobachter und dem Fusspunkte der Höhe messen konnte, so verhielt sich diese Entfernung zur Höhe, wie die abgeschnittenen *puncta umbrae rectae* zu 12, d. h. wie $qp : ep$; wurden jedoch *puncta umbrae versae* abgeschnitten, so war das obige Verhältnis gleich dem von 12 zu den abgeschnittenen *puncta umbrae versae.* Um dieser Unterscheidung enthoben zu sein, benutzte man die Ähnlichkeit der beiden Dreiecke *epq* und *enm*, aus der folgt, dass $pq : pe = en : nm$, also $pq : 12 = 12 : nm$ ist, und gab deshalb die Regel: »*Puncta umbrae versae* verwandelt man in *puncta umbrae rectae,* indem man 144 durch *nm* dividiert, und umgekehrt verwandelt Division von 144 durch *pq* die *puncta umbrae rectae* in solche *umbrae versae*». So wird ausnahmlos in allen Abhandlungen über das Astrolab und den Quadranten vom 12. bis zum 16. Jahrhundert gelehrt. Ohne die Bezeichnungen *umbra recta* und *umbra versa* zu kennen, lehrt GERBERT in zwei seiner Capitel über das Höhenmessen einmal die Berechnung direct, das anderemal unter Benutzung der Umwandlung von *puncta umbrae versae* in *puncta umbrae rectae;*[3] ob man ihm aus dieser gesonderten Betrachtung, welche die späteren Schriftsteller nicht getrennt, sondern in demselben Capitel mit der Einleitung: »*vel si velis*» abhandeln, wirklich einen so grossen Vorwurf zu machen berechtigt ist, wie Herr WEISSENBORN in seinem »*Gerbert*» es thut,[4] möchte ich doch bezweifeln. Schnitt bei einer Messung das Diopterlineal in einen der Eckpunkte des Quadrates ein, z. B. in *f*, so war es gleichgiltig ob man von 12 *puncta* oder von 45 *gradus dierum* sprach, welche abgeschnitten seien. In diesem Falle war die zu messende Höhe gleich der Entfernung des Messenden von dem Fusspunkte der zu messenden Höhe. Auch hierfür gibt ein Capitel GERBERTS die Anleitung,[5] während spätere Schriftsteller alle drei möglichen Fälle in einem Capitel abzuhandeln pflegen.

II. Den Quadranten beschreibe ich, indem ich das hier abdrucken lasse, was LEONARDO DA PISA darüber in seiner

Practica geometriae mittheilt, da er dort ebenfalls nur dasjenige angiebt, was für feldmesserische Zwecke zu wissen nöthig ist. Es heisst daselbst:[6]

Et quia pulcre et subtiliter et facile cum quadrante, quem quidem horoscopum vocant, altitudines metiuntur, ipsum quadrantem et ea, que in ipsa ponuntur ad nostrum propositum facientia, designare curavi ad presens, ut subtilius, que intendo, valeam demonstrare. Pono punctum *a* centrum et ab ipso protraho duas rectas equales *ab* et *ac* continentes angulum rectum, et spacio unius rectarum *ab* vel *ac* circino arcum *bdc* producens ipsum aliquantulum im puncto *e*, nec non et lineam *ab* produco usque ad *g*, et pono lineam *eg* equedistantem linee *ac*, et divido angulum *bac* in duo equa cum linea *ad*, et protraho a puncto *d* super rectas *ab* et *ac* cathetos *dh* et *di*; et ex hoc monstrabitur quadrilaterum *dhai* equilaterum et equiangulum esse. Quia tres anguli eius, qui sunt ad puncta *a*, *h*, *i*, recti sunt, reliquus, qui ad *hdi*, rectus est, cum omne quadrilaterum habeat quatuor angulos equales quatuor rectis; et quia angulus *bac* divisus est in duo equa a linea *ad*, erit unusquisque angulorum *dab* et *dac* semirectus; sunt enim et anguli *ahd* et *aid* recti, quare unusquisque angulorum *adh* et *adi* semirectus est. Quare trigona *hda* et *ida* equicruria sunt, enim et orthogonia, quare linea *ad* subtendens angulos rectos trigonorum *ahd* et *aid* potest duplum uniuscuiusque laterum *ah*, *dh*, *id*, *ai*; ergo et ipsa quatuor latera sibi invicem sunt equalia. Tetragonum ergo est quadrilaterum *ahdi*. Et in puncto *a* figi filum cum quodam plumbino, quod pendeat extra arcum *bdc*, et dividam utrumque latus *dh* et *di* in partes 12 vel 60 equales, et notabo ipsas partes omnes, ut in similibus instrumentis notate inveniuntur, et sic perfecta est forma quadrantis. Et non est in ea linea *eg*, sunt enim *e* et *g* foramina. Et si cum hoc instrumento altitudinem aliquam metiri volueris, poneres oculum ad foramen *e*, et stabis contra altitudinem metiendam, et levabis quadrantem a parte *b* vel declinabis, donec visus tuus egrediatur per foramen *e*, et transeat per foramen *g*, et perveniat ad cacumen altitudinis metiende; et tunc in ipsa linea cadet linea *eg*, quam superius notavimus.


Fig. 2.

Wie man sieht, ist auch der Kreisbogen in seine 90 Theile

getheilt. Derselbe heisst bei spätern Schriftstellern *limbus*. Die Theilung der Geraden *di* und *dh* beginnt von *h* und *i* aus, so dass wie bei dem Astrolabium an der Ecke *d* 12 steht. Fällt bei dem Visieren durch *e* und *g* der Faden mit dem Bleiloth auf *dh*, so hat man *umbra recta*, fällt er auf *di* so ist *umbra versa* vorhanden, fällt er auf *ad* selbst, so ist das wieder mit *45to gradu dierum* identisch. Beim Höhenmessen visierte man, wie ja LEONARDO auch angiebt, von *e* nach *g* hin, beim Längen- und Tiefenmessungen von *g* nach *e* hin; es musste der Kreisbogen immer nach der Erde zu gerichtet sein.

Dass bei Astrolabium und Quadrant zwei verschiedene Principien vorhanden sind, ist aus der Beschreibung klar. Bei dem Quadranten wird das Instrument unter dem durch das Bleiloth dargestellten festen Radius bewegt, bei dem Astrolabium bewegt sich das das Bleiloth vertretende Diopterlineal über das festgehaltene Instrument; bei dem Quadranten visiert man über den beweglichen Durchmesser, beim Astrolabium über den beweglichen Radius. Es ist also zwischen beiden Instrumenten ein ähnlicher Gegensatz, wie inbezug auf die Bewegung der Gestirne und der Erde im Ptolomäischen und Coppernicanischen Weltsysteme. Bei den ersten bewegt sich der Himmel von Osten nach Westen mit den Gestirnen über die ruhende Erde, beim zweiten bewegt sich die Erde von Westen nach Osten unter dem ruhenden Himmel. Beide Anschauungen sind fähig die einfachsten Beobachtungen zu erklären, ebenso sind beide Instrumente, Astrolab und Quadrant, befähigt Höhen-, Längen- und Tiefenmessungen auszuführen; niemand wird aber deshalb beide für identisch erklären können, wenn sie auch für die Anschauung Ähnliches ausführen.

III. Das *quadratum geometricum,* auch wie z. B. von DOMINICUS DE CLAVASIO, *instrumentum gnomonicum* oder kurzweg *instrumentum* genannt, zieht die beiden gegenüberliegende Quadrate, welche auf der *postica* des Astrolabiums zur Feldmessung benutzt werden, in ein einziges Quadrat zusammen. GERBERT lässt dasselbe in Cap. 33 aus vier metallenen oder hölzernen Stäben zusammensetzen,[7] die Abhandlung *»de quadrato geometrico componendo»*[8] und DOMINICUS DE CLAVASIO verlangen, in erster Reihe eine quadratisch zugeschnittene Metallplatte, deren vier Seiten wieder in je 12 gleiche Theile, und jeder derselben in 60 *minuta* getheilt sind. Auf einer der getheilten Seiten sind in den Eckpunkten Diopter aufgerichtet, welche eine genauere Horizontalstellung ermöglichen — bei GERBERT die beiden *semipedalia ligna E* und *F*. — Ebenso ist in jede Ecke ein Loch

gebort, in welches ein Zapfen am Ende eines Diopterlineals befindlich hineinpasst, so dass es möglich ist, durch dieses Lineal in seinen verschiedenen möglichen Lagen nach jeder beliebigen Richtung zu visieren. Bei GERBERT ist die letztere Vorrichtung noch nicht vorhanden; sein Diopterlineal ist nur in einem Eckpunkte befestigt, und so kann er sein *quadratum mediclinorum* allein zu Längenmessungen benutzen, während DOMINICUS und die noch spätere Abhandlung »*de quadrato geometrico componendo*» durch die verbesserte Einrichtung es ermöglichen auch Höhen- und Tiefenmessungen mit demselben auszuführen.

Da bei keinem Schriftsteller vor PEURBACH bei Benutzung des *quadratum geometricum* von *umbra recta* und *versa* gesprochen wird, so ist klar, dass sie sich der Beziehungen dieses Instrumentes zu der *scala altimetra,* so heisst nämlich der Kunstausdruck für das Quadrat des Astrolabiums und des Quadranten, nicht bewusst gewesen sind; wieder ein Beweis dafür, dass Anschauungen, welche für uns auf der Hand liegen, für früheren Perioden ganz unbekannt sind, und ihre Entdeckung einen wirklichen Fortschritt in der Erkenntnis darstellt. Deshalb ist man aber nicht berechtigt, denjenigen früheren Forschern, welche den Zusammenhang nicht sahen, daraus einen Vorwurf zu machen. Vor PEURBACH[9] ist das *Quadratum geometricum* zur Bestimmung von Sonnenhöhen und dgl. nicht benutzt worden; erst ihm und seiner trigonometrischen Kenntnis war es vorbehalten, diese neue Benutzungsweise zu zeigen, zu zeigen dass ein Messinstrument, welches man nur für terrestrische Zwecke geeignet hielt, ein Universalinstrument sei, wie das *Instrumentum Albion,* d. h. *All by one,*[10] denn so wird der Name desselben von seinem Erfinder, dem Engländer RICHARD WALLINGFORD, gedeutet.

Die Umwandlung der *umbra recta* in *umbra versa* und umgekehrt war besonders dann nothwendig, wenn bei der doppelten Beobachtung, welche bei unzugänglicher Höhe anzustellen war, die eine *umbra recta,* die andere *umbra versa* ergab. Bei dieser Gelegenheit lehren alle Abhandlungen *de utilitatibus astrolabii vel quadrantis,* die oben dargelegte Umformung. WEISSENBORN[11] in seinem »*Gerbert*» giebt an, dass diese Kunstausdrücke im Abendlande zuerst in einer im XIV. Jahrh. entstandenen englisch geschriebenen Abhandlung, welche in HALLIWELLS *Rara mathematica*[12] abgedruckt ist, vorkommen. Um die Grundlosigkeit dieser Behauptung zu beweisen, werde ich hier zum Schlusse den Abschnitt, welchen ROBERTUS ANGLICUS, auch JOHANN VON MONTPELLIER genannt, in seiner Abhandlung *de quadrante,* die

aus dem XIII. Jahrh. stammt[13] — sie befindet sich z. B. im Codex Boncompagni 324, Bltt 4—9 aus diesem Jahrhundert —, der Verwandlung der *umbra recta* in *umbra versa* und umgekehrt widmet, mitzutheilen mir erlauben. Ich bemerke noch, dass diese Abhandlung keineswegs die älteste ist, welche die fraglichen Ausdrücke enthält, mir steht jedoch augenblicklich nur die Abhandlung des ROBERTUS ANGLICUS zur Disposition. Jedenfalls ist es auch wohl naturgemässer, dass diese Ausdrücke von Spanien aus sich eher nach dem südlichen Frankreich ausgebreitet haben, als nach dem so weit abgelegenen England. Vor ABÛL WÂFÂ, der 998 starb, waren sie überhaupt als *termini technici* nicht bekannt, und da dieser in Bagdad lebte, so dürften sie selbst im arabischen Spanien kaum vor dem XI. Jahrh. sich eingebürgert haben. Jedenfalls finden sie sich schon in abendländischen Abhandlungen aus dem XII. Jahrh. angewendet.[14] Die fragliche Stelle lautet nun im Originale[15] und in einer 1477 angefertigten deutschen Übersetzung[16] folgendermassen.

13. Sed adhuc, quod scias cum hora accipere umbras, oportebit te mutare umbram rectam in versam et e contrario. Si autem vis umbram rectam ex umbra versa habere, per numerum punctorum umbrae versae divide 144, et illud, quod exierit post divisionem, erit numerus punctorum umbrae rectae. Si vis invenire umbras versas per rectam, divide 144 per numerum punctorum umbrae rectae, et exibit tibi in divisione numerus punctorum umbrae versae.

10. Aber dar zu, das du wissest alle stund die schatten zu nehmen, so mustu den rechten schatten in den verkehrten und herwiderumb verwechseln. Darumb wiltu ausz dem verkehrten schatten hab die zal der zal puncten des rechten schatten, so teil mit der zal des verkehrten schatten in 144, und was darausz get nach der teilung, das wirt die zal der puncten des rechten schatten. Wiltu wisen, die verkehrten schatten durch die rechten, so teil 144 mit der Zal der puncten des rechten schatten, so get ausz der teilung die zal der puncten des rechten schatten.

[1] WEISSENBORN, *Gerbert. Beiträge zur Kenntnis der Mathematik im Mittelalter.* Berlin 1888.

[2] CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik,* II, S. 102.

[3] *Oeuvres de Gerbert etc. publiées par* OLLERIS, Cap. XVII und XVIII, p. 429—430.

[4] A. a. O., S. 108.

[5] A. a. O., Cap. XVI, S. 429.

[6] LEONARDO PISANO, *Practica Geometriae,* Distinctio VII, S. 204, Z. 21 bis 205, Z. 5.

[7] A. a. O., S. 441.

[8] Zeitschr. für Mathem. **40**, 1895; Hist. Abth. S. 161—165.

[9] *Libellum de quadrato geometrico.* Norimbergae 1516.

[10] Hoc autem instrumentum, quia omnium et singularum utilitates et commoditates in unico corpore tam breviter continet et quedam alia forsitan superaddit, ideo vocatur *Albyon,* quod idem est quam totum per unum. *Al* enim anglice totum dicitur, *by* vero vocatur per, *on* est unum. Siehe *Cod. lat. Monac. 10662,* Bltt 4^a, Z. 19—24.

[11] A. a. O., S. 166.

[12] *Rara Mathematica; or a collection of treatises on the mathematics and subjects connected with them. From ancient inedited Manuscripts. Edited by* J. O. HALLIWELL, 2^d ed. London 1841, S. 57—71. Die Abhandlung ist nichts weiter als eine englische Übersetzung des Werkes von ROBERTUS ANGLICUS.

[13] ROBERTUS ANGLICUS lebte, wie P. TANNERY festgestellt hat, 1240—1270 etwa. Seine Abhandlung *Quadrans cum cursore* ist die Grundlage aller späteren Abhandlungen *de quadrante,* welche man geradezu als Plagiate bezeichnen könnte, wenn die damalige Zeit diesen Begriff schon gekannt hätte. Sie ist in alle möglichen Sprachen, sogar ins Griechische, übersetzt worden. P. TANNERY ist soeben im Begriffe dieselbe zugleich mit der griechischen Übersetzung herauszugeben.

[14] So z. B. in der dem XII. Jahrhundert angehörenden Abhandlung HERMANN DES LAHMEN *De utilitatibus astrolabii,* wo sie in dem Capitel: »De proportione umbrae corporis et cuiusque dimensionis quantitate invenienda» auseinandergesetzt ist (*Cod. lat. Monac. 13021* Bltt 77^v).

[15] Nach *Cod. lat. Monac. 10662,* Bltt 213^r.

[16] Nach *Cod. germ. Monac. 328,* Bltt 65^r, Sp. 1—2.

Note bibliographique sur les femmes dans les sciences exactes.

Par G. ENESTRÖM à Stockholm.

Dans la Biblioth. Mathem. 1895, p. 65—76, M. G. VALENTIN a publié un article bibliographique avec le titre: *Die Frauen in den exakten Wissenschaften.* En vue de le compléter, j'ai noté les écrits de mathématiciennes parus après sa publication, et j'ai pris note aussi d'un certain nombre d'écrits antérieurs dont l'auteur n'avait pas eu connaissance. De plus, quelques-uns de mes correspondants ont bien voulu m'indiquer des corrections ou additions à la bibliographie de M. VALENTIN, et enfin celui-ci a mis à ma disposition une petite liste supplémentaire rédigée par lui-même.

Ainsi il m'a été possible de signaler ici plus d'une douzaine de mathématiciennes non mentionnées dans l'article cité. D'autre part, il faut y rayer le nom ELIZE VAN DER VEN, ce nom se rapportant à un homme, ancien directeur de l'école moyenne de Haarlem, et aussi le nom »Lucie Leboef», sous lequel s'est caché, j'ignore pour quelle raison, un jeune mathématicien.

Chisholm, Grace.

Algebraisch-gruppentheoretische Untersuchungen zur sphärischen Trigonometrie. Göttingen 1895. 68 p. in-8° + 3 pl.

Clerke, Agnes M.

A popular history of astronomy during the nineteenth century. Third edition. London 1893. XVII + 543 p. in-8° + 5 pl.
The suns motion in space. Nature (London) **44**, 1891, 572—574.
The Herschels and modern astronomy. London 1895. In-8°.

Clerke, Ellen M.

Jupiter and his system. London 1892. In-8°.
The planet Venus. London 1893. In-8°.

Germain, Sophie.

Notices biographiques: H. STUPUY, Notice sur la vie et les oeuvres de Sophie Germain. La philosophie positive (revue) $\mathbf{21}_2$, 1878, 389—408; $\mathbf{22}_2$, 1879, 50—64. — CHRISTINE LADD-FRANKLIN, The Century (New York), octobre 1894.

Gernet, Marie.

Reduktion hyperelliptischer Integrale durch rationelle Substitutionen. Heidelberg 1895.

Giberne, Agnes.

Sun, moon and stars. A book for beginners. London 1879. 12°. (20e éd. 1893.)

Sonne, Mond und Sterne. Nach der 20. Auflage von 1893. Deutsch von E. Kirchner. Mit einer Vorrede von C. Pritchard. Berlin 1894. XII + 312 p. in-8°.

Kirch, Marie Margarethe, née Winckelmann.

Le premier écrit indiqué par M. Valentin est rédigé en allemand et a pour titre: *Vorbereitung zur grossen Opposition* (cf. Acta eruditorum 1712, 77—78).

Klumpke, Dorothée.

Notice biographique: Ein weiblicher Astronom (Dorothea Klumpke). Die Frau (Berlin) **1**, 1893—1894, 306—307 (avec portrait).

Litwinow-Iwaschkin, Elisabeth.

Lösung einer Abbildungsaufgabe. Inauguraldissertation zu Bern. S:t Petersburg 1879.

[Notice biographique sur N. A. Lobatchewsky.] S:t Pétersbourg 1894. [En russe.]

Mackinnon, Annie L., docteur ès sciences.

Concomitant binary forms in terms of the roots. Annals of mathem. **9**, 1895, 95—157.

Maddison, Isabel, à Bryn Mawr College.

The arithmetizing of mathematics by Felix Klein. Translated. *New York,* Americ. mathem. soc., Bulletin $\mathbf{2}_2$, 1896, 241—249.

Massarini, Iginia, docteur ès sciences mathématiques, Roma.

Teoria delle congruenze di P. L. Tschebicheff. Traduzione italiana con aggiunte e note. Roma 1895.

Mitchell, Maria.

Observations and elements of Miss Mitchells *comet. London,* Astron. soc., Monthly notices **8**, 1847—1848, 9—11, 130—131.

Minima of Algol. The astronom. journ. (Cambridge, U. S.) **5**, 1858, 7.

Observations on some double stars. Americ. journ. of science **36**, 1863, 38—40.

Müller, Maria Clara, née Eimmart.

Notice biographique: S. Günther, Maria Klara Eimmart, ein Bild aus dem Gelehrtenleben des XVII. Jahrhunderts. Germania 1895, 376—385.

L'auteur de l'ouvrage *Iconographia nova contemplationum de sole* n'est pas Maria Clara Müller, mais son père G. Ch.

EIMMART. — MARIA CLARA MÜLLER mourut en 1707 (non 1717).

Öhberg, Maria, étudiant à l'université de Helsingfors, née en 1873.
Om lineära differensekvationers integration. Helsingfors läroverks för gossar och flickor årsredogörelse 1894, 83—100.
Solfläckarnas inflytande på vattenståndet vid Kronstadt. Fennia (Helsingfors) **9** : 4, 1894, 22—26.

Pilati, Margarethe.
Eine Rechenstunde in der einklassigen Volksschule. Rechencatechese für das sechste Schuljahr. Monatsschr. kath. Lehrerinnen **8**, 1895, 726—729.

Predella, Lia, docteur ès sciences mathématiques, professeur à l'école normale de Cagliari, née en 1870.
Sulle soluzioni singolari delle equazioni differenziali ordinarie di 1º ordine. Giorn. di matem. **33**, 1895, 31—56, 183—209. — [Analyse:] Jornal de sc. mathem. **12**, 1895, 123—124. (G. TEIXEIRA.)

Schiff, Mme W. J.
[Méthodes pour résoudre des questions de la géométrie élémentaire.] S:t Pétersbourg 1894. IV + 113 p. in-8°. [En russe.]

Scott, Charlotte Angas, professeur au Bryn Mawr College.
On plane cubics. London, Royal soc., Philos. transact. **185**, 1894, 247—277.
Arthur Cayley. New York, Americ. mathem. soc., Bulletin $\mathbf{1}_2$, 1895, 133—141.
Note on equianharmonic cubics. Messenger of mathem. **25**, 1895, 180—185.
The three great problems of antiquity, considered in the light of modern mathematical research. New York, Americ. mathem. soc., Bulletin $\mathbf{2}_2$, 1896, 157—164.

Söderhjelm, Sanny, licenciée ès sciences, Helsingfors, née en 1866.
Ur den elementära matematikens historia. Nya svenska lärovärket 1882—1892 (Helsingfors 1892). 26 p.
Det historiska elementet i matematikundervisningen. Helsingfors, Pedagogiska föreningen, Tidskrift **31**, 1894, 73—77.
Ett blad ur ekvationslärans historia. Nya svenska lärovärkets berättelse (Helsingfors) 1895, I—XV.

Teupken, Willemine Frederique Henriette, actuaire adjointe de l'»Algemeene Maatschappij voor Levensverzekering» à Amsterdam, née en 1864.

De Verzekeringen op meer hoofden in de practijk. Archief voor de Verzekeringskunde (Haag) **2**, 1896, 65—73.

De invloed derse lectie op de sterfte-uitkomsten. Ib. **2**, 1896, 232—238.

Mlle Teupken a publié en outre plusieurs notes sur des questions relatives à l'assurance sur la vie.

Waeywel, Agnes.

Traité ou considérations mathématiques et impartiales sur la démonstration de la quadrature du cercle de Daniel Waeywel *et sur les considérations des mauvaises critiques de ses antagonistes.* Le Haye 1717. X + 37 p. in·4° + 2 pl.

Wijthoff, Geertruida.

Vraagstuk N° 7, opgelost. Amsterdam, Wisk. Genootsch., Nieuw Archief **20**, 1893, 26—62. — Déduction des équations en coordonnées bipolaires du mouvement d'un point dans un plan sous l'influence de formes simples de forces.

Over de stabiliteit van elliptische banen, beschreven onder de werking van drie centrale krachten. Amsterdam, Wisk. Genootsch., Nieuw Archief $\mathbf{3}_2$. 29 p.

Woena, Adele.

Nozioni elementari di sfera armillare e cosmografia. Modena 1867. In-8°.

Die Mathematik bei den Juden.

Von MORITZ STEINSCHNEIDER in Berlin.

24. Während in Spanien und der Provence der Einfluss arabischer Wissenschaft auch in den ritualen *chronologischen* Untersuchungen und Darstellungen sich geltend machte: entwickelte sich in Nordfrankreich eine mehr auf das Practische losgehende Schule, die man vielleicht am besten, wenn man sie mit einem einzigen Worte charakterisiren will, als *casuistische* bezeichnet; denn auch ihre exegetische Seite, die einfache Wort- und Sacherklärung der religiösen Quellen: der Bibel und des wesentlich casuistischen und disputatorischen Talmud, nach Feststellung eines, durch Schultradition und Usus ermittelten guten Textes, will vorzugsweise das Leben und die ritualen Observanzen im Sinne einer autorisirten Überlieferung regeln. Die bedeutendste Autorität auf diesem Gebiete ist der Nordfranzose SALOMO B. ISAK (gest. 1108), auch ISAKI, RASCHI (fälschlich *Iarchi*) genannt, der mit einem unerreichten didactischen Tacte seine Erklärungen in den engsten Umfang zusammenzudrängen verstand, daher auch bis heute als der »Commentator» in hunderten von Drucken Anfängern und Hochgelehrten als Führer im Talmud gilt. Seine Biographie von L. ZUNZ (1822) ist als erste Schrift auf dem Gebiete der neuen jüdischen Literaturgeschichte zu bezeichnen.

Im Kreise dieses Mannes sind begreiflicher Weise die Namen derjenigen zu suchen und wirklich zu finden, welche sich mit der practischen Seite der Chronologie, dem *Kalender,* beschäftigten. Sie suchten nach *Regeln* und *Formeln:* erstere ergaben sich aus genauen arithmetischen Calculationen der sogenannten »Überschüsse», oder Reste, das heisst des Bruches, den das irrationale Verhältnis der Bewegung von Mond und Sonne (für uns: Erde) nicht zu beseitigen vermag, wozu noch die Unbequemlichkeit einiger Wochentage für den Festcyklus die sogenannten »Verschiebungen» (*Dechijjot*) veranlasste, deren Entstehung bedeutende Autoritäten erst der nachtalmudischen Zeit vindiciren (s. § 21, Biblioth. Mathem. 1895, S. 100). Die Formeln wurden aus mnemotechnischen Gründen gern in Wörter nach ihrem Zahlwerte und in *Reime* gekleidet, wie wir schon solche im X. Jahrhundert gefunden haben. Die Reimschmiede brauchten nicht einmal Rechner zu sein; wir berücksichtigen dieselben also hier *gar nicht.* Aber auch von denjenigen, die als Autori-

täten in der Kalenderkunde oder als Verfasser citirt oder in Handschriften genannt werden, dürfen wir hier fast Nichts als die Namen angeben.[1]

JAKOB BEN SIMSON verfasste 1123 ein Kalenderwerk, wovon nur ein Teil in einem ms. der Bodleiana (NEUBAUER n. 629) erhalten ist.

SAMUEL B. MEIR (1130) und sein jüngerer Bruder JAKOB, genannt *Tam*, aus Rameru, deren Mutter eine Tochter des oben gerühmten Lehrers SALOMO ISAKI war, haben Spuren ihrer Thätigkeit auf diesem Gebiete in einem ms. des Baron David de Günzburg hinterlassen. Von MENACHEM B. MACHIR, einem Schüler SALOMO's ist etwas gedruckt.

In Italien lebte höchstwahrscheinlich MENACHEM BEN SALOMO, der in seiner Auslegung des Pentateuchs eine in Capitel eingeteilte Abhandlung über den Kalender aufnahm.

Auch in anderen Ländern und Literaturkreisen fehlt es an Excursen ins Gebiet der Chronologie und des Kalenders nicht. Der durch HEINE in weiteren Kreisen bekannte Dichter ABU'L-HASAN JEHUDA HA-LEVI aus Castilien verfasste um die Mitte des XII. Jahrhundert's in arabischer Sprache eine Apologie des traditionellen Judentums gegenüber den griechischen Philosophen und ihren Anhängern, den Muslimen und Christen und den Karaiten, der einzigen noch existirenden Secte, welche sich von den orthodoxen sogen. Rabbaniten durch Verwerfung der Tradition unterschied; die damit zusammenhängende Differenz im Kalender bildete einen Hauptgegenstand der Controverse seit dem IX. Jahrhundert. JEHUDA HA-LEVI's Apologie enthält einen Excurs, worin nachgewiesen werden soll, dass die alte Berechnung des Mondes nicht vom äussersten Osten, sondern von Palästina ausgehe.[2]

Ein karaitischer Zeit- und Namensgenosse des Apologeten, JEHUDA HADASSI (in Jerusalem 1149), verfasste eine, äusserlich an den Dekalog geknüpfte, in einen durch das ganze Buch gehenden gleichen Reim und in alphabetisch geordnete Reihenfolge der Absätze gezwängte, gegen den Genius der hebräischen Sprache kämpfende Theologie vom Standpunkt seiner Secte,[3] worin auch der hervorragende Streitpunkt nicht fehlt (Cap. 184 und folgende); in Cap. 103 dieses Buches finden wir die Angabe, dass alle 61 Jahre die Sonne sich verfinstere — ist hier eine totale Sonnenfinsternis gemeint?

Zu untersuchen wäre eine vergleichende Tabelle der jüdischen Jahre mit den christlichen 1142—1160 (ein 19-jähriger Cyklus) von einem *Anonymus* in ms. hebr. Vatican. 303.

Äusserst verdächtig sind mir die angeblichen Ephemeriden eines SALOMO IORCHUS, oder IARCHI, bei WEIDLER p. 265 — (bei LALANDE, vgl. ZACH, Corresp. astron. VII, 22, — vgl. ABRAHAM B. SALOMO JARCHI aus unbestimmter Zeit, Erklärer des EUKLID (STEINSCHNEIDER, *Hebr. Übersetz.*, S. 508).

25. Für die Geschichte der Mathematik in Europa ist von einiger Bedeutung, in neuerer Zeit vielfach herangezogen, ein Jude, dessen ursprünglicher Vornamen nicht sichergestellt ist; als Christ um 1135—1153 schriftstellerisch thätig, heisst er meistens JOHANNES HISPALENSIS, oder *Hispanensis*, oder *Toletanus*, oder *de Luna*, auch »*Abendeuth*», was ich auf »IBN DAÛD», das heisst: Sohn (oder »Abkömmling») eines David, zurückgeführt habe.[4]

Er verfasste 1142 eine *Epitome totius astrologiae*, bestehend aus einer *Isagoge* und einem *Quadripartitum*, welche mit einer Vorrede JOACHIM HELLER's wider die Gegner der Astrologie in Nürnberg 1548 gedruckt ist, und deren Teile wohl die meisten mss. mit Specialtiteln enthalten.

JOHANN diente als Dolmetscher aus dem Arabischen dem Diaconus DOMINICUS GUNDISALVI, wahrscheinlich auch bei den Übersetzungen ins Lateinische, welche nur den eigentlichen Schriftsteller GUNDISALVI nennen, weshalb auch die Kenntnis der letzteren zur vollen Würdigung JOHANN's erforderlich ist, dessen Thätigkeit hier nur durch kurze Aufzählung der, von ihm übersetzten arabischen Mathematiker angedeutet sei.

AHMED BEN IBRAHIM, Commentar zum *Centiloquium* des PTOLEMÄUS, in der lateinischen Ausgabe fälschlich dem »Haly Rodoam» (ALI IBN RIDHWAN) beigelegt.

BATTANI (»Bereni»), *Centiloquium*, gedruckt.

FERGANI (ALFRAGANUS), *Liber scientiae astrorum* (1135), gedruckt.

KABISI (ALCABITIUS), *Introductio in astrologiam*, mehrmals gedruckt; vgl. Biblioth. Mathem. 1891, S. 43.

KHAJJÂT (IBN AL-) ABU ALI (ALBOHALI), *de Nativitatibus*, nach ms. Laud. 594 im J. 1153 von JOH. TOLETANUS übersetzt, gedruckt.

KHOWAREZMI (AL-), MUHAMMED BEN MUSA, *Algoritmi, de numero indorum*, ed. B. BONCOMPAGNI, Roma 1857, und *Algoritmus, de practica arismetricae*, ed. B. BONCOMPAGNI, Roma 1857. — Über dieses Buch liest man bei MATTH. STERNER, *Principielle Darstellung des Rechenunterrichts* etc. 1. Teil, Geschichte, München u. Leipz. (Vorrede datirt 8. Aug. 1891) folgende, wie mir scheint, unzutreffende Notiz: »JOHANNES aus Sevilla . . . ein

jüdischer Schriftsteller des 12. Jahrhunderts schrieb(!) eine practische Arithmetik (Algorismus). In derselben lehrt er die annäherungsweise Ausziehung der Quadratwurzel mit Hilfe von Decimalbrüchen(?). Er verfährt dabei in ähnlicher Weise wie THEON der jüngere, Ende des 4. Jahrh. ... nur dass er nicht Sexagesimalbrüche sondern Decimalen, Zahlen und Nullen verwandte».

MAʿASCHAR (ABU), a) *Introductio majus* (1133?), s. Biblioth. Mathem. 1890, S. 71. — b) *de magnis conjunctionibus?* — c) *Flores astrologiae*, gedruckt. — d) JAFAR, *de Imbribus?*

MADJRITI (AL-) MASLAMA: *de Astrolabio*, ms.

MASCHALLAH, a) *Epistola de rebus Eclipsium*, oder *der Ratione circuli* etc. — b) *de Receptione*(?) *planetarum sive de Interrogationibus;* andere 4 von WÜSTENFELD aufgeführte Schriften sind zweifelhaft, die meisten Nummern gedruckt.

OMAR BEN FARRUKHAN, ABU ʿHAFʿS AL-TABARI (vulgo »Aomar», »Haomar»), *de Nativitatibus*, gedruckt; s. Biblioth. Mathem. 1891, S. 67.

RIDJAL (ALI IBN AL-), vulgo ABEN-RAGEL, *de Electionibus, regulae*, ms. Wien 5124, bedarf der Bestätigung.

THABIT BEN KORRA, *de Imaginibus*, nur in ms.

(*Anonymus?*) über *Astrolab;* die mss. bedürfen genauerer Untersuchung.

Man sieht, dass diesem JOHANNES ein Platz neben PLATO aus Tivoli gebührt, den man als ersten eigentlichen Übersetzer aus dem Arabischen ansieht. Sein »Algorithmus» wird jetzt als Hauptschrift zur Einführung der arabischen Arithmetik angesehen, wonach auch andere Lehrschriften darüber betitelt wurden.

26. Die beiden »Juden» ABRAHAM und der abgefallene JOHANN vertreten hinlänglich das XII. Jahrh. in Europa; was diesem Weltteil noch ausser ihnen angehört, soll hier summarisch vorgeführt werden.

Der scharfsinnige, jugendliche, kühne Gelehrte SERACHJA HA-LEVI in Lunel (blühte 1150—1160, Catal. Bodl., p. 2589) erstreckte seine Controverse auch auf die Kalenderfragen.

Der bekannteste jüdische Gelehrte MOSES MAIMONIDES (gest. in Fostat 1204) verfasste im Alter von 23 Jahren (1158) in Cordova, oder Fez, eine Monographie über den jüdischen Kalender (*Ma'amar ha-Ibbur*), welche erst 1849 aus einem Pariser ms. und dann in Leipzig (Schriften 1859, II, 17) gedruckt, im I. Teil die Neumonde, im II. die Quatember behandelt. Ausführlicher ist der betreffende Abschnitt seines grossen Gesetz-

werkes, welcher von ISR. HILDESHEIMER deutsch bearbeitet erschien (*Die astronomischen Kapitel in Maimonides* etc. Sonderabdr. aus dem Jahresbericht des Rabbinerseminars, Berlin 1881, 8°). Hingegen ist der, unser Thema berührende Commentar zum Talmud-Tractat *Rosch ha-Schana* (Paris 1866) nach SLONIMSKI untergeschoben.

Im J. 1162 verfasste CHANOCH BEN BECHAI AL-CONSTANTINI Tabellen mit mnemotechnischen Reimen, ms. München (Catal. ed. II, S. 32). Der Namen weist auf Saragossa hin.

In das J. 1170 verlegt der, nichts weniger als zuverlässige E. CARMOLY (Isr. Annalen II, 225) ISAK BEN JEHUDA, Verf. eines Werkes, woraus die Erklärung zweier Stellen im Talmud über Monatslänge und über die *Quadratur des Cirkels* (π) in ms. Oratoire 197, und worin ABR. IBN ESRA citirt ist. In WOLF, *Bibl. hebr.* III, n. 1195[b] und im Pariser Catalog n. 1066 ist keine Andeutung der Zeit des Werkes.

Wir stellen hierher 3 Mathematiker des *Orients* (um 1170—1180):

SAMUEL IBN ABBAS, Arzt und Mathematiker aus dem Magreb, nahm im Osten den Islam an und bekämpfte das Judentum, insbesondere die erwähnte Apologie des JEHUDA HA-LEVI.[5] Die Titel der ihm beigelegten mathematischen Schriften sind:

1. »Enthüllung der Irrtümer der Astronomen», mit Figuren, verfasst 1165, ms. Bodl. URI 964, Leyd. 1074.

2. »Schwierigkeiten der Geometer», verf. 1174 für Sultan ABU'L-FAT'H SCHAH GAZZI.

3. »Das genügende (Buch) in der Rechnung der Drachmen und Dinare», ein Compendium des Buches von KARKHI (vergl. Jeschurun, her. von J. KOBAK V, 279).

4. (*Al-Tab'sira*) Anregung über Rechenkunst, für einen Kadhi verfasst, ms. Berlin (AHLWARDT V, 327 n. 5962); ich habe erst während der Correctur dieses § die Zeit gefunden, diese Schrift näher anzusehen und den Index zu copiren, den ich als Anhang mitteilen werde.

5. »Gedicht über Handrechnung» (= Knöchelrechnung?), commentirt von einem ABD AL-KADIR.

Während hier noch unverwertetes Material vorliegt, wissen wir kaum mehr als den Namen von den beiden grossen Astrologen, welche die beiden berühmten jüdischen Reisenden: BENJAMIN von Tudela und PETACHJA aus Regensburg (1170—1186) erwähnen, nämlich: JUSUF, genannt BURHAN AL-FULUK (? Beweis der Sphären), Astrolog des ZEIN AL-DIN in Damaskus,[6] und

SALOMO, Astrolog in Ninive (PETACHJA, p. 24, ed. CARMOLY, p. 12, ed. BENISCH).

27. Wir kehren wieder nach Europa zurück und verzeichnen daselbst zunächst astronomische *Tabellen* der Cyklen 261—273 (1179—1427), hinter dem Cyklus des NACHSCHON, aus dem XIII. Jahrh., ms. Paris 1032.

ELCHANAN BEN ISAK (1184 getödtet) wird als Verfasser eines Werkes über Kalenderkunde citirt; vielleicht ist sein Vater

ISAK BEN SAMUEL, der ältere, Verf. von 14 Kalenderformeln.[7]

Um 1190 soll ein englischer Jude ein mathematisches Werk verfasst haben, welches die englischen Literarhistoriker als *Mathematum rudimenta quaedam* bezeichnen. TANNER (p. 707) citirt als Quelle »BALAEUS ex LELANDO et aliis«(?); der Jude soll zur Zeit HEINRICH's VI, »ALFRAGANO coetanus« [vielmehr dem lateinischen Übersetzer, s. oben § 25] a. 1190, gelebt und FRIEDRICH II. erreicht haben. — In den letzten Jahren hat man die Geschichte der Juden in England mit grossem Eifer, nicht ohne Voreingenommenheit, verfolgt; die hier gegebene Notiz blieb unbeachtet, aber auch unbestätigt; eine Nachricht über die Urquelle wäre sehr erwünscht; ich vermute irgend ein Missverständnis. Das Datum 1191 wies ich nach in dem anonymen »Scriptum cuiusdam Hebraei *de eris* seu intervallis regnorum« etc., einer lateinischen Übersetzung (aus dem Arabischen?), welche 1549 hinter MASCHALLAH, *de elementis* etc. gedruckt ist (Cat. Bodl. 652 n. 4121; die »4 portae« sollten wohl die 4 Jahresformen sein; s. ABRAHAM BAR CHIJJA II, 9; ISAK ISRAELI IV, 10 C. 28).

Gegen Ende des XII. Jahrhunderts, *das wir hiermit schliessen*, lebte wohl JOSEF BEN JEHUDA, Cantor in Trèves (?), Verfasser von Reimen zur Controlle der Berechnung des Neumondes (anonym gedruckt), welcher auch »das Geheimnis der 70« etc., erläutert hat.[8]

[1] Näheres in meinem II. Artikel: *Der jüdische Kalender* im Jahrbuch, herausg. von M. BRANN, Breslau 1896.

[2] *Das Buch Cusari* (oder Chasari) *aus dem Arabischen hebräisch von* JEHUDA IBN TIBBON (XII. Jahrh.), *mit deutscher Übersetz. u. Anm. von* D. CASSEL etc., S. 109; vgl. die Abhandlung v. M. CREIZENACH, in Israel. Annalen 1840, S. 185.

[3] *Eschkol ha-Kofer* (hebr.) Eupatoria 1836.

[4] Der Kürze halber verweise ich auf mein: *Die Hebr. Übersetzungen*, S. 981, wo die einzelnen Beläge.

[5] Über ihn s. die Citate in meinem *Catal. l. h. in Bibl. Bodleiana,* p. 2436; mein: *Polemische Literatur,* p. 26; Hebr. Bibliogr. XXI, 119, wonach I. FÜRST, Bibl. Jud. III, 242 und LECLERC, *Hist. de la médec. arabe,* II p. 12 und p. 479 Zeile 4 (»Cat. du Brit. Mus.»!) zu berichtigen sind. — Von der »Beschämung der Juden» waren bisher nur Fragmente bekannt; ms. Khedive VI, 113, vielleicht vollständig, ist hier zum *ersten Male* zur Kenntnis gebracht.

[6] Siehe die Citate in Hebr. Bibliogr. VIII, 31; der Namen falsch bei WOLF, *Bibl. hebr.* I, n. 871. AL-BURHAN bei KIFTI ms. (CASIRI I, 428), HAMMER, *Liter.* VII, 464, lebte 530—589 H. (1135—1193).

[7] Siehe Hebr. Bibliogr. XVII, 94 und S. VII; vgl. ZUNZ, *Zur Gesch.,* S. 97.

[8] Siehe meinen *Katalog der hebr. Handschr. in München,* ed. II unter N. 394, und das (im Druck befindliche) *Verzeichnis der hebr. Handschr. in Berlin* unter N. 223 S. 72.

RECENSIONEN. — ANALYSES.

D. E. Smith. History of modern mathematics. New York, Wiley 1896. 8°, p. 508—570.

Les auteurs les plus récents de traités de l'histoire des mathématiques ont consacré un espace de plus en plus considérable aux mathématiques modernes; ainsi cette période occupe plus de 50 pages dans la seconde édition de l'*Account of the history of mathematics* de M. W. W. R. Ball et plus de 100 pages dans l'*History of mathematics* de M. F. Cajori. Estimant avec raison que la connaissance des progrès des mathématiques modernes est d'une importance particulière au point de vue pédagogique, M. D. E. Smith a essayé d'en donner en 63 pages un aperçu, qu'il a inséré à la fin du cours complet de mathématiques supérieures publié il y a peu de temps par MM. M. Merriman et R. S. Woodward sous le titre de *Higher mathematics.* Certes, un tel essai mérite des louanges, d'autant plus que M. Smith a évidement employé tous ses efforts pour justifier l'attente du public auquel il s'adresse. D'autre part, il est clair que les grandes difficultés qui s'y présentent, n'ont pu être vaincues par lui qu'à un certain point. Il est vrai que nous possédons déjà une série d'importantes monographies sur les derniers progrès et l'état actuel des mathématiques, p. ex. l'*Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche* de M. G. Loria, le *Bericht über den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie* de M. Fr. Meyer, l'*Entwickelung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit* de MM. A. A. Brill et M. Noether, et divers écrits de M. F. Klein, mais cette série de monographies est encore loin d'embrasser toutes les branches de la science, et on ne peut pas prétendre que M. Smith aura approfondi toutes les théories mathématiques assez pour apprécier exactement les différentes découvertes y faites, sans s'appuyer sur des jugements d'autres savants. De plus, il y a une autre difficulté que M. Smith, au commencement de son aperçu, a fait ressortir en ces termes: »How unsatisfactory must be so brief a sketch may be inferred from a glance at the 'Index du Répertoire Bibliographique des Sciences Mathématiques' (Paris 1893), whose seventy-one pages contain the mere enumeration of subjects in large part modern, or from a consideration of the ... 'Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik', which now devotes over a thousand pages a year to a record of the progress of the science.»

M. Smith a divisé son exposé en 19 articles, savoir: 1. Introduction. — 2. Théorie des nombres. — 3. Nombres

irrationnels et transcendants. — 4. Nombres complexes. — 5. Quaternions et »Ausdehnungslehre». — 6. Théorie des équations. — 7. Substitutions et groupes. — 8. Déterminants. — 9. Théorie des formes. — 10. Calcul différentiel et intégral. — 11. Equations différentielles. — 12. Suites infinies. — 13. Théorie des fonctions. — 14. Calcul des probabilités et méthode des moindres carrés. — 15. Géométrie analytique. — 16. Géométrie moderne. — 17. Géométrie élémentaire. — 18. Géométrie non-euclidienne. — 19. Bibliographie.

Le style de M. SMITH est concis et adapté au but de l'écrit; à la longue il paraît peut-être un peu aride et monotone, mais c'est là un inconvénient presque inévitable dans des ouvrages de cette espèce. Pendant la lecture nous avons noté quelques passages, où, à notre avis, il conviendrait d'introduire de petites modifications ou additions, dont voici quelques exemples.

P. 509. Nous aurions désiré une mention qu'il y avait au 18e siècle des mathématiciens éminents non seulement en Suisse, en France et en Allemagne, mais aussi en Angleterre (p. ex. COTES et MACLAURIN), qui ont contribué au développement de l'analyse infinitésimale.

P. 510. »To this list should be added . . . two annual publications of great value, the Jahrbuch already mentioned (1868), and the Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung (1892).» Ici l'auteur aurait pu signaler l'excellente Revue semestrielle des publications mathématiques (à partir de 1893) citée plus loin à la page 570.

P. 512. »This law [the law of reciprocity of quadratic residues], discovered by induction by EULER, was enunciated by LEGENDRE.» Dans sa *Bemerkung zur Geschichte des Reciprocitätsgesetzes* (Monatsberichte der Akad. der Wissensch. zu Berlin 1875, p. 267—274; cf. *Intorno alla storia della legge di reciprocità;* Bullet. di bibliogr. d. sc. matem. **18**, 1885, p. 244—249), L. KRONECKER a démontré que la loi de réciprocité a été énoncée expressément déjà par EULER dans les *Opuscula analytica* I (S:t Pétersbourg 1783), p. 84.

P. 533. »Symbolic methods may be traced back to TAYLOR.» Nous ignorons à quels passages des écrits de TAYLOR se rapporte cette notice, que nous ne nous souvenons pas d'avoir trouvée chez aucun auteur antérieur d'histoire des mathématiques.

P. 537. »The theory of singular solutions of ordinary and partial differential equations has been a subject of research from the time of LEIBNIZ.» Cette indication est un peu vague, et il aurait valu mieux dire que la première solu-

tion singulière d'une équation différentielle a été signalée par TAYLOR (*Methodus incrementorum* p. 26—27; cf. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* III, 1896, p. 442). L'assertion de BOSSUT (*Histoire générale des mathématiques* I, Paris 1810, p. 127—128) et de quelques auteurs postérieurs, qu'une solution singulière a été déduite en 1694 par LEIBNIZ, est inexacte.

P. 541. »POISSON ... gave a general form for the remainder of the MACLAURIN formula.» Au point de vue historique il est plus exact de donner à la formule dont il s'agit le nom de formule sommatoire d'EULER (voir ENESTRÖM, *Om upptäckten af den Eulerska summationsformeln;* Öfversigt af [svenska] vetenskapsakad. förhandl. 1879 n° 10, p. 3—17; cf. MALMSTEN, *Sur la formule* $hu'_x = \Delta u_x$ — etc., Acta Mathem. 5, 1884, p. 1).

Dans un ouvrage tel que celui de M. SMITH, où il faut mentionner un grand nombre de mathématiciens, il est naturellement très difficile de faire un choix convenable. De notre part, nous avons regretté ça et là quelques noms, p. ex. celui de M. F. PRYM au sujet de la fonction gamma (p. 533) et celui de M. J. BERTRAND relativement au calcul des probabilités (p. 551). En parlant des mathématiciens qui ont contribué au développement de la théorie des polyèdres étoilés (p. 564), l'auteur a omis de signaler POINSOT, mais cette omission n'est probablement qu'une faute de plume (comparez l'expression »Kepler-Poinsot regular solids» à la même page). Il y a aussi quelques autres petites inadvertances, qu'on peut caractériser le plus convenablement comme des fautes de plume, p. ex. les suivantes. P. 508: »The twenty-six volumes of the Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik» (le volume XXV n'est pas encore achevé). — P. 515: »LAMBERT proved ... that e^n (*n* being *zero* (?) or rational) is irrational.» — P. 515: On retrouve une indication donnée déjà à la page 513. — P. 524: »The study of groups and the search for invariants now occupying the attention of *all* (?) mathematicians.» — P. 543, 544: L'ouvrage de KÖNIGSBERGER est cité inutilement deux fois. — P. 569: M. K. FINK n'a pas écrit une »Geschichte der Mathematik», mais une *Geschichte der Elementar-Mathematik*.

Parmi les fautes d'impression il faut ranger l'indication (p. 552) que l'*Enumeratio linearum tertii ordinis* de NEWTON a paru pour la première fois en 1706, et »Peter's» pour PETERS's à la page 551.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

G. Loria. IL PASSATO ED IL PRESENTE DELLE PRINCIPALI TEORIE GEOMETRICHE. Seconda edizione accresciuta ed interamente rifatta. Torino, Clausen 1896. 8°, XX + 346 + (1) p.

La première édition de cette monographie a paru en 1887 dans les Memorie dell' Accademia delle scienze di Torino tome **38**$_2$. Elle fut traduite d'abord en allemand par M. F. SCHÜTTE, puis en polonais par M. S. DICKSTEIN, et à ces deux traductions l'auteur a fourni de nombreuses additions, de manière que la présente édition peut être considérée en réalité comme la quatrième.

Tandis que la première édition contenait 8 et les deux traductions 9 chapitres (voir les analyses de MM. S. GÜNTHER et S. DICKSTEIN dans la Biblioth. Mathem. 1887, p. 110, et 1889 p. 53—54), la nouvelle édition est divisée en 12 chapitres avec les rubriques suivantes: 1. Aperçu de l'origine et du développement de la géométrie jusque vers l'an 1850. — 2. Théorie des courbes planes algébriques. — 3. Théorie des surfaces algébriques. — 4. Théorie des courbes algébriques à double courbure. — 5. Géométrie différentielle. — 6. Recherches sur la forme des courbes, des surfaces, et d'autres figures géométriques; analysis situs; configurations. — 7. Géométrie de la droite dans l'espace. — 8. Correspondances, représentations, transformations. — 9. Géométrie énumérative. — 10. Géométrie non-euclidienne. — 11. Géométrie des espaces à un nombre quelconque de dimensions. — 12. Épilogue. De plus, presque toutes les parties de l'ouvrage ont été ou refondues ou considérablement augmentées et continuées jusqu'en 1896, et à la fin M. LORIA a ajouté un Index alphabétique des auteurs cités, embrassant non moins de 9 pages à trois colonnes.

Quant au but du traité et à son mise en oeuvre, nous partageons entièrement l'avis favorable exprimé par MM. GÜNTHER et DICKSTEIN dans les analyses ci-dessus citées. Une monographie telle que celle de M. LORIA doit être d'une grande utilité non seulement pour quiconque veut suivre les derniers progrès de la géométrie, mais aussi pour les jeunes savants qui désirent savoir ce qui reste encore à faire dans ce domaine. D'autre part, la composition de l'écrit prouve que M. LORIA est en même temps un investigateur soigneux, un juge compétent et impartial, et un écrivain distingué. Il pourra se faire sans doute que des savants qui se sont voués au développement des théories géométriques modernes, y trouvent des passages prêtant à des critiques d'une certaine importance, mais,

pour ce qui concerne nous-même, nous n'avons pas eu occasion à de telles observations critiques. De fait, les quelques remarques que nous avons faites en étudiant l'ouvrage de M. LORIA, se rapportent toutes à des questions d'une valeur secondaire ou à la révision des épreuves. Naturellement nous ne nous arrêterons pas ici à de petites fautes dans la transcription de titres hollandais, danois et allemands, ces fautes étant absolument innocentes. Parmi les noms incorrectement transcrits nous signalons en premier lieu celui de notre éminent contemporain M. HENRI POINCARÉ, qui est appelé trois fois (p. 129, 145, 200) »Poincarré». D'autres inadvertances de la même nature se trouvent p. ex. aux pages 64 (Em. Weyer pour EM. WEYR), 69 (Bjerkness pour BJERKNES), 79 (A. Rosen pour A. ROSÉN), 129 (Spottinswoode pour SPOTTISWOODE), 203 (Victor pour VIETOR), 224 (Demoulins pour DEMOULIN), 334 (Gentry pour GENTY), 341 (Hulbeut pour HULBURT), 342 Kortweg pour KORTEWEG et p. 343 (Nassir-Eddins pour NASSIR-EDDIN). Pour ce qui concerne les dates, les fautes d'impression semblent être moins nombreuses; nous en avons noté: 1883 au lieu de 1833 à la page 13; 1701 et 1678 au lieu de 1704 et 1676 à la page 37; 1832 au lieu de 1852 à la page 47; à la page 18, ligne 12 il faut lire 1742 au lieu de 1724, mais c'est là une erreur dont M. LORIA n'est guère responsable (cf. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* III, 1896, p. 45).

Parmi nos autres remarques nous mentionnerons les suivantes. P. 37: M. BALL n'a pas dit que l' *Enumeratio linearum tertii ordinis* de NEWTON semble avoir été écrite avant 1676, mais que »*some* of it was probably composed before 1676» (comparez BALL, *On Newton's classification of cubic curves;* Transactions of the London Mathematical society **22**, 1891, p. 104). — P. 49: Le dernier mémoire de M. ZEUTHEN cité dans la note (2), est indiqué déjà à la page 48, lignes 18—19. — P. 198: Le mémoire de M. KORTEWEG cité dans la note est rédigé en *hollandais* et a pour titre *Over de Rodenberg'sche Modellen van kubische Oppervlakken;* même remarque pour ce qui concerne le mémoire de M. KLUYVER cité à la page 223. — P. 275: La note de CHASLES cité aux lignes 12—13 a été publiée dans les Comptes rendus **83**, 1876 (cfr. Biblioth. Mathem. 1888, p. 76).

L'Index alphabétique, où sont indiqués près de 1,000 auteurs, semble être rédigé avec beaucoup de soin. Voici pourtant quelques corrections à y faire. P. 338: Sous le nom

de BJÖRLING sont réunis deux différents mathématiciens, savoir E. G. BJÖRLING (1808—1872), professeur de mathématiques au lycée de Vesterås (cité à la page 165) et son fils C. F. E. BJÖRLING (né en 1839), actuellement professeur de mathématiques à l'université de Lund (au lieu de 196 lire 196^n). — P. 340: Les deux rubriques DEMOULIN et Demoulins se rapportent à la même personne. — P. 341: Les deux rubriques GENTY et Gentry se rapportent à la même personne. — P. 343: Au lieu de MAINARDI: 88 lire MAINARDI: 89. — P. 343: Sous le nom d'OLIVIER sont réunis deux différents mathématiciens dont l'un, TH. OLIVIER, est mort en 1853, et l'autre, A. OLIVIER, a publié des mémoires vers 1870. — P. 346: Aprés VIÈTE ajoutez: VIETOR: 203.

Par ce qui précède, il résulte que les remarques que nous avons eu à faire relativement à la seconde édition d'*Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche* sont, au fond, sans importance. De notre part, nous avons donc tout lieu de nous féliciter de sa publication, et de la recommander vivement aux lecteurs de la Bibliotheca Mathematica. En même temps nous nous permettons d'exprimer un voeu, qui nous a été suggéré par la lecture de la note à la page 41 de l'écrit de M. LORIA. L'auteur y fait observer que son ouvrage doit être comparé plutôt avec un indicateur des chemins de fer qu'avec un guide de voyageur. Nous souhaitons que les occupations de M. LORIA lui permettent aussi de rédiger bientôt un véritable guide dans le domaine en question, c'est à dire une histoire du développement des théories modernes de la géométrie.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von || journal d'histoire des mathématiques publié par G. ENESTRÖM. Stockholm. 8°.
1896: 2.

Физико-математическія науки въ ихъ настоящемъ и прошедшемъ. Журналъ издаваемый В. В. Бобынинымъ. Москва. 8°.
3 (1887), 1896: 2. **13**, 1896: 2. — Les sciences mathématiques dans leur état actuel et passé. Journal publié par V. V. BOBYNIN.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von M. CANTOR. Leipzig. 8°.
41 (1896): 3—4.

°**Albert, G.**, Die Platonische Zahl und einige Conjecturen zu Platon sowie zu Lukrez. Wien 1896.
8°. — [1 Mk.]

°**Apollonius of Perga**, Treatise on conic sections. Edited in modern notation, with introductions, including an essay on the earlier history of the subject by T. L. HEATH. Cambridge 1896.
8°, CLXX + 254 p. — [Analyse:] Nature (London) **54**, 1896, 314—315. (G. B. M.)

°**Aratus**, A literal translation of the astronomy and meteorology, with some bibliographical remarks by C. L. PRINCE. Lewes 1895. 4°.

Becker, G. F., »Potential» a Bernoullian term.
Americ. journ. of science **45**, 1893, 97—100.

БОБЫНИНЪ, В. В., Первоначальное развитіе дѣйствій надъ числами.
Fiziko-matem. naouki **3** (1887), 1896, A: 97—110. — BOBYNIN, V. V., Sur le premier développement des opérations arithmétiques.

БОБЫНИНЪ, В. В., Очерки исторіи развитія математическихъ наукъ на западѣ. Періодъ усвоенія римскихъ знаній. I, II.
Fiziko-matem. naouki **3** (1887), 1888—1896, A: 21—39, 111—122. — BOBYNIN, V. V., Esquisses historiques du développement des sciences mathématiques dans l'Occident. Période de l'appropriation de la science des Romains.

БОБЫНИНЪ, В. В., Первое основанное въ россіи математическое овщество.
Fiziko-matem. naouki **13**, 1895, 49—67. — BOBYNIN, V. V., La fondation de la première société mathématique russe. (Fin.)

Bosscha, J., Christian Huygens.
Bullet. d. sc. mathém. **20**$_2$, 1896, 33—64. — Discours prononcé dans l'auditoire de l'université d'Amsterdam le 8 juillet 1895, à l'occasion du deuxième centenaire de la mort de HUYGENS.

Burkhardt, H., Über einige mathematische Resultate neuerer astronomischer Untersuchungen, insbesondere über irreguläre Integrale linearer Differentialgleichungen.
Mathematical papers of the Chicago Congress (New York 1896). 34 p. — Note essentiellement historique.

Catalogo della insigne biblioteca appartenuta alla chiara memoria del principe D. Baldassarre Boncompagni. Parte prima. Matematica. Scienze naturali ecc. ecc. Roma 1895.
8°, 511 p. — La seconde partie (Roma 1896) comprend les ouvrages d'archéologie, de la littérature, d'histoire etc. (809 pages). Il y a

aussi un *Catalogo di edizioni del secolo XV. le quali fanno parte della insigne biblioteca appartenuta alla chiara memoria del principe D. Baldassarre Boncompagni* (Roma 1896, 80 pages), où sont indiqués plusieurs ouvrages mathématiques.

°**Columba, G. M.,** Eratostene e la misura del meridiano terrestre. Palermo, Clausen 1896.
8°, 72 p. — [2·50 lire.]

°**Conant, L. L.,** The number concept: its origin and development. New York, Macmillan 1896.
8°, (7) + 218 p. — [8·80 Mk.] — [Analyse:] Nature **54**, 1896, 145—146. (A. C. HADDON.)

Cosserat, E., Notice sur les travaux scientifiques de T. J. Stieltjes.
Toulouse, Fac. d. sc., Annales **9**, 1895. 64 p.

Curtze, M., Ein Beitrag zur Geschichte der Physik im 14. Jahrhundert.
Biblioth. Mathem. 1896, 43—49.

Curtze, M., Über die sogenannte Regel Ta Yen in Europa.
Zeitschr. für Mathem. **41**, 1896; Hist. Abth. 81—82.

Dannreuther, H., Le mathématicien Albert Girard de Saint-Mihiel. 1595—1633.
Bar-le-Duc, Soc. d. sc., Mémoires $\mathbf{3}_3$, 1893. 6 p.

Del Pezzo, P., Dino Padelletti.
Napoli, Accad. pontaniana, Atti **25**, 1895. 10 p.

Een schitterende ontdekking.
Wekelijksche Mededeeling [de la société générale néerlandaise d'assurances sur la vie à Amsterdam] No. 734, 1896. 4 p. — Sur un tableau de mortalité dressé par JOH. HUDDE.

Eneström, G., Ett bidrag till mortalitetstabellernas historia före Halley.
Stockholm, Vetenskapsakad., Öfversigt **53**, 1896, 157—172. — Sur la loi de mortalité proposée en 1671 par JOHAN DE WITT.

Eneström, G., Le commentaire de Jakob Ziegler sur la »Saphea» de Zarkali.
Biblioth. Mathem. 1896, 53—54.

Favaro, A., Intorno alla vita ed ai lavori di Tito Livio Burattini fisico agordino del secolo XVII. Studi e ricerche.
Venezia, Istituto Veneto, Memorie **25**, 1896. 140 p.

Favaro, A., Amici e corrispondenti di Galileo Galilei. II. Ottavio Pisani. III. Girolamo Magagnati.
Venezia, Istituto Veneto, Atti $\mathbf{7}_7$, 1896, 411—465.

Fermat, P. de, Oeuvres publiées par les soins de MM. P. TANNERY et CH. HENRY sous les auspices du ministère de l'instruction publique. Tome troisième. Traductions par M. P. TANNERY: 1° Des écrits et fragments latins de FERMAT; 2° de l'Inventum novum de JACQUES DE BILLY; 3° du Commercium epistolicum de WALLIS. Paris, Gauthier-Villars 1896.
4°, XV + 610 + (1) p.

Fontès, Sur les carrés à bordure de Stifel (1544).
Association française pour l'avancement des sciences (congr. de Bordeaux) 1895, t. II, 248—256.

F[orsyth], A. R., Arthur Cayley. Obituary notice.
London, Roy. soc., Proceedings **58**, 1895, I—XLIII (avec portrait).

°**Goldbeck, E.**, Kepler's Lehre von der Gravitation. Ein Beitrag zur Geschichte der mechanischen Weltanschauung. Halle, Niemeyer 1896.
8°. (4) + 52 p. — [1·20 Mk.] — Abhandlungen zur Philosophie und ihrer Geschichte, herausg. von B. ERDMANN. Heft 6. — [Analyse:] Deutsche Litteraturzeitung 1896, 1174—1175. (M. CURTZE.)

°**Graf, J. H.**, Ludvig Schläfli (1814—1895). Zum Andenken an die Errichtung des Grabmonumentes Schläfli's und die Beisetzung der sterblichen Reste J. Steiner's.
Bern, Naturf. Gesellsch., Mittheilungen 1896. 26 p.

Günther, S., Jakob Ziegler, ein bayerischer Geograph und Mathematiker.
Forschungen zur Kultur- und Litteraturgeschichte Bayerns **4**, 1896, 1—61 + (2) p.

°**Günther, S.**, Kepler. — Galilei. Berlin, Hofmann 1896.
8°. (8) + 233 p. — [2·40 Mk.] — Geisteshelden. Führende Geister. Eine Sammlung von Biographien, herausg. von A. BETTELHEIM, Band 22. — [Analyse:] Deutsche Litteraturzeitung 1896, 1174—1175. (M. CURTZE.)

H., E., Nécrologie. A. Tartinville.
Revue des mathém. spéc. **6**, 1896, 369.

Jonquières, E. de, Sur une lettre de Gauss, du mois de juin 1805.
Paris, Acad. d. sc., Comptes rendus **122**, 1896, 829—830, 857—859.

Kikuchi, D., A series for π^2 obtained by the old Japanese mathematicians.
Tokyo, Sugaku butsurigaku kwai, Kiji **7**, 1896, 107—110. — La série dont M. KIKUCHI rend compte, semble être due au mathématicien SEKI (mort en 1708), fondateur des études mathématiques en Japon.

Kikuchi, D., Ajima's method of finding the length of an arc of a circle.
Tokyo, Sugaku butsurigaku kwai, Kiji **7**, 1896, 113—117. — Le mathématicien japonais AJIMA vivait vers la fin du 17e siècle.

Klein, F., Über Arithmetisirung der Mathematik.
Göttingen, Gesellsch. d. Wissensch., Nachrichten 1895 (Geschäftl. Mittheil.), 82—91. — [Traduit en italien par S. PINCHERLE:] *Palermo*, Circolo matematico, Rendiconti **10**, 1896, 107—117. — [Traduit en anglais par ISABEL MADDISON:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin $\mathbf{2}_2$, 1896, 241—249.

Klein, F., L'oeuvre géométrique de Sophus Lie.
Nouv. ann. de mathém. $\mathbf{15}_3$, 1896, 1—20. — Traduit de l'anglais par M. LAUGEL.

Kluyver, J. C., Korteweg, D. J. en **Schoute, P. H.,** David Bierens de Haan. 1822—1895.
Amsterdam, Wisk. Genootsch., Nieuw Archief **2**$_2$, 1896, I—XXVIII. — Avec une liste des écrits de BIERENS DE HAAN, composée par D. J. KORTEWEG.

Korteweg, D. J., Descartes et les manuscrits de Snellius, d'après quelques documents nouveaux.
Revue de métaphysique et de morale (Paris) **4**, 1896, 489—501.

Künssberg, H., Zum Andenken an Ludwig Oſterdinger.
Biblioth. Mathem. 1896, 50—52.

°**Kusch, E.,** C. G. J. Jacobi und Helmholtz auf dem Gymnasium. Beitrag zur Geschichte des Victoria-Gymnasiums zu Potsdam. Potsdam 1896.
4°, 44 p. + 2 facsim. — [1·60 Mk.]

Loria, G., Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche. Seconda edizione accresciuta ed interamente rifatta. Torino, Clausen 1896.
8°, XX + 346 + (1) p. — [8 lire.]

Lynn, W. T., Claudius Ptolemy and his works.
Nature (London) **53**, 1896, 488—490. — [Analyse:] Cosmos (Paris) **45**, 1896, 339—340. (J. BOYER.)

Mansion, P., Notice sur les travaux mathématiques de Eugène-Charles Catalan.
Bruxelles, Acad. de Belgique, Annuaire **62**, 1896. 60 + 2 p. + portrait.

Meyer, F., Rapport sur les progrès de la théorie des invariants projectifs. Traduction annotée par H. FEHR. (Fin.)
Bullet. d. sc. mathém. **20**$_2$, 1896, 139—151.

Millosevich, A., Aurelio Lugli.
Periodico di matem. **11**, 1896, 77—80. — Nécrologie.

Musici scriptores graeci, ARISTOTELES, EUCLIDES, NICOMACHUS, BACCHIUS, GAUDENTIUS, ALYPIUS et Melodiarum veterum quidquid exstat. Recognovit, prooemiis et indice instruxit C. JANUS. Leipzig, Teubner 1896.
8°, XCIII + 503 p. — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **41**, 1896; Hist. Abth. 104—105. (CANTOR.)

Obenrauch, F. J., Monge, der Begründer der darstellenden Geometrie als Wissenschaft. Eine mathematisch-historische Studie. Schluss. Brünn 1895.
4°, 44 p. — [Analyse des parties II—III:] Zeitschr. für Mathem. **40**, 1895; Hist. Abth. 106; **41**, 1896; Hist. Abth. 77—78. (CANTOR.)

°**Ritter, Fr.,** Viète. Notice sur sa vie et son oeuvre. Paris 1895.
8°, 102 p. — Ouvrage rédigé en 1888 par l'auteur († 1893). — [Analyse:] Bullet. d. sc. mathém. **20**$_2$ 1896, 204—211. (P. TANNERY.)

Sacerdote, G., Il trattato del pentagono e del decagono di ABU KAMIL SHOGIA BEN ASLAM per la prima volta pubblicato in Italiano.
Festschrift zum achtzigsten Geburtstage MORITZ STEINSCHNEIDERS (Leipzig, Harrassowitz 1896), p. 169—194.

Schlegel, V., Die Grassmann'sche Ausdehnungslehre. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik in den letzten fünfzig Jahren. (Schluss.)
Zeitschr. für Mathem. **41**, 1896; Hist. Abth. 41—59.

°**Serenus Antissensis**, Opuscula. Edidit et latine interpretatus est J. L. HEIBERG. Leipzig, Teubner 1896.
8°, 19 + 303 p. — [5 Mk.]

Simon, H., Vandermondes Vornamen.
Zeitschr. für Mathem. **41**, 1896; Hist. Abth. 83—85.

Smith, D. E., History of modern mathematics.
Higher mathematics. A textbook for classical and engineering colleges. Edited by M. MERRIMAN and R. S. WOODWARD (New York, Wiley 1896), p. 508—570.

Stäckel, P., Ein Brief von Gauss an Gerling.
Göttingen, Gesellsch. d. Wissensch., Nachrichten (Math. Kl.) 1896, 40—43.

Steinschneider, M., Die Mathematik bei den Juden.
Biblioth. Mathem. 1896, 33—42.

Sturm, A., Das delische Problem. (Fortsetzung.) Linz 1896.
8°, (2) p. + p. 57—97. — [Analyse de la 1e partie:] Zeitschr. für Mathem. **41**, 1896; Hist. Abth. 76—77. (CANTOR.)

Tischer, E., Die Begründung der Infinitesimalrechnung durch Newton und Leibniz. Leipzig, Hinrichs 1896.
4°. — [1 Mk.]

Vigarié, E., La bibliographie de la géométrie du triangle.
[Association française pour l'avancement des sciences (Congr. de Bordeaux) 1895. 14 p.

Zeuthen, H. G., Die geometrische Construction als »Existenzbeweis« in der antiken Geometrie.
Mathem. Ann. **47**, 1896, 222—228.

Question 59 [sur les méthodes équivalant à l'usage de logarithmes d'addition et de soustraction].
Biblioth. Mathem. 1896, 64. (G. ENESTRÖM.)

BALL, W. W. R., A primer of the history of mathematics. London, Macmillan 1895. 8°.
Biblioth. Mathem. 1896, 55—63. (G. ENESTRÖM.) — The physical review (New York) **3**, 1896, 487—489. (D. E. SMITH.) — Nature (London) **53**, 1896, 121—122. (G. B. M.)

BOYER, J., Le mathématicien franc-comtois François-Joseph Servois, d'après des documents inédits. Doubs 1895. 8°.
Cosmos (Paris) **45**, 1896, 404—405. (J. BOYER.)

CANTOR, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Dritter Band. Vom Jahre 1668 bis zum Jahre 1759. Zweite Abtheilung. Die Zeit von 1700 bis 1726. Leipzig, Teubner 1896. 8°.

Monatshefte für Mathem. **7**, 1896, 21. — [Analyse de la 2e édition du 1er tome:] Monatshefte für Mathem. **7**, 1896, 4—8.

DIOPHANTI ALEXANDRINI Opera omnia cum graecis commentariis. Edidit et latine interpretatus est P. TANNERY. I—II. Leipzig, Teubner 1893—1895. 8°.

Zeitschr. für Mathem. **41**, 1896; Hist. Abth. 101—104. (CANTOR.)

FAVARO, A., Sette lettere inedite di Guiseppe Luigi Lagrange al P. Paolo Frisi tratte dagli autografi nella Biblioteca Ambrosiana di Milano. Torino 1896. 8°.

Cosmos (Paris) **45**, 1896, 404. (J. BOYER.)

HULTSCH, F., Die Elemente der ägyptischen Theilungsrechnung. Erste Abhandlung. Leipzig 1895. 4°.

Deutsche Litteraturzeitung 1896, 790—791. (M. CURTZE.)

HUYGENS, CHR., Oeuvres complètes publiées par la société hollandaise des sciences. Tomes II—VI. La Haye, Nijhoff 1888—1895. 4°.

Bullet. d. sc. mathém. **20**$_2$, 1896, 121—131. (J. BERTRAND.)

NEPER, J., Mirifici logarithmorum canonis constructio; et eorum ad naturales ipsorum numeros habitudines; una cum appendice, de alia eâque præstantiore Logarithmorum specie condenda. Quibus accessere Propositiones ad triangula sphærica faciliore calculo resolvenda: Vnà cum Annotationibus aliquot doctissimi D. HENRICI BRIGGII in eas, et memoratam appendicem. Lugduni M.DC.XX. Paris, Hermann 1895. 8°.

Bullet. d. sc. mathém. **20**$_2$, 1896, 81—85. (P. TANNERY.)

STÄCKEL, P. und ENGEL, F., Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss. Eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der Nicht-Euklidischen Geometrie. Leipzig 1895. 8°.

Zeitschr. für Mathem. **41**, 1896; Hist. Abth. 105—106. (CANTOR.)

ZEUTHEN, H. G., Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter. Vorlesungen. Kjöbenhavn, Höst 1896. 8°.

Deutsche Litteraturzeitung 1896, 438. (M. CURTZE.) — Nature (London) **53**, 1896, 120—121. (G. B. M.) — Monatshefte für Mathem. **7**, 1896, 15—17. — Bullet. d. sc. mathém. **20**$_2$, 1896, 105—108. (P. TANNERY.)

Mathematisches Abhandlungsregister. 1895. Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni.

Zeitschr. für Mathem. **41**, 1896; Hist. Abth. 110—120.

[Listes d'ouvrages récemment publiés.]

Biblioth. Mathem. 1896, 63—64. — Zeitschr. für Mathem. **41**, 1896; Hist. Abth. 107—109, 151—152. — Fiziko-matem. naouki **13**, 1896, 68—76.

Bemerkung zur Biblioth. Mathem. 1896, S. 4. JOHANN VON GEMUNDEN war aus Gmund »in Niederdeutschland», nach der *hebräischen* Übersetzung seiner Beschreibung eines astronomischen Instruments, was ich für Schwaben geltend gemacht habe (siehe *Hebräische Übersetzungen des Mittelalters* S. 637, wo auch die Wiener *Tabulae* citiert sind).

(M. Steinschneider.)

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

60. Dans la Biblioth. Mathem. 1892, p. 32 nous avons inséré une question sur l'origine du terme *regula cecis* (ou *coeci*), et nous y avons fait mention de quelques interprétations de ce terme, dont le dernier mot a été dérivé de *coecus*, de *Zeche*, ou de *zecca*. Or dans la question 860 (p. 152—153), de L'intermédiaire des mathématiciens 1896, M. ZEUTHEN vient de rapporter un passage de l'*Arithmetica* (Sorö 1643) de J. W. LAUREMBERG, où l'on trouve l'indication suivante: »Reperitur in nonnullis libellis arithmeticis . . . regula, corruptâ voce *Cecis* . . . appellata . . . Eam . . . Arabes . . . *Cïntu Sekîs*, hoc est adulteram indigetarunt: propterea, ut opinor, quòd uno ac legitimo quæstionis enodatu non contenta, plures plerumque admittat solutiones.» Il semble donc que toutes les interprétations données jusqu'à présent du mot *cecis* soient fautives, et que ce mot tire son origine de l'arabe.

Est-ce que l'indication de LAUREMBERG est exacte, et, en cas affirmatif, quel est le premier auteur arabe qui se soit servi du terme dont il s'agit. (G. Eneström.)

Inhalt. — Table des matières.

STOCKHOLM, TRYCKT I CENTRAL-TRYCKERIET, 1896.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK | JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON | PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1896. STOCKHOLM. N° 4.

NEUE FOLGE. 10. | NOUVELLE SÉRIE. 10.

BERLIN. MAYER & MÜLLER. Prinz Louis-Ferdinandstr. 2.

Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr.

PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Esquisse de l'histoire du calcul fractionnaire.

Par V. V. Bobynin à Moskwa.

Dans son origine le calcul fractionnaire et la première formation du système de numération qui en dérive, remontent à l'espace de temps énorme durant lequel la notion du nombre *trois* s'était formée, alors que tout le domaine du calcul dont disposait l'humanité se bornait à l'unité et à *deux* comme notions définies des nombres, à la multitude comme notion indéfinie. La *moitié* fut la première fraction que connut le genre humain. D'autres fractions du système binaire vinrent enrichir à sa suite la conception numérique de l'homme. La moitié de n'importe quel objet fut à son tour divisée en deux *demi-moitiés,* celles-ci en deux *demi-demi-moitiés* et ainsi de suite, la limite étant posée par les besoins de la vie pratique. Ce système binaire des fractions nous donne un exemple frappant de sa formation dans l'ancien système russe des mesures agraires. Les manuscrits et les actes officiels traitant de l'arpentage à l'époque antérieure à Pierre le Grand allaient jusqu'à répéter huit, neuf et même dix fois la particule *demi* devant le mot *moitié.*[1]

Le calcul fractionnaire dans son développement qui en suivit de près l'origine, se borna longtemps à multiplier les subdivisions de l'unité par des nombres nouvellement découverts, à mesure que la conception indéfinie de la multitude les dévoilait à la raison humaine. Le *tiers* fut donc la première fraction ajoutée aux fractions du système binaire. Celui-ci

appliqué à un tiers en donnait les subdivisions binaires d'un *demi-tiers,* d'un *demi-demi-tiers* etc. La Russie ancienne nous en offre de très bons modèles dans ses mesures agraires comme dans celles des céréales.[2] Des applications analogues de la même loi eurent pour conséquence que pas toutes les subdivisions de l'unité successivement découvertes ne servirent à élargir le domaine fractionnaire en question. Ainsi, par exemple, la fraction d'un *quart* issue du nombre quatre était connue antérieurement comme appartenant au système binaire, nommément comme une demi-moitié. On ne saurait douter cependant que l'identité de ces deux notions, celle d'un quart et celle d'une demi-moitié ne devînt claire pour l'humanité qu'à l'époque relativement postérieure. On en voit une preuve suffisante dans l'usage simultané des fractions binaires et des subdivisions binaires d'un quart dans le système russe ancien des mesures agraires.

Les subdivisions de l'unité dont l'humanité prenait successivement connaissance par la voie que nous venons de tracer, apparaissant toujours sous la forme concrète d'un tel ou tel objet réel, on en opérait le compte comme celui des objets entiers, c'est à dire, on arrivait à des résultats exprimés en nombres entiers. De cette manière, dans les époques le plus reculées, de même qu'aux temps plus récents et à un degré de culture correspondant, l'unité concrète et ses subdivisions à leur tour acceptées comme des unités concrètes des ordres inférieurs, était bien l'unique objet du calcul. Celui des fractions dut se renfermer à cause de cela dans la partie de son domaine actuellement appelée dans l'arithmétique calcul des nombres concrets.

La première phase du calcul fractionnaire fut donc le calcul des nombres concrets. L'état et les formes des quatre règles d'arithmétique appliquées aux fractions dans cette première phase sont représentés par les plusieurs manuscrits agraires de l'ancienne Russie,[3] qui contiennent les articles traitant de l'addition et de la soustraction, par les »minutiae» romaines[4] et par les fractions sexagésimales employées par les astronomes de la Grèce Antique.[5] Les »minutiae» romaines ou les subdivisions diverses et pour la plupart binaires de la fraction $\frac{1}{12}$ représentent justement le premier cas de l'application du système métrologique avec ses règles et procédés (généralement parlant l'application du calcul des nombres concrets) à des fractions abstraites soumises aux opérations du calcul. L'idée de la fraction à l'époque des »minutiae», séparée des notions des objets réels qui lui avaient été liées antérieurement, autrement

dit l'apparition de l'unité abstraite comme objet de calcul à côté de l'unité concrète ont eu pour résultat inévitable cette application. Le degré suivant et en même temps le dernier que nous connaissions dans le développement du calcul fractionnaire sous la forme des nombres concrets fut l'application immédiate aux fractions abstraites du système métrologique dans ses formes extérieures comme dans les règles et les procédés qui en dérivent. Créé de cette manière le calcul fractionnaire est très bien représenté par le système sexagésimal cité plus haut et employé par les astronomes grecs. Tel que nous le trouvons dans la phase du calcul des nombres concrets, l'état du calcul des fractions abstraites se manifestait essentiellement par là, que de tout le domaine des fractions abstraites les calculateurs des époques correspondantes ne pouvaient opérer qu'avec des quantièmes. Toutes les autres fractions extérieurement assimilées dans leur emploi aux nombres entiers n'apparaissaient aux calculateurs des époques en question que sous des formes si vagues et si peu claires qu'elles excluaient toute possibilité d'opérations arithmétiques en dehors du calcul des nombres concrets. Par conséquent on en vint à la nécessité d'exprimer la partie fractionnaire du quotient, obtenue dans certains cas de division, par les quantièmes. Tout d'abord, l'humanité connut les fractions abstraites dans la forme qui leur était propre et qui ne dépendait pas du calcul des nombres concrets, le procès servant à exprimer la partie fractionnaire du quotient au moyen des quantièmes ne pouvait s'opérer qu'à l'aide des schèmes trouvés dans le calcul des nombres concrets. Justement, il consistait à prolonger la division par le reste moindre que le diviseur moyennant la transformation de ce reste en telles ou telles subdivisions de l'unité. Cette méthode de transformer le quotient fractionnaire dans les quantièmes peut être appelée celui *de la division* et fut suivi plus tard par celui *de la réduction* (exactement parlant *la méthode de la réduction d'une fraction à sa plus simple expression*). Ce dernier dont l'origine est aussi à chercher dans le calcul des nombres concrets arrive à transformer le quotient fractionnaire en quantièmes en divisant le dividende et le diviseur par le dividende. Avec le temps, ces deux méthodes principales en développèrent bien d'autres, particulières et générales, en en figurant les combinaisons et les variétés plus ou moins éloignées. L'oeuvre de LEONARDO PISANO, *Liber Abbaci*[6] en 1202, nous donne la description précise et détaillée de la plupart de ces méthodes. A l'aide de toutes ces nombreuses méthodes servant

à exprimer le quotient fractionnaire ou la fraction en général par les quantièmes (à l'origine presque exclusivement à l'aide du procédé de la division comme se prêtant le plus à toutes sortes d'applications), les fractions au numérateur plus grand que l'unité, purent être entièrement éliminées de la pratique du calcul fractionnaire, suivant qu'en eurent besoin les calculateurs des époques éloignées et ceux qui ne les dépassèrent pas intellectuellement aux temps plus récents. Le calcul des fractions abstraites en fut donc exclusivement borné au domaine des quantièmes. *La seconde phase du calcul fractionnaire* qui remplaça la phase primitive du calcul des nombres concrets fut par conséquent *celle du calcul des fractions abstraites, exclusivement représentées par les quantièmes.* Les matériaux servant à étudier l'état, les formes et les progrès des quatre règles d'arithmétique dans leur application aux fractions, dans cette seconde phase de leur développement historique, nous sont amplement fournis par le papyrus égyptien de Rhind[7] et par les oeuvres mathématiques de la Grèce Antique (surtout les oeuvres de HÉRON d'Alexandrie) et de Byzance (le papyrus gréco-égyptien d'Akhmîm[8] remontant au VII—VIII s.).

Dans ces monuments littéraires on ne rencontre pas du tout l'usage des fractions abstraites au numérateur plus grand que l'unité, à moins d'une seule exception représentée par la fraction $\frac{2}{3}$. Selon toute apparence ce n'est ni en Grèce, ni en Egypte que l'usage s'en est d'abord développé, mais dans le pays où la science des nombres avait atteint dans l'antiquité son point culminant, voire l'Hindoustan. Il est à regretter que le manque absolu de monuments littéraires des mathématiques indiennes antérieures au V siècle avant J. C. ne nous permette ni d'en tracer la voie, ni d'en montrer le progrès. Les Indous auront transmis l'usage des fractions abstraites au numérateur plus grand que l'unité aux Arabes et aux Byzantins et ceux-là aux Italiens et aux autres peuples de l'Europe occidentale. Ce fut *la troisième et dernière phase dans le progrès historique du calcul fractionnaire.* Le *Liber Abbaci* de LEONARDO PISANO[9] nous en donne le premier exposé précis et complet; nous y trouvons en même temps des articles et des règles inutiles aux contemporains de l'auteur, mais représentant l'héritage de la phase précédente du calcul fractionnaire.

[1] V. BOBYNIN, *Quelques mots sur l'histoire des connaissances mathématiques antérieures à la science.* Bibliotheca Mathematica 1889, p. 105.

[2] V. BOBYNIN, l. c. p. 105.

[3] V. BOBYNIN, »Esquisses d'histoire du développement des connaissances mathématiques et physiques en Russie.» V. L'arpentage [en russe]. Fiziko-matematitcheskaia naouki **3**, 1886, p. 222—224.

[4] H. HANKEL, *Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter* (Leipzig 1874), p. 57—62. — V. BOBYNIN, »Leçons d'histoire des mathématiques» [en russe]. Appendice au journal Fiziko-matematitcheskaia naouki **11**, 1892, p. 174—179.

[5] NESSELMANN, *Die Algebra der Griechen* (Berlin 1842), p. 136—147. — V. BOBYNIN, »Leçons d'histoire des mathématiques», l. c. p. 179—186.

[6] *Scritti di* LEONARDO PISANO *pubblicati da* B. BONCOMPAGNI. I (Roma 1857), p. 77—83.

[7] A. EISENLOHR, *Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter (Papyrus Rhind des British Museum).* Erster Band (Leipzig 1877), p. 36—48, 226—250.

[8] J. BAILLET, *Le papyrus mathématique d'Akhmîm.* Mémoires publiés par les membres de la mission archéologique française au Caire. Tome neuvième. 1-er fascicule. Paris 1892, p. 1—89.

[9] *Scritti di* LEONARDO PISANO, I, p. 23—83.

Johannes Anglicus und sein Quadrant.

Von Moritz Steinschneider in Berlin.

In seinem lehrreichen Artikel über Feldmessungs-Instrumente (Biblioth. Mathem. 1896, S. 70 und 72 Anm. 13) berührt Herr Curtze Robertus Anglicus, auch Johannes von Montpellier genannt, »dessen Zeit P. Tannery auf etwa 1240—1272 festgestellt habe, und dessen '*Quadrans cum cursore*' die Grundlage aller späteren Abhandlungen *de quadrante* sei, welche man geradezu als Plagiate bezeichnen könnte, wenn die damalige Zeit diesen Begriff schon gekannt hätte».[1] Mir ist leider nicht bekannt, wo und wann P. Tannery von Robertus Anglicus gehandelt, also auch nicht, ob er meine Erörterungen über Robertus gekannt hat; Letzteres ist mir sehr unwahrscheinlich; ich erlaube mir daher eine Hinweisung darauf mit einigen Ergänzungen, die dorthin nicht gehörten.

Meine Untersuchungen über den Quadranten, welchen Jakob ben Machir, genannt Prophiat, vulgo Profatius, von Montpellier kurz vor 1300 erfand und in einer hebräischen Schrift (in 2 Recensionen)[2] darstellte, die bald 3 Bearbeitungen in *lateinischer* Sprache hervorrief, wovon eine wieder ins Hebräische zurückübersetzt wurde — führten mich darauf, dass Jakob's Erfindung als »Quadrans *novus*» bezeichnet wurde, im Gegensatz zu einem »Quadrans *vetus*», oder *antiquus*, welcher unter verschiedenen Titeln, anfangend: »Geometriae duae sunt partes» (daher auch als »Geometria» bezeichnet) in nicht wenigen *anonymen* lateinischen mss. von mir nachgewiesen wird.[3] Mehrere mss. nennen den Verf. »Johannes (Anglicus) in Monte Pessulano». Nur in 2 mss. — Museum Correr in Venedig und Amplon. qu. 348 — fand ich den Namen Robertus Anglicus, wofür der Catal. Ampl. ohne Weiteres Robert von Lincoln setzt! Auch eine *hebräische* Bearbeitung des »alten Quadranten» wies ich nach.

Der Namen Robertus schien mir verdächtig, da Johann besser bezeugt ist, und beide zugleich höchst unwahrscheinlich sind. Ich sprach daher die Vermutung aus, dass Robertus aus einer Verwechslung entstanden sei mit dem bekannten Übersetzer Robert Retinensis (oder Ketinensis, Castrensis) aus England, der den Koran (1143) und *mathematische* Schriften

aus dem Arabischen übersetzte, worauf ich anderswo zurückkomme.[4]

An Robertus Retinensis knüpft Leclerc (*Hist. de la médecine Arabe,* II, 382) die Übersetzung eines astrologischen Buches *de Judiciis* von al-Kindi, obwohl ein Bodleianisches ms. das Datum 1272 trägt, welches sich auf die Abschrift beziehen könnte; aber p. 494 bekennt er selbst: »Nous ignorons quel peut être ce personnage.« In einer Aufzählung der ins Lateinische übersetzten Schriften von al-Kindi (Zeitschr. der deutschen morgenl. Gesellsch. **24**, 1870, S. 348) habe ich beinahe 10 mss. von »*de judiciis*« aufgezählt, worunter eine, oder mehrere, den Übersetzer Robertus Anglicus *de chebil* nennen, wie schon Tanner, *Bibl. Britt.* p. 636, einen Commentar über Sacrobosco's *Sphaera* 1272 für die Studenten in *Montpellier* verfasst von Robertus Anglicus, oder Angliginus, de Chebil, angiebt; in der Note dazu heisst es: »claruit a. 1326(!) Balaeus V, 23, Pits 419«. Den Commentar verzeichnet Macray unter ms. Digby 48, 4, *de judiciis* unter n. 91, ohne den Namen Chebil. Letzteren hält Wüstenfeld (*Die Übersetzungen arabischer Werke* etc. S. 119) sicher für *Sevilla;* das Jahr 1326 möchte er als Todesjahr emendiren. Von einem Johannes Anglicus spricht Wüstenfeld nicht. Robert soll auch Alchemist gewesen sein, so dass man bei der Übersetzung *alchemistischer* Schriften wieder auf Robert Retinensis geführt wird; doch möchte ich meine Notiz nicht auf das entlegene, der geschichtlichen Kritik ohnehin viel Rätselhaftes entgegenbringende Gebiet ausdehnen, und nur eine hier nahe liegende Nachricht heranbringen. Kopp (*Beiträge* III, 34) bemerkt zu Rodogerus Hispalensis, Übersetzer von Geber (Djabir ben 'Hajjan), *Liber fornacum:*[5] »Über welche Persönlichkeit irgend Etwas in Erfahrung zu bringen ich mich jedoch ohne Erfolg bemüht habe«. Ich möchte kaum zweifeln, dass Rodoger aus Robert entstanden ist; bei Jourdain kommt auch Robert Retinensis als »Rodbertus« vor (*Recherches* p. 105 ed. I).

Ich resumire nun dahin: Johannes Anglicus ist schwerlich identisch mit Robertus Anglicus dem jüngeren, wenn es einen solchen gab, also ist auch seine Zeit nicht ganz sicher; doch hat er vor 1300 gelebt, sein »alter Quadrant« rief in Montpellier den »neuen« hervor, dessen Eigentümlichkeit noch aus hebräischen und lateinischen mss. zu ermitteln wäre, um ihn nicht zu den »Plagiaten« zählen zu müssen.

Über Robert sind die Acten noch lange nicht geschlossen; meine flüchtigen Notizen sollten nur veranlassen, dass Männer

von Fach, welchen die handschriftlichen Quellen zugänglich sind, den ganzen Apparat nochmals prüfen, wenn es von Herrn TANNERY noch nicht gethan sein sollte.

[1] Über eigentliche Plagiate wird wohl auch im Mittelalter geklagt, wenn man auch nicht ängstlich genug citirte; ich habe allerlei darüber gesammelt, was hier nicht am Orte wäre.

[2] Einige Nachweisungen darüber werden so eben im Anhange zu meinem zweiten Verzeichnisse der hebr. Handschr. der K. Bibliothek in Berlin gedruckt.

[3] *Die Hebr. Übersetzungen* S. 612.

[4] Quellen über ihn s. in Hebr. Bibliogr. XXI (1881—1882) S. 11; in L. STEPHAN, *Dictionary of native Biography* t. IX, finde ich ROBERT CASTRENSIS nicht.

[5] Eine Schrift dieses Titels citirt IBN ESRA mit Angabe eines unsicheren Autornamens (Zeitschr. der deutschen morgenl. Gesellsch. **24**, 1870, S. 378). »Ofen» heisst auch das Gefäss »Alambîk», worüber s. Deutsches Archiv für Gesch. d. Medicin **1**, 1878, S. 441.

Beitrag zur Geschichte der prosthaphäretischen Methode in der Trigonometrie.

Von A. von Braunmühl in München.

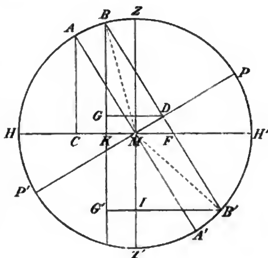
Die Erfindung der sogenannten prosthaphäretischen Methode, welche vor Bekanntwerden der Logarithmen dazu diente, die Multiplikation zweier Zahlen durch Addition zu ersetzen, schreibt R. Wolf, der sich mit ihrer Geschichte eingehend beschäftigte,[1] dem Paul Wittich (um 1580) zu; mir scheint dieselbe jedoch weit älteren Ursprungs zu sein. Ich will daher im Folgenden mitteilen, was ich hierüber auffinden konnte.

Eine Spur dieser Methode findet sich bereits bei Ibn Yûnos († 1008). In meinen demnächst erscheinenden Beiträgen zur Geschichte der Trigonometrie glaube ich im Gegensatze zu Delambre's Anschauung[2] nachgewiesen zu haben, dass die Araber alle ihre astronomischen Rechnungen an einer Figur ableiteten, die sich durch Orthogonalprojektion der Kugel auf die Ebenen des Meridians und des Horizontes ergibt, eine geometrische Methode, welche sie dem Analemma des Ptolemäus entnahmen und mit dem Rechnungsverfahren der Inder verbanden. Aus derselben Figur aber folgerten sie auch die prosthaphäretische Methode, genau so, wie es die Gelehrten des 16. und 17. Jahrhunderts wieder gethan haben.

So teilt Delambre mit,[3] dass Ibn Yûnos die Formel gekannt habe:

$$\cos\varphi \cos\delta = \tfrac{1}{2}\left\{\cos(\varphi - \delta) + \cos(\varphi + \delta)\right\},$$

das will sagen, dass er den Inhalt dieser Formel, welche eine der prosthaphäretischen ist, in Worten angab.



Nach allem was ich in den erwähnten Beiträgen nachgewiesen habe, besteht für mich kein Zweifel mehr, dass Ibn Yûnos die in dieser Formel ausgesprochene Regel in folgender Weise fand:

Sei in nebenstehender Figur $ZPZ'P'$ der Meridian, ZZ' die Zenitlinie, PP' die Weltaxe, HH' der Schnitt des Horizonts mit der Meridianebene und BB' die senkrechte Projektion der

Bahn des Sternes auf diese Ebene, dann ist arc $AZ = \varphi =$ Polhöhe, arc $AB = \delta =$ Deklination, $AM =$ sinus totus $= 1$, $AC \perp HH'$ $= \cos\varphi$, $BD = \cos\delta$. Zieht man noch $BK' \perp HH'$, $B'G' \parallel HH'$ und $DG \parallel HH'$, so ist

$$(1) \quad BG = \tfrac{1}{2} B'G' = \tfrac{1}{2}(BK' + MI) = \tfrac{1}{2}\{\cos(\varphi - \delta) + \cos(\varphi + \delta)\}$$

Aber $\Delta ACM \sim \Delta BGD$, also $MA : AC = BD : BG$ oder sin. tot. : $\cos\varphi = \cos\delta : BG$, und hieraus

$$(2) \qquad BG = \cos\varphi \cos\delta.$$

Durch Vergleich von (1) und (2) folgt die gesuchte Formel.

Hiemit ist gezeigt, dass die Araber unsere Methode wenigstens in einem speziellen Falle anwendeten. Ich vermute jedoch, dass es Kennern der arabischen Literatur nicht schwer fallen dürfte, noch mehr solche Beispiele nachzuweisen.

Aber von den Orientalen abgesehen ist Wittich auch unter den Gelehrten des Abendlandes keineswegs der erste, der sich dieser Methode bediente — sie erfand. Dieselbe verwendete vielmehr schon anfangs des 16. Jahrhunderts der bekannte Johann Werner aus Nürnberg, wie ich nachweisen werde.

R. Wolf sagt a. a. O.: »Jacob Christmann soll in seiner *theoria lunae* (Heidelbergae 1611, in fol.) behaupten, es habe schon Werner in einem ungedruckt gebliebenen Tractate De triangulis, von der Prosthaphäresis Gebrauch gemacht: Genaueres wird jedoch nicht mitgeteilt.» Letztere Bemerkung hätte Wolf jedenfalls nicht niedergeschrieben, wenn er Christmanns angeführtes Werk selbst in Händen gehabt hätte. *Denn dieser teilt* Werner's *Verfahren vollständig mit* und erklärt ausdrücklich, dass es in jener Abhandlung über die Dreiecke auseinandergesetzt sei, für die Werner, wie bekannt, leider keinen Verleger finden konnte. Seine Auseinandersetzung knüpft an eine Beobachtung der *Spica* an, die in den *Adnotationes* zu der Schrift *De motu octavae sphaerae*[4] Werner's mitgeteilt ist.

Durch Beobachtung am 16. Dezember 1514 $1^h\ 4'$ nach Sonnenaufgang findet Werner nämlich die Deklination der *Spica virginis* $\delta = 8^\circ\ 29'\ 30''$, dann setzt er die Ekliptikschiefe $\varepsilon = 23^\circ\ 28'\ 30''$, die Breite des Sternes $\beta = 2^\circ$, die Polhöhe des Beobachtungsortes Nürnberg $\varphi = 49^\circ\ 23'\ 30''$ und berechnet die Länge λ des Sternes. Dies wird (Proposition II) mit folgenden Worten angegeben: »Igitur *juxta praeceptiones theorematum praedicti tertii libri sphaeralium triangulorum memoratae proportionis primus terminus invenitur* 3981067. Secundus

10000000 partes semidiametri zodiaci, Tertius 5137615.» Hieraus folgt dann auf bekannte Weise das vierte Glied der Proportion = 12905120. Zieht man hievon 10000000 ab, so bleiben 2905120 Teile, welche den Sinus der gesuchten Länge ausmachen. Mittelst der Tabelle ergibt sich dann $\lambda = 16^\circ 53' 19''$.

Indem nun CHRISTMANN diese Beobachtung WERNER's in seiner erwähnten *Theoria Lunae*[5] mitteilt, sagt er (p. 124 daselbst): »Usus etiam est peculiari prosthaphaeresi, cujus demonstrationem attulit in proprio opere de Triangulis scripto, in quo etiam *tres casus Prosthaphaeresium*, per tres distinctas figuras explicavit, *et nonnullis transcriptoribus occasionem praebuit, ut cum opus hoc lucem nondum viderit, sed manuscriptum duntaxat apud nos extet, inventionem Prosthaphaereseos sibi vendicaverint,* eamque multis partibus amplificârint.» Hierauf gibt CHRISTMANN unter Überschrift: »Praeceptum ex sententia WERNERI» an, wie WERNER zu den oben angeführten 4 Proportionsgliedern gelangt, indem er (p. 124—125) sagt: »Latitudinem stellae adde et subtrahe maximae Solis declinationi: et utriusque arcus, tam compositi. quam residui, accipe sinum. Sinum minorum adde majori: et semissis aggregati, dabit primum numerum in regula proportionum. Deinde sinum arcus residui adde sinui declinationis stellae: et productum dabit numerum tertium in regula proportionum. Pro secundo numero regulae proportionis, pone sinum totum: qui ex hypothesi Analemmatis, aequatur sinui complementi latitudinis stellae, sive semidiametri et radio paralleli.» Diese Proportion heisst also in der uns geläufigen Schreibweise:

$$\tfrac{1}{2}\{\sin(\varepsilon+\beta)+\sin(\varepsilon-\beta)\} : \text{sin. tot.} = \{\sin\delta+\sin(\varepsilon-\beta)\} : x\,,$$

und das hieraus resultirende x setzt er gleich dem sinus versus der gesuchten Länge λ, so dass

$$\operatorname{sinv}\lambda = \frac{\sin\delta+\sin(\varepsilon-\beta)}{\tfrac{1}{2}\{\sin(\varepsilon+\beta)+\sin(\varepsilon-\beta)\}}$$

wird.

Für uns ist im Augenblick nur der Nenner dieses Ausdruckes von Interesse, indem durch ihn das Produkt $\sin\varepsilon\cos\beta$ ersetzt wird, *also eine der prosthaphäretischen Regeln gegeben ist.*

Vergleicht man die Worte WERNER's mit der Regel, die CHRISTMANN, als jenen Dreiecksbüchern entnommen, zur Bildung des fraglichen ersten Termes der Proportion gibt, so wird wohl kein Zweifel mehr bestehen, dass die Mitteilung des Letzteren auf Wahrheit beruht.

Dass des Weiteren Werner die Ableitung seiner prosthaphäretischen Formel, sowie die der ganzen mitgeteilten Proportion ebenso wie die Araber und wie ihnen folgend seinerzeit Regiomontan seinen Cosinussatz aus der Figur des Analemmas abgeleitet hat, bestätigt Christmann, indem er (p. 224) noch sagt: »Atque hic fuit locus spicae virginis á Wernero observatus *et beneficio Analemmatis demonstratus.*»

Auch Christmanns eigene Beweise der prosthaphäretischen Regeln, die er p. 155 und 156 des angeführten Werkes gibt, beruhen ebenso, wie die des Clavius[6] und anderer auf der Projektion der Kugel auf die Meridianebene.

Ob Johann Werner, der nicht nur die Sinusse sondern auch die Tangenten in seinen Dreiecksbüchern verwendet hat, auch für jene sphärischen Formeln, in denen ein Produkt aus einer Tangente und einem Sinus oder Cosinus vorkommt, die diesbezüglichen Regeln bereits angegeben hat, wie sie sich z. B. in dem Werke von Clavius finden, oder ob er sie gar schon zur Multiplication *beliebieger* Zahlen verwendete, lässt sich natürlich mit diesem Material nicht entscheiden, ist aber bei Werner's practischem Blicke sehr wahrscheinlich.

[1] R. Wolf, *Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Literatur*, 1890, I, p. 227—228, Anmerkung, und *Astronomische Mitteilungen* N° 31 und 32. Vgl. auch Kaestner, *Gesch. der Math.* I, p. 567.

[2] Delambre, *Histoire de l'Astronomie du moyen âge*, p. 128.

[3] Delambre, l. c. p. 108.

[4] Die *Adnotationes* finden sich in dem bekannten Sammelbande Werner'scher Schriften (vgl. etwa Cantor, *Geschichte der Mathematik* II, p. 418 ff.), und führt das einschlägige Capitel die Überschrift: De motu octavae sphaerae tractatus primus, qui triginta quattuor cum theorematibus tum problematibus, quae propositiones libuit apellare, consummatur. Das 1522 bei L. Alantsee veröffentlichte Werk ist nicht paginirt.

[5] Jacobi Christmanni *Theoria lunae ex novis hypothesibus et observationibus demonstrata* (Heidelbergae 1611, fol.). Christmann lebte 1554—1613. In seinen *Observationum solarium libri tres* (Breslau 1607, 4°) behandelt er die Prosthaphäresis ebenfalls p. 144 ff.

[6] Vgl. Christophori Clavii *Opera mathematica* (Moguntiae 1612, fol.) t. III. Lemma I, III libri I Astrolabii.

Die Mathematik bei den Juden.

Von MORITZ STEINSCHNEIDER in Berlin.

Das XIII. Jahrhundert.

27. Im XIII. *Jahrhundert* beginnen die *Übersetzungen arabischer* mathematischer Schriften ins Hebräische, die wir äusserst kurz erledigen werden, indem wir unter den betreffenden Übersetzern die von ihnen übersetzten Schriften, mit Verweisung auf meine Monographie, aufzählen.[1]

An der Grenze der beiden Jahrhunderte verzeichne ich folgende Autoren:

SIMSON BEN MORDECHAI, den ich in einem, zwischen 1150 und 1250 geschriebenen Ms. als Verfasser eines Kalenderreimes, anfangend שמעו מלכים (*Schim'u Melachim*), sonst nirgends gefunden habe.

Im Jahre 1203 verfasste SALOMO BEN NATAN aus Segelmesa (in Nordafrika)[2] ein arabisches Ritualwerk, wovon die Bodleiana ausser dem von URI (298) beschriebenen Codex noch andere unvollständige, von mir erkannte, besitzt. Dies Werk, worüber ich zuerst eine Notiz gab, widmet das 26. Kapitel in 7 Paragraphen der Zeitrechnung; die Aufnahme dieses Thema's in Ritualwerken ist nichts Neues; wir haben sie bereits in dem hebräischen grossen Werke des MAIMONIDES gefunden; sie ist daraus hervorgegangen, dass die jüdischen Feiertage frühzeitig einen festen Kalender ausbildeten; sie bewirkte, dass die jüdischen Gesetzkundigen eine Anregung fanden, sich wenigstens mit den Elementen der Astronomie zu beschäftigen. Allein je mehr und je gründlicher die Astronomie in besonderen hebräischen Schriften behandelt wurde, desto mehr schwand sie aus den gesetzlichen Schriften, welche das religiöse Leben der Ungelehrten regeln sollten; wir finden noch einen chronologischen Abschnitt in dem practischen Codex des Toledaners JAKOB BEN ASCHER (1340), allein in dem daraus hervorgegangenen, am meisten zur Autorität gelangten, so vielfach citirten *Schulchan Aruch* des JOSEF KARO (1565 in Palästina, I, K. 417—28) schliesst die Observanz des Neumondhalbfestes alle theoretische Berechnung aus.

Eine Copie des Werkes des SALOMO BEN NATAN hat der Copist, SA'ADJA BEN JEHUDA BEN EBJATAR (1203), mit einem arabischen chronologischen Nachtrag versehen, den er *Kitab al-Dastur fi 'Sana'at al-'Ibbur* (Buch des Canon, über die Kunst

der Intercalation) betitelte. Ich bin noch nicht dazu gekommen, meine Notizen darüber (vom Jahre 1850) zu verarbeiten, und hier wäre kein Raum dafür; ich beschränke mich auf die Bemerkung dass dieser SA'ADIA mehrere Formeln im Namen des homonymen Gaon mitteilt.

28. 1207—1208 starb der Astrolog und Arzt ABU'L-FADHL BEN JAMIN (= Benjamin) AL-'HALABI (aus Aleppo), genannt AL-SCHUREITI, ein Schüler des SCHARAF AL-DIN AL-TUSI, des Erfinders eines Astrolabs, welches man *al-Khatti* (auf Linien reducirendes) nennt,[3] von welchem er Zahl- und Tabellen-Kunde erlernte; von den Juden wurde er injurirt (oder übel behandelt). Derselbe ist ohne Zweifel der »jüdische Astronom ABU'L-FADHL», bei IBN ABI O'SEIBIA (II, 244 Z. 3) unter dem Arzte DAKHWAR erwähnt. HAMMER VII, 734 und LECLERC II, 279 haben diesen Passus nicht.[4]

DAVID (1228—1244) war Dolmetsch aus dem Arabischen für den Canonicus SALIO aus Padua, bei der Übersetzung der Astrologie von »ALBUBATHER» (ABU BEKR...? — noch nicht näher festgestellt); nach einer Lesart lebte er in Barcelona (*Hebr. Übers.* S. 546).

Um 1230 lebte wohl DAVID IBN NAHMIAS in Toledo, dessen Commentar zum *Almagest* des PTOLEMAEUS angeführt wird; vielleicht rühren von ihm, etwa in jenem Commentare, Widerlegungen der eigentümlichen astronomischen Hypothesen des DJABIR (»Geber») IBN AFLA'H her, welche jedenfalls nicht jünger als 1247 sind (*Hebr. Übers.* S. 546).

Vor 1235 starb in St. Jean d'Acre der, als Erklärer des Talmud berühmte SIMSON BEN ABRAHAM aus Sens in Frankreich, welchem Kalendarisches beigelegt wird; allein seine Kentnisse in der elementen Geometrie waren sehr geringe.[5]

1231—1235 arbeitete in Neapel unter der Protection und auf Veranlassung Kaiser FRIEDRICH's II. JAKOB ANATOLI (vulgo ANTOLI) aus der Provence. Er übersetzte aus dem Arabischen den *Almagest* des PTOLEMAEUS und das Compendium des AVERROES,[6] auch die Astronomie von AL-FERGANI, dessen Übersetzung von JACOB CHRISTMANN (1590) benutzt ist.

Anonyme Kalendertabellen über die Jahre 4998—5027 (1238—1267) in ms. Vat. 329[2] gehören vielleicht zu einer Monographie.

29. Eine interessante Persönlichkeit, welche eine Monographie verdiente, ist JEHUDA BEN SALOMO KOHEN aus Toledo, Verfasser eines grossen encyklopädischen Werkes, ursprünglich arabisch abgefasst und wahrscheinlich verloren, später von ihm selbst ins Hebräische übersetzt unter dem Titel *Midrasch ha-Chochma,* wovon kein einziges durchaus vollständiges Exemplar erhalten ist, während einzelne Teile in den Bibliotheken zu

finden sind; — im Augenblick, wo ich dieses schreibe, wird mir der grösste Teil des Werkes in 2 Quartbänden von sehr junger deutscher Hand vorgelegt, um es zu recognosciren und der k. Bibliothek zu empfehlen; die genaue Beschreibung kommt als Nachtrag des Verzeichnisses.

Uns interessiren aus diesem Werke folgende Bestandteile:

a) Ein Auszug aus EUKLID I—VI und XI—XIII; die Bücher VII—X, welche für das Studium des *Almagest* (der ja als Ziel des mathematischen Studiums galt) unnötig sind, blieben ausgeschlossen.

Daran knüpft sich eine (ursprünglich arabische) Correspondenz zwischen dem, damals 18 Jahre alten, noch in Spanien weilenden Verf. und dem »Philosophen» des Kaisers (nach meiner Vermutung THEODORUS, Philosoph FRIEDRICHS II.) über sehr einfache mathematische Fragen, so dass JEHUDA seine Verwunderung über die Unkenntnis des »Philosophen» demselben ungenirt zu erkennen gibt. Eine Abschrift dieser Correspondenz liess ich vor mehr als 40 Jahren in Oxford anfertigen; sie wird mit dem angebotenen ms. verbunden werden, worin sie fehlt.

b) Eine Bearbeitung des *Almagest* von PTOLEMAEUS, wo zu I, 8 auf DJABIR BEN AFLA'H's Erklärung der ***Figura sector*** hingewiesen und manche kritische Notiz eines DAVID eingeschaltet wird (s. oben § 28);

c) Eine Bearbeitung der Schrift des Araber's BITRODJI (»Alpetrongi»);

d) Eine kurze Einleitung in die Astrologie, nebst dem Allgemeinen aus dem *Quadripartitum* des PTOLEMAEUS. Diese erschien zum ersten Male mit einem ungenauen neuen Titel in Warschau 1886, nebst einer Nativität vom Jahre 1160 (welche in der That von ABRAHAM IBN ESRA herrührt, vgl. oben § 23, S. 41 n. 16).

JEHUDA kam 1247 nach Toscana, wo er den kaiserlichen Hof kennen lernte und seine Mitteilung mit der lakonischen Bemerkung abfertigt: »Alles hängt vom Gestirn (Glück) ab».[7]

30. In der Provence blühte um jene Zeit (1245—1275) MOSES IBN TIBBON, welcher das Übersetzen aus dem Arabischen ins Hebräische zur ausschliesslichen Beschäftigung gemacht zu haben scheint, nachdem sein Grossvater JEHUDA und sein Vater SAMUEL ihm in der Ausbildung eines ***arabisirenden Hebraismus*** vorangegangen waren. Seine eigenen Übersetzungen leiden an zu grosser Wörtlichkeit, trotz der richtigen Anweisungen seiner eben genannten Vorfahren, wie man übersetzen müsse. Die in unseren engeren Bereich fallenden Übersetzungen sind: AFLA'H (DJABIR IBN), Astronomie; BITRODJI (»Alpetragius»), Astronomie; EUKLID,

Elemente; Desselben *Data;* AL-FARABI, Commentar zu Stücken aus EUKLID; GEMINUS, *Isagoge,* ohne Namen des Autors, daher bis vor Kurzem unbekannt; AL-'HA'S'SAR, Arithmetik; IBN HEITHAM, Commentar zu Stücken aus EUKLID; THEODOSIUS, *Sphaerica.*[8]

Ich stelle hierher ein *anonymes* Fragment über Kalenderrechnung, welches die »Verschiebungen» (*Dechijjot*) gegen die Ketzer (etwa Karaiten?) verteidigt, MAIMONIDES citirt und von verflossenen 5000 Jahren spricht, also nicht vor *1240*, wohl aber viel später verfasst sein kann; ms. Michael 675, bei NEUBAUER n. 914[4].

Wenn man dem unzuverlässigen LEO AFRICANUS trauen darf, so war der arabische Dichter IBRAHIM IBN SAHL aus Sevilla (1211—1250), welcher durch einen unaufrichtigen Übertritt zum Islam es mit den Bekennern des Judentums vollends verdarb, ohne bei den neuen Glaubensgenossen festes Vertrauen zu gewinnen, auch *Astronom,* oder Astrolog.[9] Eine Auswahl aus dem Diwan IBRAHIM's, gesammelt von HASAN BEN MUHAMMED AL-'ATTHAR, erschien s. l. (Bulak?) 1292 (1875) in kl. 8° (55 S.); im Nachdruck, Beirut 1855 (48 S.) ist die biographische Notiz von IBN 'HAJJAN, am Ende der 1. Ausgabe, weggelassen. Es ist merkwürdig, dass bisher, so weit ich weiss, kein Orientalist von diesen Gedichten Notiz genommen, aus welchen vielleicht sich Etwas über die Sternkunde des Verfassers ergiebt.[10]

31. Mit der zweiten Hälfte des XIII. Jahrhunderts treten vor Allem die, von ALFONS X. als Dolmetscher aus dem Arabischen ins *Spanische* und als Ergänzer der übersetzten Schriften beschäftigten Juden in Toledo, fast alle Ärzte, in den Vordergrund; einer von ihnen, ISAK IBN SID, Cantor, oder Synagogenbeamter anderer Art, in Toledo, darf nach unverdächtigem Zeugnis als Beobachter der Sterne und Redacteur der berühmten *Alfonsinischen astronomischen* Tafeln (1252) bezeichnet werden, über deren Abfassung und angebliche neue Redaction (1256) die Acten noch nicht geschlossen sind.[11] Die umfangreichen Arbeiten jener Juden, welche durch christliche Gelehrte wahrscheinlich im sprachlichen Ausdruck emendirt und redigirt wurden, liegen uns in der prachtvollen Ausgabe durch RICO Y SINOBAS vor (*Libros del Saber de astronomia del Rey* ALONSO, Madrid 1863—67, V Bände in folio; zum Teil mit colorirten Figuren), ein Monument, das die Schandthaten der Inquisition überdauert hat.[12] Aus den in diesen Übersetzungen vorkommenden Namen von arabischen Autoren älteren Datums, den übersetzenden Juden und redigirenden Christen hat ein unkritischer Chronist den sogenannten »*astronomischen Congress*» unter ALFONS erfunden, der noch heute in achtbaren Quellen spuckt, obwohl

ich ihn vor ungefähr einem halben Jahrhundert als eine Fabel nachgewiesen habe.

In den *Libros del Saber* erscheint ein »Rabbi ZAG», den ich mit dem oben genannten ISAK IBN SID identificire, und zwar in den Prologen zu folgenden Schriften (Bd. II—IV): 1) *Dell astrolabio redondo,* 2) *Lamina universal,* und über die Operation damit, 3) *Libro de los Armellas,* 4) *del Quadrante,* 5) *Piedra della sombra,* 6) *Libro del Relogio del aqua,* 7) in dem unedirten *Lib. del Estrumiento del levamiento, en Arabigo Atacir* (= *Tasjir,* Genaueres in *Hebr. Übers.* S. 277); — »ibn Said» bei KAYSERLING, *Biblioteca Españ.,* p. 105 (nach GRÄTZ?) ist unbegründet.

JEHUDA BEN MOSES KOHEN (»Mosca el menor») übersetzt angeblich: 1) 1256 den *Libro de las Figuras,* welcher 1276 unter Mitwirkung des SAMUEL HA-LEVI (s. weiter unten) corrigirt wurde. Ich habe in diesem Werke ohne Autornamen den Sternkatalog des ABD AL-RA'HMAN AL-'SUFI (geb. 968) erkannt, welcher jetzt in der französischen Übersetzung von SCHJELLERUP (1874) vorliegt und meine Vermutung bestätigt (*Hebr. Übers.* S. 573, 616); — 2) COSTA BEN LUCA, *Libro de Aleora* (1258); — 3) ALI IBN ABI'L-RIDJAL (vulgo ABEN RAGEL — 1256), Astrologie, woraus die gedruckte latein. Übersetzung geflossen ist; — 4) ABOLAYS (ob ABU'L-AISCH?), *de la propriedad de las piedras,* ein halbastrologisches Werk über Steine, welches die Academie in Madrid mit einem nicht dazu gehörigen Prolog herausgegeben hat.[13]

Im *Libro del Saber* erscheint ferner der Arzt SAMUEL HA-LEVI, wahrscheinlich aus der Familie Abulafia in Toledo, welcher *Fabrica y usos del Relogio della candela* eines arabischen Anonymus übersetzt und die Übersetzung des 'SUFI (1278) revidirt hat (*Hebr. Übers.* S. 986).

Im Auftrag des Königs ALFONS übersetzt, oder paraphrasirt, der Arzt DON ABRAHAM IBN HEITHAM's Weltconstruction, welche daraus ins Lateinische (*de coelo et mundo*) übersetzt, handschriftlich erhalten ist, — und war bei der in Burgos 1277 verbesserten Übersetzung der Tafel (*Safi'ha*) des ZARKALI beteiligt (*Hebr. Übers.* S. 972).

[1] Ich citire dieselbe kurz: *Hebr. Übers.*

[2] *Catal. libr. h. in Bibl. Bodl.* p. 1912, 2172, 2204, 2244; Hebr. Bibliogr. XX, 47; NEUBAUER, Catal. n. 896 giebt den Ortsnamen nicht, der im Index (Solomon of S.) nachgetragen und für die Stelle im Index maassgebend ist.

[3] AL-KIFTI, ms., s. Hebr. Bibliogr. XVI, 10, wo S. 11 das Citat aus HAMMER, *Lit.-Gesch.* VI, 432 dahin zu berichtigen ist, dass TUSI zuerst über dieses Astrolab geschrieben hätte. — Zum Namen *Schureiti* vgl. ABU ZEID AHMED (bei HAMMER), Encyklop. Übersicht, S. 252; SCHURÛTI bei HAGI KHALFA VII, 1253 n. 9382; ABU SCHUREITI in einer Erzählung ms. Fischl 15 c.

[4] Hierher gehört nicht JOSEF BEN ISRAEL in *Catal. Bodl.* p. 2490[5], zu berichtigen nach ms. Turin bei B. PEYRON, p. 228, wo aber eine falsche Combination WOLF's zu berichtigen, nach ms. Paris 400 von ELIA BEN JOSEF.

[5] *Verzeichnis der hebräischen Handschriften in Berlin,* **2** (bald beendet und edirt) S. 73, ob ein homonymer Neffe? Über seine Stellung zur Geometrie s. mein *Jewish Lit.* p. 362 n. 90.

[6] *Hebr. Übers.* S. 547 u. XXIX, nachzutragen im Index p. 1056.

[7] Über diesen § s. *Hebr. Übers.* S. 1 ff. und S. 725.

[8] S. *Hebr. Übers.* im Index S. 1062.

[9] Über ihn s. LEBRECHT, im Magazin f. d. Lit. d. Auslands 1841 n. 38 (abgedr. im Lit.-Bl. des Orient II, 249), die Quelle für GRÄTZ, *Gesch. d. Jud.* VII, 98; vgl. Allgem. Zeitung des Judenth. 1837 S. 312; AL-MAKKARI I, 664, II, 351, 354, 510; HAGI KHALFA III, 241 (VII, 1098 n. 3758) VII, 724 (über die Quelle s. VI, 224); HAMMER, *Lit.-Gesch.* VII, 924 n. 8874 unter *ägyptischen* Dichtern! DE JONG, *Catal. Academ.* p. 115. — Eine Schrift in Prosa ms. Landberg n. 178, jetzt in Leyden.

[10] Im Index von E. FAGNAU's Catal. der mss. in Algier (1893) p. 619 werden unterschieden: IBN SAHL in n. 1298[4], 1332, 1806, 1810, 1819 und MUHAMMED(!) B. SAHL ISRAELI in n. 1807 (f. 52, 36 u. 33); allein ms. 1332 enthält Gutachten von »ABU'L-A'SBAG ISA BEN SAHL« (gest. 486 H.) seit 472 H., und ein Auszug daraus ist ms. 1298. Die anderen mss. sind Gedichtsammlungen, in n. 1806 wird unser IBRAHIM »IBN SAHL AL-ISCHBILI« genannt, f. 27[6], = »ibn Sahl« f. 9 und 96; ms. 1810 u. 1819 nennen nur »ibn Sahl«, wahrscheinlich denselben.

[11] *Hebr. Übers.* S. 616.

[12] Über eine unvollständige *italienische* Übersetzung (1341) berichtete E. NARDUCCI, s. *Hebr. Übers.* S. 975.

[13] Zeitschr. d. deutschen morgenl. Ges. **49**, 1895, S. 266. — Über JEHUDA s. *Hebr. Übers.* S. 979.

RECENSIONEN. — ANALYSES.

F. Cajori. A HISTORY OF ELEMENTARY MATHEMATICS WITH HINTS ON METHODS OF TEACHING. New York, Macmillan 1896. 8°, VIII + 304 p.

Dans la préface, M. CAJORI avertit qu'un grand nombre de passages de ce livre sont tirés, avec de légères modifications, de son *History of mathematics.* En effet, presque toutes les mathématiques de l'antiquité et du moyen âge appartiennent au domaine des mathématiques élémentaires, et sans doute il aurait été inutile d'essayer une exposition tout à fait nouvelle de ces périodes. Mais d'autre part le lecteur qui connaît déjà l'*History of mathematics,* trouvera aisément, que le nouvel ouvrage n'en est nullement une copie ou un extrait, même pour ce qui concerne les périodes mentionnées.

M. CAJORI a divisé son livre en trois parties embrassant respectivement l'antiquité (p. 1—92), le moyen âge (p. 93—138) et les temps modernes (p. 139—289); à la fin il a ajouté (p. 290—304) une table des noms et des matières.

Il va sans dire qu'il est beaucoup plus facile de rendre compte du développement des mathématiques élémentaires que d'écrire une histoire générale des mathématiques, et, à notre avis, M. CAJORI a aussi réussi mieux dans sa nouvelle entreprise que dans son *History of mathematics.* Les remarques critiques que nous avons faites relativement à celle-là dépendent peut-être en partie de notre ignorance des principes que M. CAJORI a suivis pour circonscrire le domaine assez indéfini des mathématiques élémentaires et pour répartir l'espace disponible sur ses différentes branches. Quant aux erreurs, elles semblent être relativement peu nombreuses et en général sans importance; on voit sans peine que M. CAJORI s'est efforcé de les réduire au minimum.

L'espace restreint de ce numéro ne nous permet de reproduire ici que quelques-unes des notes que nous avons prises en parcourant l'*History of elementary mathematics.*

P. 136. »A *Geometria speculativa* was printed in Paris in 1511 as the work of BRADWARDINUS, but has been attributed by some to a Dane, named PETRUS, then a resident of Paris». Par le mot »then», le lecteur est induit à croire que PETRUS DE DACIA a vécu vers l'an 1511; comme on sait, ce mathématicien était antérieur à BRADWARDIN.

P. 180—181. »JOHN NORFOLK ... wrote ... an inferior treatise on progressions which was printed in 1445». Cette

indication, tirée de la page 7 de l'*History of the study of mathematics at Cambridge* (Cambridge 1889) de M. W. W. R. BALL, est évidemment absurde; le traité de JOHANNES NORFOLK a été publié pour la première fois par HALLIWELL dans les *Rara Mathematica*.

P. 228. »CHRISTOFF RUDOLFF ... wrote the earliest textbook in algebra in the german language». Il convient de faire observer que le livre de GRAMMATEUS rédigé en 1518 et publié en 1523 avec le titre: *Ayn new künstlich Buech*, etc., contient aussi un traité de l'algèbre (cf. p. ex. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* II, p. 364).

P. 235. »In his *Geometry* 1637, he [DESCARTES] uses ... x in the first place, then the letters y, z, to designate unknown quantities». Cette indication, reproduite d'après les *Vorlesungen* de M. CANTOR, a peut-être besoin d'être un peu modifiée (cf. ENESTRÖM, Biblioth. Mathem. 1892, p. 92).

P. 257. BRIANCHON nacquit en 1783 (non 1785) et mourut à Versailles en 1864 (cf. Biblioth. Mathem. 1894, p. 91). — P. 278. J. HOÜEL nacquit en 1823 et mourut en 1886.

M. CAJORI a utilisé pour son ouvrage une partie assez considérable des écrits récents sur l'histoire des mathématiques, mais il y en a aussi quelques-uns d'une certaine importance auxquels il ne semble pas avoir eu recours; ainsi p. ex. il ne cite pas les *Elemente der ägyptischen Theilungsrechnung* (1895) de M. F. HULTSCH (cf. p. 19), les *Näherungswerte irrationaler Quadratwurzeln bei Archimedes* (1893) du même auteur (cf. p. 28), l'édition de DIOFANTOS (1893—1895) par M. P. TANNERY (cf. p. 35), l'écrit: *Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung. Deutsch herausgegeben und mit einer Übersicht über die Geschichte des Problems von der Quadratur des Zirkels von den ältesten Zeiten bis auf unsere Tage versehen* (1892) par M. F. RUDIO (cf. p. 249).

La rédaction de l'ouvrage est soignée; nous avons noté seulement quelques inadvertances insignifiantes, p. ex. la répétition de notices sur la naissance et la mort de certains auteurs, ou de quelques autres indications. Parmi les fautes d'impression nous ne mentionnerons que celle à la page 234, où il faut lire $x^3 *$ au lieu de x^{3*} (l'astérisque signifie que le coefficient de x^2 est zéro).

Stockholm. G. ENESTRÖM.

NEUERSCHIENENE SCHRIFTEN. — PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausgegeben von || journal d'histoire des mathématiques publié par G. Eneström. Stockholm. 8°.
1896: 3.

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von M. Cantor. Leipzig. 8°.
41 (1896): 5.

Adam, H., Calcul de Mons. Des Cartes ou introduction à sa géométrie, 1638.
Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{20}_2$, 1896, 221—248.

Cajori, F., A history of elementary mathematics with hints on methods of teaching. New York, Macmillan 1896.
8°, VIII + 304 p. — [1.50 doll.]

Callandreau, O., Notice sur M. Hugo Gyldén.
Paris, Acad. de sc., Comptes rendus **123**, 1896, 771—772.

Curtze, M., Über die im Mittelalter zur Feldmessung benutzten Instrumente.
Biblioth. Mathem. 1896, 65—72.

Dickstein, S., Wiadomosc o korrespondencyi Kochanskiego z Leibnizem.
Krakow, Akad. umiej., Rozprawy **33**, 1896, 1—9. — Notice sur la correspondance d'A. A. Kochanski avec Leibniz.

Dickstein, S., Katalog dziel i rekopisów Hoene-Wronskiego. Catalogue des oeuvres imprimées et manuscrites de Hoëne Wronski. Krakow 1896.
8°, VIII + 111 p. + portr. + facsim.

Dupuy, P., La vie d'Evariste Galois.
Paris, École normale, Annales $\mathbf{13}_3$, 1896, 197—266.

Eneström, G., Note bibliographique sur les femmes dans les sciences exactes.
Biblioth. Mathem. 1896, 73—76.

°**Euclidis** Opera omnia. Ediderunt J. L. Heiberg et H. Menge. Vol. VI. Data cum commentario Marini et scholiis antiquis. Edidit H. Menge. Leipzig, Teubner 1896.
8°, 6 + 336 p. — [5 Mk.]

Favaro, A., Per la edizione nazionale delle opere di Galileo Galilei sotto gli auspicii di S. M. il re d'Italia. Indice cronologico del Carteggio Galileiano. Firenze 1896.
4°, 101 p.

°**Graf, H.,** Briefwechsel zwischen J. Steiner und L. Schäfli.
| *Bern,* Naturf. Gesellsch., Mittheilungen 1896. 208 p.

°**Hellmann, W.**, Über die Anfänge des mathematischen Unterrichts an den Erfurter Schulen im 16. und 17. Jahrhundert und bis etwa 1774. Theil II. Erfurt 1896.
4°, 16 p. — [1·20 Mk.]

Korteweg, D. J., Descartes et les manuscrits de Snellius, d'après quelques documents nouveaux.
Amsterdam, Wisk. Genootsch., Nieuw Archief **3**: 1, 1896, 57—71. — Réimpression de la note signalée à la Biblioth. Mathem. 1896, p. 93.

°**Müller, C. F.**, Henricus Grammateus und sein Algorismus de integris. Zwickau, Thost 1896.
4°, 33 p. — [1 Mk.]

°**Pacioli, L.**, Divina proporzione. Die Lehre vom goldenen Schnitt. Nach der Venezianischen Ausgabe vom Jahre 1509 neu herausgegeben, übersetzt und erläutert von C. Winterberg. Wien 1896.
8°, 6 + 367 p. — [6 Mk.]

Poggendorff's Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften, enthaltend Nachweisungen über Lebensverhältnisse und Leistungen von Mathematikern, Astronomen, Physikern, Chemikern, Mineralogen, Geologen, Geographen u. s. w. aller Völker und Zeiten. Dritter Band (die Jahre 1858 bis 1883 umfassend). Herausgegeben von B. W. Feddersen und A. J. van Oettingen. 1. Lieferung. Leipzig, Barth 1896.
8°, 96 p. — [3 Mk.] — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **41**, 1896; Hist. Abth. 181—182. (Cantor.)

Répertoire bibliographique des sciences mathématiques. Fiches 101—400. Paris, Gauthier-Villars 1895—1896.
8°, 300 feuillet. — [6 fr.]

°**Rosenberger, F.**, Isaak Newton und seine physikalischen Principien. Ein Hauptstück aus der Entwickelungsgeschichte der modernen Physik. Leipzig, Barth 1895.
8°, VI + 536 p. — [Analyse:] Zeitschr. für Mathem. **41**, 1896; Hist. Abth. 185—186. (Cantor.)

Rudio, F., Die naturforschende Gesellschaft in Zürich 1746—1896.
Festschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich 1746—1896 (Zürich 1896), I, p. 1—274.

Ruska, J., Das quadrivium aus Severus bar Sakkû's Buch der Dialoge. Inaugural-Dissertation (Heidelberg). Leipzig 1896.
8°, 79 p.

(**Schevichaven, S. R. J. van,**) Bouwstoffen voor de geschiedenis van de levensverzekeringen en lijfrenten in Nederland. Bijeengebracht en bewerkt door de Directie van de Algemeene Maatschappij van Levensverzekering en Lijfrente. Amsterdam 1897.
4°, (6) + 370 p. + 9 portraits + 2 planches.

Schlegel, V., Nauka rozciaglosci Grassmanna. Przyczynek do historyi matematyki w ostatnich piecdziesieciu latach przelozyl za upowaznieniem autora S. DICKSTEIN. Warszawa 1896.
8°, (4) + 51 p. — Traduction du mémoire: *Die Grassmann'sche Ausdehnungslehre. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik in den letzten fünfzig Jahren* (cf. Biblioth. Mathem. 1896, p. 29, 94).

Steinschneider, M., Die Mathematik bei den Juden.
Biblioth. Mathem. 1896, 77—83.

Steinschneider, M., Bemerkung zur Biblioth. Mathem. 1896, S. 4 [über den Geburtsort des JOHANN VON GEMUNDEN].
Biblioth. Mathem. 1896, 96.

°**Vassilief, A.,** Eloge historique de Lobatchevsky, prononcé dans la séance solennelle de l'université de Kazan le 22 octobre 1893. Traduit du russe par Mlle A. FICHTENHOLTZ. Paris, Hermann, 1896.
8°, 40 p. — [2 Mk.]

Wertheim, G., Die Arithmetik des Elia Misrachi. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik. Zweite verbesserte Auflage. Braunschweig, Vieweg 1896.
8°, (10) + 68 p. — [3 Mk.]

Wessel, C., Om Directionens analytiske Betegning, et Forsög, anvendt fornemmelig til plane og sphaeriske Polygoners Opløsning. Med en Fortale af S. LIE.
Archiv for Mathem. óg Naturv. **8**, 1896. 69 p. + 2 pl. — [2 Mk.]

Zelbr, K., Das Problem der kürzesten Dämmerung.
Zeitschr. für Mathem. **41**, 1896; Hist. Abth. 121—145, 153—179.

Question 60 [sur l'origine du terme »regula cecis»].
Biblioth. Mathem. 1896, 96. (G. ENESTRÖM.)

BALL, W. W. R., A primer of the history of mathematics. London, Macmillan 1895. 8°.
Zeitschr. für Mathem. **41**, 1896; Hist. Abth. 183—184. (CANTOR.)

BRILL, A. und NÖTHER, M., Die Entwickelung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit. (Jahresber. der deutschen Mathematiker-Vereinigung **3**.)
Zeitschr. für Mathem. **41**, 1896; Hist. Abth. 146—148. (P. STÄCKEL.)

BOSSCHA, J., Christian Huygens. Rede zum 200. Gedächtnisstage seines Lebensendes. Mit erläuternden Anmerkungen. Übersetzt von T. W. ENGELMANN. Leipzig 1895. 8°.
Zeitschr. für Mathem. **41**, 1896; Hist. Abth. 184—185 (CANTOR.)

FIORINI, M., Erd- und Himmelsgloben, ihre Geschichte und Konstruktion. Nach dem Italienischen frei bearbeitet von S. GÜNTHER. Leipzig, Teubner 1895. 8°.
Zeitschr. für Mathem. **41**. 1896; Hist. Abth. 186—187. (CANTOR.)

LORIA, G., Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche. Seconda edizione accresciuta ed interamente rifatta. Torino, Clausen 1896. 8°.

Biblioth. Mathem. 1896, 87—89. (G. ENESTRÖM.) — *Mexico*, Soc. cientif. »Antonio Alzate« **9**, 1896, 71—72.

SMITH, D. E., History of modern mathematics. New York, Wiley 1896. 8°.

Biblioth. Mathem. 1896, 84—86. (G. ENESTRÖM.)

STURM, A., Das delische Problem. [I. Behandlung des Problems in der Platonischen Zeit.] Linz 1895. 8°.

Zeitschr. für Mathem. **41**, 1896; Hist. Abth. 76—77. (CANTOR.)

ZEUTHEN, H. G., Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter. Vorlesungen. Kjöbenhavn, Höst 1896. 8°.

Zeitschr. für Mathem. **41**, 1896; Hist. Abth. 182—183. (CANTOR.)

[Listes d'ouvrages récemment publiés.]

Biblioth. Mathem. 1896, 89—95. — Zeitschr. für Mathem. **41**, 1896; Hist. Abth. 191—192.

ANFRAGEN. — QUESTIONS.

61. Dans l'ouvrage de HANKEL: *Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter* (Leipzig 1874), on trouve à la page 341 l'indication suivante relative à l'usage de chiffres arabes sur des monnaies: »Erst seit einer Ordonnanz HENRY's II. vom Jahre 1549 erscheinen sie auf Münzen.« Cependant cette indication ne peut être exacte, car déjà en 1478 on a frappé en Suède une monnaie portant des chiffres arabes.

Quelle est la première monnaie frappée en Europe où l'on trouve des chiffres arabes? (G. Eneström.)

Bemerkung zur Anfrage 60*. Das Wort *sekîs* ist bis jetzt in arabischen Werken nicht gefunden worden (wenigstens von mir nicht), aber man könnte vermuthen, dies Wort sei identisch mit *scheqîss* = Theilhaber, auch Antheil. Nach einer Mittheilung von Seite des Herrn Superintendenten RUDLOFF in Wangenheim (Gotha) heisst das Wort »Antheilrechnung«, das im *Kâfî fîl hisâb,* herausgegeben von ADOLF HOCHHEIM, vorkommt, arabisch *hisâb el-muqâsama* und nicht *hisâb el-scheqîss*. — Möglich ist auch, dass *sekîs* im Zusammenhang stehen könnte mit *seqî* = das Zutrinkengeben, das Tränken. (H. Suter.)

* Sur ma demande, M. ZEUTHEN a bien voulu m'avertir que, par un malentendu de la part du typographe, le mot *Cîntu* a été introduit dans la question 860 de l'Intermédiaire des mathématiciens. En effet, *sikish,* écrit en caractères *arabes,* a quelque ressemblance avec *Cîntu*. (G. Eneström.)

Index.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK | JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

GENERAL-REGISTER DER JAHRGÄNGE | TABLE GÉNÉRALE DES ANNÉES

NEUE FOLGE 1—10 **1887—1896** NOUVELLE SÉRIE 1—10

HERAUSGEGEBEN VON | PUBLIÉE PAR

GUSTAF ENESTRÖM.



BERLIN
MAYER & MÜLLER
PRINZ LOUIS-FERDINANDSTR. 2.

STOCKHOLM
G. ENESTRÖM
BRAHEGATAN 43.

PARIS
A. HERMANN
RUE DE LA SORBONNE 8.

ÜBERSICHT. — SOMMAIRE.

I. Autoren-Register. — Table des auteurs.

ALLMAN, George Johnston.



Né à Dublin (Irlande) le 28 septembre 1824, professeur de mathématiques au »Queens College» à Galway en 1853, membre du conseil supérieur du »Queens University» en 1877 et de celui de l'université royale d'Irlande en 1880, en retraite depuis 1893.

On the name of the so-called »theorem of the gnomon». 1887, 22.

BALL, W. W. Rouse.



Né à London le 14 août 1850, maître de conférences (»fellow») au »Trinity College» à Cambridge en 1875, avocat (»barrister at law») en 1876, maître de conférences (»fellow») à l'»University College» à London en 1878, professeur de mathématiques au »Trinity College» à Cambridge la même année, directeur des études mathématiques au même »College» en 1891, et »tutor» depuis 1893.

Newton's classification of cubic curves. 1891, 35—40

On the use of a single symbol to denote the incommensurable number 3·14159 .... 1894, 106.

BALTZER, Richard.



Né à Meissen (Allemagne) le 27 janvier 1818, professeur à la »Kreuzschule» à Dresden en 1842, professeur de mathématiques à l'université de Giessen en 1869. Mort à Giessen le 7 novembre 1887.

Antwort auf die Anfrage 14. [Über die erste Anwendung des Zeichens ∞] **1887, 64.**

BEMAN, Wooster Woodruff.



Né à Southington (Connecticut, Etats-Unis) le 28 mai 1850, professeur assistant de mathématiques à l'université d'Ann Arbor (Michigan, Etats-Unis) en 1874, professeur extraordinaire en 1882 et ordinaire depuis 1887 à la même université.

Questions. **17.** [On the use of the sign ÷.] — **23.** [On the use of the letter *e*.] **1887**, **96**; **1888**, **120**.

On the question 23. **1894**, **32**.

BESTHORN, Rasmus Olsen.



Né à Hilleröd (Danemark) le 29 octobre 1847, agrégé des langues sémitiques à l'université de Kjöbenhavn depuis 1889, rédacteur de la section de politique extérieure du journal »Nationaltidende» à Kjöbenhavn.

Über den Commentar des Simplicius zu den Elementa. **1892**, **65—66**.

BIERENS de HAAN, David.



Né à Amsterdam le 3 mai 1822, professeur au lycée de Deventer 1848—1853, professeur extraordinaire à l'université de Leiden en 1863, professeur ordinaire de mathématiques à la même université en 1867, en retraite depuis 1892. Mort à Santpoort (Néerlande) le 12 août 1895.

Bibliographie de l'histoire des sciences mathématiques aux Pays-Bas. **1891**, **13—22**.

BJERKNES, Carl Anton.



Né à Christiania le 24 octobre 1825, sous-chef des mines à Kongsberg, plus tard professeur au lycée de la même ville 1848—1854, professeur de mathématiques à l'université de Christiania depuis 1863.

La tentative de Degen de généraliser le théorème d'addition d'Euler. **1888**, **1—2**.

BOBYNIN, VICTOR.



Né près de la ville Rosslavl (gouvernement de Smolensk, Russie) le 20 novembre 1849, docteur-enseignant de l'histoire des mathématiques à l'université de Moskwa depuis 1882; directeur du journal »Fiziko-matematicheskaia naouki» depuis 1885.

De l'étude sur l'histoire des mathématiques en Russie. 1888, 103–110.

Quelques mots sur l'histoire des connaissances mathématiques antérieures à la science. 1889, 104–108.

Sur le procédé employé dans le papyrus de Rhind pour réduire les fractions en quantièmes. 1890, 109–112.

Programme du cours de l'histoire des mathématiques à l'université de Moskwa. 1891, 79–88.

Sur l'oeuvre des Grecs dans le développement des mathématiques. 1892, 1–2.

Progrès successifs des sciences mathématiques chez les peuples de l'Europe. 1892, 110–114.

Sur la propagation des signes numériques cunéiformes. 1893, 18–20.

Sur les méthodes primitives qui ont servi à résoudre des questions arithmétiques. 1894, 55–60.

Esquisse de l'histoire du calcul fractionnaire. 1896, 97–101.

[Analyse d'un ouvrage de VACHTCHENKO-ZAKARTCHENKO, voir la Table des écrits analysés.]

BRAUNMÜHL, ANTON VON.



Né à Tiflis (Russie) le 22 décembre 1853, professeur de mathématiques à la »Realschule» de München en 1878, maître de conférences à l'école polytechnique de München en 1884, professeur extraordinaire en 1888 et professeur ordinaire de mathématiques à la même école depuis 1892.

Der Unterricht in der Geschichte der Mathematik an der k. technischen Hochschule zu München. 1895, 89–90.

Beitrag zur Geschichte der prosthaphäretischen Methode in der Trigonometrie. 1896, 105–108.

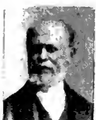
CAJORI, Florian.



Né à Thusis (Graubünden, Suisse) le 28 février 1859, émigré aux Etats-Unis en 1875, professeur adjoint de mathématiques à la »Tulane university» à New Orleans en 1885, professeur de mathématiques appliquées à la même université en 1887, employé au bureau de l'enseignement des Etats-Unis en 1888, professeur de physique au »Colorado College» à Colorado depuis 1889.

Historical sketch of the study of mathematics in the United States. **1891**, 74—78.

CANTOR, Moritz.



Né à Mannheim le 23 août 1829, maître de conférences à l'université de Heidelberg en 1853, professeur extraordinaire en 1863, professeur honoraire de mathématiques à la même université depuis 1877; directeur adjoint de la »Zeitschrift für Mathematik und Physik» depuis 1859 et directeur de la »Historisch-literarische Abtheilung» de ce journal depuis 1875.

Ahmed und sein Buch über die Proportionen. **1888**, 7—9.

CHRISTENSEN, Sophus Andreas.



Né à Holbæk (Danemark) le 18 septembre 1861, professeur au lycée d'Odense depuis 1890.

The first determination of the length of a curve. **1887**, 76—80.

Bibliographische Notiz über das Studium der Geschichte der Mathematik in Dänemark. [En collaboration avec M. J. L. Heiberg.] **1889**, 75—83.

CURTZE, Ernst Ludwig Wilhelm Maximilian.



Né à Ballenstedt (Anhalt, Allemagne) le 4 août 1837, professeur ordinaire au lycée de Thorn en 1864, en retraite depuis 1894.

CURTZE, Ernst Ludwig Wilhelm Maximilian.

Über einen De La Hire zugeschriebenen Lehrsatz. 1888, 65—66.

Über den »liber de similibus arcubus» des Ahmed ben Jusuf. 1889, 15—16.

Über den Josephus sapiens oder Hispanus Gerberts. 1894, 13—14.

Zur Geschichte des Josephspiels. 1894, 116.

Miscellen zur Geschichte der Mathematik im 14. und 15. Jahrhundert. 1894, 107—115; 1895, 1—8.

Mathematisch-historische Miscellen. 1. Noch einmal über den De La Hire zugeschriebenen Lehrsatz. 2. Weiteres über das Josephspiel. 3. Der Algorismus des Sacrobosco. 4. Zur Zahlentheorie aus dem XV. Jahrhundert. 5. Zur Geschichte der vollkommenen Zahlen. 6. Arithmetische Scherzaufgaben aus dem 14. Jahrhundert. 7. War Johannes de Lineriis ein Deutscher, ein Italiener oder ein Franzose? 8. Über den Dominicus Parisiensis der »Geometria Culmensis». 9. Alte Scherzaufgaben in deutscher Sprache. 10. Zur Geschichte der Progressionen im Mittelalter. 1895, 33—42, 77—88, 105—114.

Zur Geschichte der Übersetzungen der Elementa im Mittelalter. 1896, 1—3.

Über Johann von Gemunden. 1896, 4.

Ein Beitrag zur Geschichte der Physik im 14. Jahrhundert. 1896, 43—49.

Über die im Mittelalter zu Feldmessung benutzten Instrumente. 1896, 65—72.

DICKSTEIN, Samuel.



Né à Warzawa le 12 mai 1851, professeur de mathématiques à la même ville, directeur du journal »Prace matematyczno-fizyczne».

Note bibliographique sur les études historico-mathématiques en Pologne. 1889, 43—51.

Sur les découvertes mathématiques de Wronski. 1892, 48—52, 85—90; 1893, 9—14; 1894, 49—54, 85—87; 1896, 5—12.

DICKSTEIN, Samuel.

Zur Geschichte der Mathematik im siebzehnten Jahrhundert. **1894**, 24.

[Analyses d'écrits de Baraniecki et de Loria, voir la Table des écrits analysés.]

ENESTRÖM, Gustaf.



Né à Nora (Suède) le 5 septembre 1852, adjoint extraordinaire à la bibliothèque de l'université d'Upsala en 1875 et à la bibliothèque royale de Stockholm depuis 1879; directeur du journal »Bibliotheca Mathematica».

Aperçu sur les recherches récentes de l'histoire des mathématiques. **1887**, 3—7.

Nouvelle notice sur un mémoire de Chr. Goldbach, relatif à la sommation des séries, publié à Stockholm en 1718. **1887**, 23-24.

Sur trois petits traités mathématiques attribués au savant suédois Peder Månsson. **1888**, 17—18.

Sur un point de l'histoire du problème des isopérimètres. **1888**, 38.

Bibliographie suédoise de l'histoire des mathématiques 1667—1888. **1889**, 1—14.

Sur le premier emploi du symbole π pour 3,14159 .... **1889**, 28.

Sur un théorème de Kepler équivalant à l'intégration d'une fonction trigonométrique. **1889**, 65—66.

Programme d'un cours universitaire d'histoire des mathématiques. **1890**, 1—10.

Note historique sur la somme des valeurs inverses des nombres carrés. **1890**, 22—24.

Sur les bibliographies des sciences mathématiques. **1890**, 37—42.

Gumersindo Vicuña (1840—1890). **1891**, 33—34.

Note historique sur les symboles qui servent à désigner des fonctions quelconques de variables données. **1891**, 89—90.

Quelques remarques sur l'histoire des mathématiques en Espagne au 16e siècle. **1894**, 33—36.

ENESTRÖM, GUSTAF.

du terme *regula cecis.*] — **61**. [Sur les premières monnaies portant des chiffres arabes.] **1887**, **32**, **64**; **1888**, **32**, **96**; **1889**, **64**, **96**; **1890**, **32**, **64**, **96**, **120**; **1891**, **32**, **96**; **1892**, **32**, **64**, **96**, **120**; **1893**, **31—32**, **64**, **96**, **120**; **1894**, **32**, **63—64**, **96**, **120**; **1895**, **32**, **64**, **96**, **120**; **1896**, **31—32**, **64**, **96**, **120**.

Listes de publications récentes.
1887, **30—31**, **60—63**, **91—95**, **117—120**; **1888**, **29—31**, **58—62**, **93—96**, **119—120**; **1889**, **30—32**, **59—63**, **93—96**, **117—120**; **1890**, **28—32**, **61—64**, **93—96**, **117—120**; **1891**, **28—32**, **61—64**, **93—96**, **118—119**; **1892**, **27—31**, **63—64**, **93—96**, **117—120**; **1893**, **28—31**, **60—63**, **92—95**, **117—120**; **1894**, **27—31**, **61—63**, **91—95**, **118—120**; **1895**, **30—32**, **60—64**, **92—96**, **116—119**; **1896**, **26—31**, **63—64**, **89—95**, **117—120**.

[Analyse d'une cinquantaine d'écrits, voir la Table des écrits analysés.]

FAVARO, ANTONIO.



Né à Padova (Italie) le 21 mai 1847, professeur extraordinaire à l'université de Padova en 1872, professeur ordinaire de statique graphique à la même université depuis 1882; directeur de l'»Edizione nazionale delle opere di Galileo Galilei sotto gli auspicii di Sua Maestà il re d'Italia».

Otto anni d'insegnamento di storia delle matematiche nella r. università di Padova. **1887**, **49—54**.

Il Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da D. B. Boncompagni (1868—1887). **1889**, **109—112**.

Notizie sulle fonti bibliografiche per gli studi di storia delle matematiche in Italia. **1889**, **113—115**.

Intorno ad un trattato anonimo sull' Astrolabio riconosciuto opera di Prosdocimo de' Beldomandi. **1890**, **81—90**.

Notizia storica sulle applicazioni della spirale logaritmica. **1891**, **23—25**.

Studi italiani sulla storia della matematica. **1892**, **67—84**.

Intorno ad una pretesa seconda edizione dell' Algebra di Rafael Bombelli. **1893**, **15—17**.

Anfrage 16. [Über Galilei-Handschriften.] — **Question 36.** [Sur un écrit de Horky publié en 1610.] **1887**, **96**; **1891**, **119**.

GELCICH, Eugen.



Né à Cattaro (Dalmatie, Autriche) le 14 janvier 1854, officier de la marine autrichienne en 1870, professeur de mathématiques et de nautique à l'école de navigation à Cattaro en 1878, directeur de l'école de navigation à Lussinpiccolo en 1881, directeur de l'académie de navigation à Trieste depuis 1895; inspecteur de l'enseignement naval en Autriche en 1896.

[Analyse d'un écrit de Günther, voir la Table des écrits analysés.]

GÜNTHER, Siegmund.



Né à Nürnberg (Bavière) le 6 février 1848, maître de conférences à l'université d'Erlangen en 1872, professeur de mathématiques au lycée d'Ansbach en 1876, professeur de géographie à l'école polytechnique de München depuis 1886; membre du »Reichstag» allemand 1878—1884 et de l'»Abgeordnetenhaus» bavarois depuis 1894.

War die Zykloide bereits im XVI. Jahrhundert bekannt? 1887, 8—14.

Notiz zur Geschichte der Klimatologie. 1887, 65—69.

Über eine merkwürdige Beziehung zwischen Pappus und Kepler. 1888, 81—87.

Die erste Anwendung des Jakobsstabes zur geographischen Ortsbestimmung. 1890, 73—80.

Das gläserlose Sehrohr im Altertum und Mittelalter. 1894, 15—23.

[Analyses d'écrits de Carrara, Giesing, Künssberg, Loria, Schultz et Zwerger, voir la Table des écrits analysés.]

HALSTED, George Bruce.



Né à Newark (New Yersey, Etats-Unis) le 25 novembre 1853, maître de conférences (»fellow») à l'université de Johns Hopkins à Baltimore en 1877, chargé de cours à l'université de Princeton en 1879, professeur de mathématiques pures et appliquées à l'université d'Austin (Texas) depuis 1884.

On the teaching of the history of mathematics in the University of Texas. 1891, 53.

HEIBERG, Johan Ludvig.



Né à Aalborg (Jylland, Danemark) le 27 novembre 1854, directeur du lycée »Borgerdydskolen» à Kjöbenhavn en 1884, professeur de philologie classique à l'université de la même ville depuis 1896.

Der byzantinische Mathematiker Leon. **1887**, 33–36.

Bibliographische Notiz über das Studium der Geschichte der Mathematik in Dänemark. [En collaboration avec M. S. A. Christensen.] **1889**, 75–83.

Über den Geburtsort des Serenos. **1894**, 97–98.

HENRY, Charles.

Né à Bollwiller (Alsace) le 16 mai 1859, bibliothécaire à la Sorbonne (Paris) depuis 1881, maître de conférences de physiologie des sensations à la Sorbonne depuis 1892.

Question 24. [Sur un ouvrage de la philosophie des mathématiques.] **1889**, 32.

HOLST, Elling Bolt.



Né à Drammen (Norvège) le 19 juillet 1849, maître de conférences (»stipendiat») à l'université de Christiania en 1876, professeur à l'école technique de Christiania depuis 1891 et chargé de cours à l'université de la même ville depuis 1894.

Bibliographische Notiz über das Studium der Geschichte der Mathematik in Norwegen. **1889**, 97–103.

HULTSCH, Friedrich.



Né à Dresden le 22 juillet 1833, professeur au lycée »Kreuzschule» à Dresden en 1861, directeur du même lycée en 1868, membre du conseil supérieur de l'enseignement (»Oberschulrath») depuis 1889.

[Analyse d'un ouvrage d'Allman, voir la Table des écrits analysés.]

HUNRATH, Karl.



Né à Frankenberg (Hesse, Allemagne) le 2 avril 1847, professeur de mathématiques aux lycées de Mülheim an der Ruhr (1869—1872), Marburg (1872—1873), Glückstadt (1873—1878) et Hadersleben (1878—1885), professeur de mathématiques au lycée de Rendsburg depuis 1885.

Zum Verständnis des Wortes Algorismus. 1887, 70.

Anfrage 18. [Über das Wort »theca» oder »theta».] **1887, 120.**

JONQUIÈRES, Ernest de.



Né à Carpentras (France) le 3 juillet 1820, enseigne de marine en 1841, lieutenant de vaisseau en 1846, capitaine de frégate en 1858, capitaine de vaisseau en 1865, contre-amiral en 1874, vice-amiral en 1879, directeur du matériel de la marine en 1881, directeur des cartes et plans de la marine en 1883, entré dans le cadre de réserve en 1885.

Ecrit posthume de Descartes intitulé »de solidorum elementis». Texte latin, revu et accompagné de quelques notes explicatives. 1890, 43—55.

KÜNSSBERG, Hans.



Né à Herrieden (Bavière) le 30 janvier 1854, inspecteur au collège près S:t Anna à Augsburg en 1880, professeur adjoint de mathématiques au lycée de Schweinfurt en 1882, professeur de mathématiques et de physique à la »Realschule» de Dinkelsbühl depuis 1885 et en même temps au »Progymnasium» de cette ville depuis 1895.

Zum Andenken an Ludwig Ofterdinger. 1896, 50—52.

[Analyse d'un ouvrage de Loria, voir la Table des écrits analysés.]

KUTTA, Wilhelm Martin.

Né à Pitschen (Silésie, Allemagne) le 3 novembre 1867, assistant de mathématiques supérieures à l'école polytechnique de München depuis 1894.

Geometrie mit constanter Zirkelöffnung im Altertum. 1896, 16.

LE PAIGE, CONSTANTIN.

Né à Liége (Belgique) le 9 mars 1852, chargé de cours à l'université de Liège en 1876, professeur extraordinaire à la même université en 1882, professeur ordinaire d'analyse et de géométrie depuis 1885.

Sur un théorème attribué à La Hire. **1887**, 109.

Sur une traduction néerlandaise de la méthode de perspective de Girard Desargues et sur les »Leçons de ténèbres«. **1888**, 10—12.

LORIA, GINO.



Né à Mantova (Italie) le 19 mai 1862, assistant en 1884 et maître de conférences en 1886 à l'université de Torino, professeur extraordinaire de géométrie supérieure à l'université de Genova en 1886 et chargé de cours d'analyse supérieure en 1887, professeur ordinaire de géométrie supérieure à la même université depuis 1891.

Notizie storiche sulla Geometria numerativa. **1888**, 39—48, 67—80.

Addizioni alle notizie storiche sulla Geometria numerativa. **1889**, 23—27.

Rassegna di alcuni scritti sui poligoni di Poncelet. **1889**, 67—74.

Cenni intorno a la vita e le opere di Felice Casorati. **1891**, 1—12.

Esame di alcune ricerche concernenti l'esistenza di radici nelle equazioni algebriche. **1891**, 99—112.

Congetture e ricerche sull' aritmetica degli antichi Egiziani. **1892**, 97—109.

L'odierno indirizzo e gli attuali problemi della storia delle matematiche. **1893**, 39—46.

Ancora sul teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche. **1893**, 47—50.

Un nuovo documento relativo alla logistica greco-egiziana. **1893**, 79—89.

Per Leon Battista Alberti. **1895**, 9—12.

Desargues e la geometria numerativa. **1895**, 51—53.

Question 28. [Sur un principe indiqué par Hankel pour les systèmes de numération.] **1889**, 120.

[Analyses d'ouvrages de BALL, BELLACCHI, MUIR et NAPIER, voir la Table des écrits analysés.]

MANSION, Paul.



Né à Marchin-les-Huy (Belgique) le 3 juin 1844, répétiteur à l'école du génie civil de Gand en 1865, chargé de cours à l'université de Gand en 1867, professeur extraordinaire en 1870, professeur ordinaire de mathématiques à la même université depuis 1874; directeur du journal »Mathesis».

Sur le cours d'histoire des mathématiques de l'université de Gand. **1888**, **33—35**.
Note historique sur la règle de médiation. **1888**, **36**.
Question 21. [Sur l'usage de lettres pour désigner des quantités.] **1888**, **63—64**.
Réponse à la question 24. [Sur un ouvrage de la philosophie des mathématiques.] **1889**, **64**.

NARDUCCI, Enrico.



Né à Roma le 23 novembre 1832, bibliothécaire de l'université de Roma; directeur du journal littéraire »Il Buonarroti» et secrétaire du prince B. Boncompagni. Mort à Roma le 11 avril 1893.

Sur l'optique de Claude Ptolémée. **1888**, **97—102**.
[Analyse d'un ouvrage de Govi, voir la Table des écrits analysés.]

NETTO, Eugen.



Né à Halle a/S. (Allemagne) le 30 juin 1846, professeur extraordinaire de mathématiques à l'université de Strasbourg en 1879 et à l'université de Berlin en 1882, professeur ordinaire de mathématiques à l'université de Giessen depuis 1888.

[Analyse d'un écrit de Baumgart, voir la Table des écrits analysés.]

RICCARDI, Pietro.



Né à Modena (Italie) le 4 mai 1828, lieutenant de génie en 1848, professeur de géodésie à l'université de Modena en 1859, professeur de géométrie pratique à l'université de Bologna en 1877, en retraite depuis 1888.

RICCARDI, Pietro.

SEGRE, Corrado.



Né à Salluzzo (Italie) le 20 août 1863, chargé de cours de géométrie projective à l'université de Torino en 1885, professeur extraordinaire en 1888 et professeur ordinaire de géométrie supérieure à la même université depuis 1892.

STEINSCHNEIDER, Moritz.



Né à Prossnitz (Moravie, Autriche) le 30 mars 1816, professeur à l'école supérieure de filles à Prag en 1842, professeur à la »Veitel Heine Ephraimsche Stiftung« à Berlin en 1859, directeur de l'école des filles de la communauté juive de cette ville 1869—1890, aide de la bibliothèque royale de Berlin depuis 1869.

STEINSCHNEIDER, Moritz.

Miscellen zur Geschichte der Mathematik. 1. Zur Zahlentheorie. 2. Euklid hebräisch. 3. Baculus Jacobi. 4. Johannes de Ligneriis. 5. Levi ben Gerson und der Baculus Jacobi. 6. Geminus. 7. Boëtius. 8. Aegidius de Columna. 9. Kardaga (Kramadja). 10. Der Commentar des Johannes de Saxonia zur »Introductio Alchabitii«. 11. Simplicius, der Mathematiker. 12. Kurze Bemerkungen zur Beschreibung eines hebräischen Manuscripts von Herrn P. Riccardi.
1889, 35—38; **1890**, 107—108; **1891**, 113—116; **1892**, 7—8; **1893**, 73—74.

Über eine lateinische Bearbeitung von Zarkali's Saphea. **1890**, 11—12.

Über die mathematischen Handschriften der amplonianischen Sammlung. **1890**, 65—72; **1891**, 41—52, 65—73.

Die arabischen Bearbeiter des Almagest. **1892**, 53—62.

Mathematische Werke in hebräischen Übersetzungen. **1893**, 51—53.

Die Mathematik bei den Juden. **1893**, 65—72, 105—112; **1894**, 37—45, 79—83, 99—105; **1895**, 19—28, 43—50, 97—104; **1896**, 33—42, 77—83, 109—114.

Johannes Anglicus und sein Quadrant. **1896**, 102—104.

Bemerkung zur Biblioth. Mathem. 1896, S. 4. [Über Johann von Gemunden.] **1896**, 96.

[Analyse d'un ouvrage de Silberberg, voir la Table des écrits analysés.]

SUTER, Heinrich.



Né à Hedingen (canton de Zürich, Suisse) le 4 janvier 1848, professeur de mathématiques à l'école cantonale d'Aarau en 1876 et au lycée de Zürich depuis 1886.

Die mathematischen und naturphilosophischen Disputationen an der Universität Leipzig 1512—1526. **1889**, 17—22.

Bibliographische Notiz über die mathematisch-historischen Studien in der Schweiz. **1890**, 97—106.

Einiges aus Nassir ed-Dins Euklidausgabe. **1892**, 3—6.

SUTER, Heinrich.

Zur Geschichte der Trigonometrie. **1893**, 1—8.
Zur Frage über den Josephus sapiens. **1894**, 84.
Zur Geschichte des Jakobsstabes. **1895**, 13—18.
Nochmals der Jakobsstab. **1896**, 13—15.
Bemerkung zur Anfrage 60. [Über den arabischen Ursprung der Benennung »regula coeci».] **1896**, 120.

TANNERY, Paul.



Né à Mantes (France) le 20 décembre 1843, ingénieur (1865) des manufactures de l'état (tabacs) aux résidences successives de Lille, Paris, Bergerac, Bordeaux, Le Havre, directeur (1886) à Tonneins, Bordeaux, Paris, Pantin, professeur remplaçant de philosophie grecque et latine au Collège de France depuis 1892.

L'extraction des racines carrées d'après Nicolas Chuquet. **1887**, 17—21.
Etudes sur Diophante. **1887**, 37—43, 81—88, 103—108; **1888**, 3—6.

TEIXEIRA, F. Gomes.



Né en Portugal le 28 janvier 1851, professeur extraordinaire à l'université de Coimbra en 1877, professeur ordinaire d'analyse infinitésimale à la même université en 1880, professeur à l'école polytechnique de Porto en 1884, directeur de la même école depuis 1886; député en 1879 et 1882—1884; directeur du »Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas».

Sur les écrits d'histoire des mathématiques publiés en Portugal. **1890**, 91—92.

VACCA, Giovanni.



Né à Genova (Italie) le 18 novembre 1872, étudiant des sciences mathématiques à l'université de Genova.

Intorno alla prima dimostrazione di un teorema di Fermat. **1894**, 46—48.

VALENTIN, Georg.



Né à Berlin le 9 décembre 1848, employé à la bibliothèque royale de Berlin en 1874, »Oberbibliothekar« à la même bibliothèque depuis 1894.

Die beiden Euclid-Ausgaben des Jahres 1482. **1893**, 33—38.
Eine seltene Schrift über Winkeldreitheilung. **1893**, 113—114.
Die Frauen in den exakten Wissenschaften. **1895**, 65—76.
[Analyse de l'»Inhalt und Namen-Verzeichniss der Bände **1—100**« du »Journal für die reine und angewandte Mathematik«, voir la Table des écrits analysés.]

WEISSENBORN, Hermann.



Né à Eisenach le 6 mai 1830, professeur de mathématiques au »Realgymnasium« à Eisenach en 1874, mis à la retraite en 1887. Mort à Eisenach le 21 janvier 1896.

Über die verschiedenen Namen des sogenannten geometrischen Quadrates. **1888**, 37.
Über den von Gerbert angeführten Joseph Sapiens oder Joseph Ispanus. **1893**, 21—23.

VICUÑA, Gumersindo.



Né à Habana le 13 janvier 1840, professeur extraordinaire à l'université de Madrid en 1865, professeur ordinaire de physique mathématique à la même université depuis 1871; député 1875—1881 et 1884—1886, directeur du bureau des contributions 1880—1882 et du bureau d'agriculture, d'industrie et de commerce 1883—1885; directeur du journal »La semana industrial« 1881—1887. Mort à Portugalete le 10 septembre 1890.

Bibliographie espagnole de l'histoire des mathématiques. **1890**, 13—21.
Sur quelques écrits mathématiques publiés en Espagne aux 16e et 17e siècles. **1890**, 33—36.

VIVANTI, Giulio.



Né à Mantova (Italie) le 24 mai 1859, professeur de mathématiques à l'école normale supérieure de Pavia en 1893, professeur extraordinaire de calcul infinitésimal à l'université de Messina depuis 1895.

Sur une classe de grandeurs infiniment petites considérée par Newton. 1891, 97–98.

Notice historique sur la théorie des ensembles. 1892, 9–25.

Note sur l'histoire de l'infiniment petit. 1894, 1–12.

WOHLWILL, Emil.

Né à Hamburg (Allemagne) le 24 novembre 1835, docteur ès sciences, chimiste industriel à Hamburg.

Die Prager Ausgabe des Nuncius Sidereus. 1887, 100–102.

Hat Leonardo da Vinci das Beharrungsgesetz gekannt? 1888, 19–26.

WOLF, Rudolf.



Né à Fällanden (Suisse) le 7 juillet 1816, professeur de mathématiques à la »Realschule» de Bern en 1839, maître de conférences à l'université de Bern en 1847, professeur d'astronomie à Bern en 1852, professeur d'astronomie à l'école polytechnique de Zürich et professeur de mathématiques à l'école cantonale de la même ville en 1855. Mort à Zürich le 6 décembre 1893.

Zwei kleine Notizen zur Geschichte der Mathematik am Anfange des siebzehnten Jahrhunderts. 1889, 33–34.

ZANOTTI-BIANCO, Ottavio.



Né à Pinerolo (Italie) le 15 septembre 1852, ingénieur civil en 1874, assistant de géométrie descriptive à l'université de Torino, actuellement maître de conférences de géodésie à la même université.

Nota storica sulla variazione delle latitudini. 1893, 75–78.

ZEUTHEN, Hieronymus Georg.



Né à Grimstrup (Jylland, Danemark) le 15 février 1839, maître de conférences à l'université de Kjöbenhavn en 1871, professeur extraordinaire de mathématiques à la même université en 1883, professeur ordinaire depuis 1886.

Note sur la résolution géométrique d'une équation du 3e degré par Archimède. **1893**, 97–104.

Académie danoise des sciences.

Question 20. [Sur l'histoire de l'algèbre chez les Arabes.] **1888**, 63.

Académie des sciences de Madrid.

Question 34. [Sur l'histoire de certaines courbes.] **1891**, 64.

Question 49. [Sur les mathématiciens espagnols antérieurs au 16e siècle.] **1895**, 32.

Institut vénitien de sciences, lettres et arts.

Question 25. [Sur un compendium de l'histoire des mathématiques.] **1889**, 64.

II. Systematisches Register der Originalaufsätze. — Table méthodique des notes originales.

1. Bibliographie et études de l'histoire des mathématiques.

2. Enseignement de l'histoire des mathématiques.

ENESTRÖM, Programme d'un cours universitaire d'histoire des mathématiques. **1890**, 1—10.
MANSION, Sur le cours d'histoire des mathématiques de l'université de Gand. **1888**, 33—35.
BOBYNIN, Programme du cours de l'histoire des mathématiques à l'université de Moskwa. **1891**, 79—88.
BRAUNMÜHL, Der Unterricht in der Geschichte der Mathematik an der k. technischen Hochschule zu München. **1895**, 89—90.
FAVARO, Otto anni d'insegnamento di storia delle matematiche nella r. università di Padova. **1887**, 49—54.
HALSTED, On the teaching of the history of mathematics in the University of Texas. **1891**, 53.

3. Généralités sur l'histoire des mathématiques.

ENESTRÖM, Sur les bibliographies des sciences mathématiques. **1890**, 37—42.
VALENTIN, Die Frauen in den exakten Wissenschaften. **1895**, 65—76.
ENESTRÖM, Note bibliographique sur les femmes dans les sciences exactes. **1896**, 73—76.
CAJORI, Historical sketch of the study of mathematics in the United States. **1891**, 74—78.
CURTZE, Mathematisch-historische Miscellen. **1895**, 33—42, 77—88, 105—114.
STEINSCHNEIDER, Miscellen zur Geschichte der Mathematik. **1889**, 35—38; **1890**, 107—108; **1891**, 113—116; **1892**, 7—8; **1893**, 73—74.
BOBYNIN, Progrès successifs des sciences mathématiques chez les peuples de l'Europe. **1892**, 110—114.
VIVANTI, Note sur l'histoire de l'infiniment petit. **1894**, 1—12.
RICCARDI, Di alcune opere di Prospettiva di autori Italiani ommesse nella »Histoire de la Perspective» di M. Poudra. **1889**, 39—42.

4. Origine des mathématiques. Mathématiques des Egyptiens et des Chaldéens.

BOBYNIN, Quelques mots sur l'histoire des connaissances mathématiques antérieures à la science. **1889**, 104—108.
BOBYNIN, Sur les méthodes primitives qui ont servi à résoudre des questions arithmétiques. **1894**, 55—60.
BOBYNIN, Esquisse de l'histoire du calcul fractionnaire. **1896**, 97—101.

5. Mathématiques des Grecs.

6. Mathématiques des peuples de l'Orient.

STEINSCHNEIDER, Die Mathematik bei den Juden. **1893**, 65—72, 105—112; **1894**, 37—45, 79—83, 99—105; **1895**, 19—28, 43—50, 97—104; **1896**, 33—42, 77—83, 109—114.
RICCARDI, Sopra un codice ebraico contenente alcuni scritti matematici ed astronomici. **1893**, 54—56.
STEINSCHNEIDER, Mathematische Werke in hebräischen Übersetzungen. **1893**, 51—53.

7. Mathématiques des Romains et au moyen âge.

GÜNTHER, Notiz zur Geschichte der Klimatologie. **1887**, 65—69.
HEIBERG, Der byzantinische Mathematiker Leon. **1887**, 33—36.
GÜNTHER, Das gläserlose Sehrohr im Altertum und Mittelalter. **1894**, 15—23.
CURTZE, Über die im Mittelalter zur Feldmessung benutzten Instrumente. **1896**, 65—72.
WEISSENBORN, Über die verschiedenen Namen des sogenannten geometrischen Quadrates. **1888**, 37.
STEINSCHNEIDER, Über das Wort Almanach. **1888**, 13—16.
CURTZE, Zur Geschichte des Josephspiels. **1894**, 116.
CURTZE, Zur Geschichte der Übersetzungen der Elementa im Mittelalter. **1896**, 1—3.
WEISSENBORN, Über den von Gerbert angeführten Joseph Sapiens oder Joseph Ispanus. **1893**, 21—23.
CURTZE, Über den Josephus sapiens oder Hispanus Gerberts. **1894**, 13—14.
SUTER, Zur Frage über den Josephus sapiens. **1894**, 84.
RICCARDI, Intorno ad alcune edizioni dell' »Algorismus» del Sacrobosco. **1894**, 73—78.
STEINSCHNEIDER, Johannes Anglicus und sein Quadrant. **1896**, 102—104.
CURTZE, Ein Beitrag zur Geschichte der Physik im 14. Jahrhundert. **1896**, 43—49.
CURTZE, Miscellen zur Geschichte der Mathematik im 14. und 15. Jahrhundert. **1894**, 107—115; **1895**, 1—8.
GÜNTHER, Die erste Anwendung des Jakobsstabes zur geographischen Ortsbestimmung. **1890**, 73—80.
FAVARO, Intorno ad un trattato anonimo sull' Astrolabio riconosciuto opera di Prosdocimo de' Beldomandi. **1890**, 81—90.
RICCARDI, Intorno al trattato di Prosdocimo de' Beldomandi sull'Astrolabio. **1890**, 113—114.
CURTZE, Über Johann von Gemunden. **1896**, 4.

8. Mathématiques de la renaissance et au 16e siècle.

LORIA, Per Leon Battista Alberti. **1895**, 9—12.
WOHLWILL, Hat Leonardo da Vinci das Beharrungsgesetz gekannt? **1888**, 19—26.
VALENTIN, Die beiden Euclid-Ausgaben des Jahres 1482. **1893**, 33—38.
TANNERY, L'extraction des racines carrées d'après Nicolas Chuquet. **1887**, 17—21.
GÜNTHER, War die Zykloide bereits im XVI. Jahrhundert bekannt? **1887**, 8—14.
HUNRATH, Zum Verständnis des Wortes Algorismus. **1887**, 70.
STEINSCHNEIDER, Über eine lateinische Bearbeitung von Zarkali's Saphea. **1890**, 11—12.
ENESTRÖM, Le commentaire de Jakob Ziegler sur la »Saphea» de Zarkali. **1896**, 53—54.
SUTER, Die mathematischen und naturphilosophischen Disputationen an der Universität Leipzig 1512—1526. **1889**, 17—22.
ENESTRÖM, Sur trois petits traités mathématiques attribués au savant suédois Peder Månsson. **1888**, 17—18.
BRAUNMÜHL, Beitrag zur Geschichte der prosthaphäretischen Methode in der Trigonometrie. **1896**, 105—108.
ENESTRÖM, Quelques remarques sur l'histoire des mathématiques en Espagne au 16e siècle. **1894**, 33—36.
VICUÑA, Sur quelques écrits mathématiques publiés en Espagne aux 16e et 17e siècles. **1890**, 33—36.
CURTZE, Über einen De La Hire zugeschriebenen Lehrsatz. **1888**, 65—66.
ALLMAN, On the name of the so-called »theorem of the gnomon». **1887**, 22.
FAVARO, Intorno ad una pretesa seconda edizione dell' Algebra di Rafael Bombelli. **1893**, 15—17.
RICCARDI, Osservazione intorno alla nota del prof. A. Favaro sull' Algebra del Bombelli. **1893**, 64.
LE PAIGE, Sur un théorème attribué à La Hire. **1887**, 109.

9. Mathématiques au 17e siècle.

WOLF, Zwei kleine Notizen zur Geschichte der Mathematik am Anfange des siebzehnten Jahrhunderts. **1889**, 33—34.
WOHLWILL, Die Prager Ausgabe des Nuncius Sidereus. **1887**, 100—102.
RICCARDI, Nota relativa ad una edizione del Nuncius Sidereus del Galilei. **1887**, 15—16.

Mansion, Note historique sur la règle de médiation. **1888**, 36.
Günther, Über eine merkwürdige Beziehung zwischen Pappus und Kepler. **1888**, 81—87.
Eneström, Sur un théorème de Kepler équivalant à l'intégration d'une fonction trigonométrique. **1889**, 65—66.
Le Paige, Sur une traduction néerlandaise de la méthode de perspective de Girard Desargues et sur les »Leçons de ténèbres«. **1888**, 10—12.
Loria, Desargues e la geometria numerativa. **1895**, 51—53.
Dickstein, Zur Geschichte der Mathematik im siebzehnten Jahrhundert. **1894**, 24.
Jonquières, Ecrit posthume de Descartes intitulé »de solidorum elementis«. Texte latin, revu et accompagné de quelques notes explicatives. **1890**, 43—55.
Christensen, The first determination of the length of a curve. **1887**, 76—80.
Favaro, Notizia storica sulle applicazioni della spirale logaritmica. **1891**, 23—25.
Vivanti, Sur une classe de grandeurs infiniment petites considérée par Newton. **1891**, 97—98.
Vacca, Intorno alla prima dimostrazione di un teorema di Fermat. **1894**, 46—48.
Eneström, Sur la part de Jean Bernoulli dans la publication de l'»Analyse des infiniment petits«. **1894**, 65—72.

10. Mathématiques au 18e siècle.

Eneström, Note historique sur les symboles qui servent à désigner des fonctions quelconques de variables données. **1891**, 89—90.
Eneström, Sur un point de l'histoire du problème des isopérimètres. **1888**, 38.
Ball, Newton's classification of cubic curves. **1891**, 35—40.
Ball, On the use of a single symbol to denote the incommensurable number 3·14159 . . . . **1894**, 106.
Eneström, Nouvelle notice sur un mémoire de Chr. Goldbach, relatif à la sommation des séries, publié à Stockholm en 1718. **1887**, 23—24.
Eneström, Note historique sur la somme des valeurs inverses des nombres carrés. **1890**, 22—24.
Eneström, Sur le premier emploi du symbole π pour 3,14159 . . . . **1889**, 28.
Valentin, Eine seltene Schrift über Winkeldreitheilung. **1893**, 113—114.

11. Mathématiques au 19e siècle.

RICCARDI, De propositione novae Bibliothecae mathematicae italicae seculi XIX. **1890**, 56.

LORIA, Esame di alcune ricerche concernenti l'esistenza di radici nelle equazioni algebriche. **1891**, 99—112.

LORIA, Ancora sul teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche. **1893**, 47—50.

LORIA, Rassegna di alcuni scritti sui poligoni di Poncelet. **1889**, 67—74.

LORIA, Notizie storiche sulla Geometria numerativa. **1888**, 39—48, 67—80.

LORIA, Addizioni alle notizie storiche sulla Geometria numerativa. **1889**, 23—27.

ZANOTTI BIANCO, Nota storica sulla variazione della latitudini. **1893**, 75—78.

BJERKNES, La tentative de Degen de généraliser le théorème d'addition d'Euler. **1888**, 1—2.

SEGRE, Intorno alla storia del principio di corrispondenza e dei sistemi di curve. **1892**, 33—47.

DICKSTEIN, Sur les découvertes mathématiques de Wronski. **1892**, 48—52, 85—90; **1893**, 9—14; **1894**, 49—54, 85—87; **1896**, 5—12.

VIVANTI, Notice historique sur la théorie des ensembles. **1892**, 9—25.

LORIA, Cenni intorno a la vita e le opere di Felice Casorati. **1891**, 1—12.

KÜNSSBERG, Zum Andenken an Ludwig Ofterdinger. **1896**, 50—52.

ENESTRÖM, Gumersindo Vicuña (1840—1890). **1891**, 33—34.



III. Register der angezeigten Schriften. — Table des écrits analysés.

Favaro, A., Miscellanea Galileiana inedita. Studi e ricerche. (Memorie dell' Istituto Veneto, vol. **22**.) Venezia 1887. 4°. (Analyse par G. ENESTRÖM.) **1887**, 28.

Favaro, A., Bonaventura Cavalieri nello studio di Bologna. Estratto dagli Atti e Memorie della r. deputazione di storia patria per le provincie di Romagna. $\mathbf{6}_3$. Bologna 1888. 8°. (Analyse par G. ENESTRÖM.) **1888**, 118.

Favaro, A., Per la edizione nazionale delle Opere di Galileo Galilei sotto gli auspicii di S. M. il re d'Italia. Esposizione e disegno. Firenze 1888. 4°. (Analyse par G. ENESTRÖM.) **1888**, 90.

Fine, H. B., The number-system of algebra treated theoretically and historically. New York, Leach 1891. 8°. (Analyse par G. ENESTRÖM.) **1891**, 54.

Fiorini, M., Erd- und Himmelsgloben, ihre Geschichte und Konstruktion. Nach dem italienischen frei bearbeitet von S. GÜNTHER. Leipzig, Teubner 1895. 8°. (Analyse par G. ENESTRÖM.) **1896**, 25—26.

Galilei, G., Opere. Edizione nazionale sotto gli auspicii di sua maestà il re d'Italia. Volume I—II. Firenze 1890—1891. 4°. (Analyse par G. ENESTRÖM.) **1892**, 26—27.

Giesing, J., Leben und Schriften Leonardos da Pisa. Ein Beitrag zur Geschichte der Arithmetik des 13. Jahrhunderts. Döbeln 1886. 4°. (Analyse par S. GÜNTHER.) **1887**, 89—90.

Giesing, J., Neuer Unterricht in der Schnellrechenkunst für die technische, kaufmännische und Schulpraxis. Döbeln 1884. 8°. (Analyse par S. GÜNTHER.) **1887**, 111—112.

Govi, G., L'ottica di Claudio Tolomeo da Eugenio Ammiraglio di Sicilia, scrittore del secolo XII ridotta in latino sovra la traduzione araba di un testo imperfetto ora per la prima volta conforme a un codice della Biblioteca Ambrosiana per deliberazione della R. Accademia delle scienze di Torino pubblicata. Torino 1885. 8°. (Analyse par E. NARDUCCI.) **1888**, 91—92.

Günther, S., Die geometrischen Näherungskonstruktionen Albrecht Dürers. (Beilage zum Jahresbericht der königl. Studienanstalt Ansbach für 1885—1886.) Ansbach 1886. 8°. (Analyse par E. GELCICH.) **1887**, 26—27.

Heron d'Alexandrie, Les mécaniques ou l'élévateur publiées pour la première fois sur la version arabe de Qostâ ibn Lûqâ

Loria, G., Il periodo aureo della geometria greca. Saggio storico. (Memorie dell' accad. delle scienze di Torino **40**$_5$.) Torino 1890. 4°. (Analyse par G. ENESTRÖM.) **1891**, 55—60.

Loria, G., Le scienze esatte nell'antica Grecia. Libro I. I geometri precursori di Euclide. Libro II. Il periodo aureo della geometria greca. Modena 1893—1895. 4°. (Analyse par G. ENESTRÖM.) **1895**, 54.

Mansion, P., Esquisse de l'histoire du calcul infinitésimal. Gand, Hoste 1887. 8°. (Analyse par G. ENESTRÖM.) **1888**, 53.

Muir, Th., The theory of determinants in the historical order of its development. Part I. Determinants in general. Leibnitz (1693) to Cayley (1841). London, Macmillan 1890. 8°. (Analyse par G. LORIA.) **1890**, 59—61.

Müller, F., Historisch-etymologische Studien über mathematische Terminologie. Wissenschaftliche Beilage zum Programm des Königlichen Luisen-Gymnasiums 1887. Berlin 1887. 4°. (Analyse par G. ENESTRÖM.) **1887**, 90—91.

Müller, F., Zeittafeln zur Geschichte der Mathematik, Physik und Astronomie bis zum Jahre 1500, mit Hinweis auf die Quellen-Literatur. Leipzig, Teubner 1892. 8°. (Analyse par G. ENESTRÖM.) **1892**, 115—116.

Napier, J., The construction of the wonderful canon of logarithms. Translated from Latin into English with notes and a catalogue of the various editions of Napier's works by W. R. MACDONALD. Edinburgh, Blackwood 1889. 8°. (Analyse par G. LORIA.) **1889**, 116.

Rebière, A., Mathématiques et mathématiciens. Pensées et curiosités. Deuxième édition, revue et augmentée. Paris, Nony 1893. 8°. (Analyse par G. ENESTRÖM.) **1893**, 57—60.

Répertoire bibliographique des sciences mathématiques. Première série. Fiches 1 à 100. Paris, Gauthier-Villars 1894. 8°. (Analyse par G. ENESTRÖM.) **1895**, 29.

Revue semestrielle des publications mathématiques rédigée sous les auspices de la société mathématique d'Amsterdam. I: 1. Amsterdam 1893. 8°. (Analyse par G. ENESTRÖM.) **1893**, 25—27.

Riccardi, P., Saggio di una bibliografia Euclidea. Memoria. Bologna 1887. 4°. (Analyse par G. ENESTRÖM.) **1888**, 27—28.

Rudio, F., Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung. Deutsch herausgegeben und mit einer Übersicht über die Geschichte des Problems von der Quadratur des Zirkels, von den ältesten Zeiten bis auf unsere Tage, versehen. Leipzig, Teubner 1892. 8°. (Analyse par G. ENESTRÖM.) **1892**, 116—117.

Schubert, H., Die Quadratur des Zirkels in berufenen und unberufenen Köpfen. Eine kulturgeschichtliche Studie. Hamburg 1889. 8°. (Analyse par G. ENESTRÖM.) **1889**, 84.

Schultz, W., Die Harmonie in der Baukunst. Nachweisung der Proportionalität in den Bauwerken des griechischen Altertums. Erster Teil. Mathematische Grundlagen des angewendeten Proportionirungs-Systemes. Hannover-Linden, Manz 1891. 8°. (Analyse par S. GÜNTHER.) **1891**, 91—93.

Silberberg, M., Sefer ha-Mispar. Das Buch der Zahl, ein hebräisch-arithmetisches Werk des R. Abraham ibn Esra (XII. Jahrhundert). Zum ersten Male herausgegeben, ins Deutsche übersetzt und erläutert. Frankfurt a. M., Kauffmann 1895. 8°. (Analyse par M. STEINSCHNEIDER.) **1895**, 91—92.

Smith, D. E., History of modern mathematics. New York, Wiley 1896. 8°. (Analyse par G. ENESTRÖM.) **1896**, 84—86.

Suter, H., Die Mathematik auf den Universitäten des Mittelalters. (Wissenschaftliche Beilage zum Programm der Cantonschule in Zürich 1887.) Zürich 1887. 8°. (Analyse par G. ENESTRÖM.) **1888**, 54.

Tannery, P., Notice sur les deux lettres arithmétiques de Nicolas Rhabdas (texte grec et traduction). Extrait des notices et extraits des manuscrits de la bibliothèque nationale, tome XXXII, 1ère partie. Paris 1886. 4°. (Analyse par G. ENESTRÖM.) **1887**, 28—29.

Tannery, P., La géométrie grecque, comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons. Essai critique. Première partie. Histoire générale de la géométrie élémentaire. Paris, Gauthier-Villars 1887. 8°. (Analyse par G. ENESTRÖM.) **1888**, 55—56.

Treutlein, P., Das geschichtliche Element im mathematischen Unterrichte der höheren Lehranstalten. Vortrag, gehalten bei der 62. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte zu Heidelberg. Braunschweig, Salle 1890. 8°. (Analyse par G. ENESTRÖM.) **1890**, 93.

IV. Namen- und Sach-Register. — Table des noms et des matières.

1 = année 1887; **2** = année 1888; etc.; **10** = année 1896.

STOCKHOLM, CENTRAL-TRYCKERIET, 1897.


UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 05332 3724


ROOM USE ONLY